大学数学系自学丛书

数 学 分 析

（下 册）

申京浩 杨奎元 吕凤 主编

辽 宁 人 民 出 版 社
一九八五年 · 沈阳

大学数学系自学丛书

数学分析

Shuxue Fenxi

（下册）

申京浩　杨奎元　吕　凤　主编

辽宁人民出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：610,000　开本：850×1168 1/32　印张：24　插页：2
印数：1—8,000
1985年6月第1版　1985年6月第1次印刷

责任编辑：俞晓群　封面设计：安今生

统一书号：7090·259　定价：4.00 元

出 版 说 明

为了适应广大在职人员和社会青年自学成才的需要，根据国家建立高等教育自学考试制度的精神，以满足学员自学教材的要求，由辽宁人民出版社出版一套大学数学系自学丛书。

本丛书是由东北师范大学数学系，根据教育部规定的普通高等院校本科必修课现行教学计划和教学大纲编写的。教材内容系统，数据充实，条理清晰，深入浅出；每章均有学习指导和习题解答，便于自学。经过刻苦自学，即可无师自通，达到本科毕业水平。

本丛书有：空间解析几何、高等代数、数学分析、高等几何、常微分方程、复变函数论、近世代数、实变函数论、微分几何、计算机与算法语言 BASIC、概率论与数理统计、计算方法等。本丛书既可供自学应试之用，也可供大专院校的本科在校生和函授生及业余大学学生使用。

本丛书由于水平所限，不当之处在所难免，我们热诚希望广大自学读者批评指正。

目　录

第十一章　无穷级数……………………………………………1
§11.1　基本概念……………………………………………1
§11.2　基本性质……………………………………………6
§11.3　同号级数……………………………………………15
§11.4　变号级数……………………………………………27
§11.5　级数的运算…………………………………………38
学习指导……………………………………………46
习　　题……………………………………………72
第十二章　函数级数……………………………………………78
§12.1　函数级数的收敛域…………………………………78
§12.2　一致收敛性…………………………………………81
§12.3　一致收敛判别法……………………………………92
§12.4　和函数的分析性质…………………………………101
§12.5　函数列………………………………………………107
学习指导……………………………………………115
习　　题……………………………………………146
第十三章　幂级数………………………………………………152
§13.1　幂级数的收敛域……………………………………152
§13.2　和函数的分析性质…………………………………161
§13.3　泰勒级数……………………………………………172
§13.4　初等函数的幂级数展开……………………………178
§13.5　幂级数在近似计算中的应用………………………188
学习指导……………………………………………192
习　　题……………………………………………215

第十四章　傅立叶级数 ……219
§14.1　傅立叶级数 ……219
§14.2　傅立叶级数的收敛性 ……225
§14.3　函数的傅立叶级数展开 ……238
§14.4　傅立叶级数的一致收敛性 ……255
学习指导 ……264
习　　题 ……284
第十五章　多元函数 ……286
§15.1　平面点集 ……286
§15.2　多元函数概念 ……294
§15.3　二元函数的极限 ……298
§15.4　二元函数的连续性 ……306
学习指导 ……312
习　　题 ……325
第十六章　多元函数微分学 ……328
§16.1　偏导数 ……328
§16.2　全微分 ……333
§16.3　方向导数与梯度 ……342
§16.4　复合函数微分法 ……348
§16.5　高阶偏导数和高阶全微分 ……356
§16.6　泰勒公式 ……363
§16.7　极值 ……368
学习指导 ……376
习　　题 ……394
第十七章　隐函数 ……400
§17.1　隐函数概念 ……400
§17.2　由一个方程所确定的隐函数 ……402
§17.3　由方程组所确定的隐函数 ……409
§17.4　隐函数的微分法 ……418
§17.5　映射 ……424

§17.6　在几何上的应用……………………………429
§17.7　条件极值……………………………………436
学习指导……………………………………………441
习　　题……………………………………………459
第十八章　重积分……………………………………463
§18.1　二重积分的概念和性质……………………463
§18.2　二重积分的累次积分法……………………468
§18.3　二重积分的变量替换………………………478
§18.4　三重积分……………………………………486
§18.5　三重积分的变量替换………………………491
§18.6　重积分的应用………………………………501
学习指导……………………………………………510
习　　题……………………………………………526
第十九章　曲线积分和曲面积分……………………532
§19.1　第一型曲线积分……………………………532
§19.2　第二型曲线积分……………………………540
§19.3　格林公式……………………………………554
§19.4　曲线积分与路无关的条件…………………561
§19.5　第一型曲面积分……………………………568
§19.6　第二型曲面积分……………………………573
§19.7　奥—高公式…………………………………584
§19.8　斯托克斯公式………………………………588
学习指导……………………………………………594
习　　题……………………………………………623
第二十章　广义积分…………………………………628
§20.1　无穷积分……………………………………628
§20.2　无穷积分收敛判别法………………………635
§20.3　瑕积分………………………………………647
§20.4　瑕积分收敛判别法…………………………652
学习指导……………………………………………659

习　　题 ……………………………………………686
第二十一章　含参变量积分 ……………………………689
§21.1　含参变量的定积分 ………………………689
§21.2　含参变量的广义积分 ……………………699
§21.3　含参变量广义积分的简单应用 …………706
§21.4　欧拉积分 …………………………………709
学习指导 ……………………………………………716
习　　题 ……………………………………………734

习题答案及提示……………………………………737
后　　记 ……………………………………………762

第十一章　无穷级数

无穷级数的理论，不仅是数学分析的重要组成部分，而且也是整个高等数学必不可少的内容。例如，有些微分方程的解不能用初等函数表示，但却可以用无穷级数表示，这说明无穷级数是表示非初等函数的一种方法。此外，无穷级数又是近似计算初等超越函数或某些非初等函数在给定点的函数值的有力工具。

无穷级数分为数值级数和函数级数两大类。从本章起至第十四章我们讨论无穷级数。

§11.1　基本概念

假设给定一个数列

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \cdots, \ a_n, \ \cdots \tag{11.1}$$

将它的各项顺次用“+”联接起来，即

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{11.2}$$

或简写为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，称为**无穷数值级数**，或简称为**级数**，其中 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$分别称为级数（11.2）的**第一项**，**第二项**，**第三项**，$\cdots$，**第n项**，$\cdots$。第 n 项a_n也称为级数（11.2）的**一般项**或**通项**。

级数（11.2）的前 n 项和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

称为该级数的部分和或n项部分和。令$n=1,2,\cdots$得到由级数部分和构成的数列 $\{S_n\}$

$$
\begin{aligned}
&S_1=a_1\\
&S_2=a_1+a_2\\
&S_3=a_1+a_2+a_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{11.3}
$$

定义 如果级数（11.2）的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$ （有限数），则称级数（11.2）收敛，并称S为级数（11.2）的和，记作

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

如果部分和数列$\{S_n\}$发散，即数列 $\{S_n\}$ 没有极限，则称级数（11.2）**发散**。发散级数没有和。

例1 研究首项为 $a\neq0$，公比为 r的几何级数（或等比级数）

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots \tag{11.4}$$

的敛散性①。

解 它的部分和为

$$S_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}$$

当 $r\neq1$时， $S_n=a\dfrac{1-r^n}{1-r}$

当$|r|<1$时，有

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^n}{1-r}=a\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

级数（11.4）收敛，其和 $S=\dfrac{a}{1-r}$

①敛散性指级数收敛性与发散性。

当 $|r|>1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，级数（11.4）发散。

当 $r=1$ 时，$S_n=a+a+\cdots+a=na$，同样有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，级数(11.4)也发散。

当 $r=-1$时，由于 $S_n=\begin{cases}a, & 当\ n为奇数时,\\ 0, & 当n\ 为偶数时,\end{cases}$

因此，部分和数列$\{S_n\}$发散，即级数（11.4）发散。

综上所述，我们得到：几何级数当 $|r|<1$ 时，收敛，其和为$\dfrac{a}{1-r}$；当 $|r|\geqslant 1$ 时，发散。

利用几何级数的敛散性，可将任何一个无限循环小数化为分数。例如，循环小数$0.2\dot{3}\dot{5}$。先把它改写成

$$0.2\dot{3}\dot{5}=0.2353535\cdots$$
$$=\frac{2}{10}+\left[\frac{35}{1000}+\frac{35}{100000}+\cdots\right]$$

等式右端方括号内是首项 $a=\dfrac{35}{1000}$，公比 $r=\dfrac{1}{100}$ 的几何级数。因为公比的绝对值小于1，所以它收敛，其和是

$$\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{35}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{35}{1000}\cdot\frac{100}{99}=\frac{35}{990}$$

于是，

$$0.2\dot{3}\dot{5}=\frac{2}{10}+\left[\frac{35}{1000}+\frac{35}{100000}+\cdots\right]=\frac{2}{10}+\frac{35}{990}$$
$$=\frac{99\times2+35}{990}$$

再如，循环小数$5.041\dot{7}3\dot{6}$，有

$$5.041\dot{7}3\dot{6}=5.041736736\cdots$$
$$=5+\frac{41}{1000}+\left[\frac{736}{10^6}+\frac{376}{10^9}+\cdots\right]$$

等式右边方括号内是首项 $a=\frac{736}{10^6}$，公比$\frac{1}{10^3}$的几何级数，其和为

$$\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{736}{10^6}}{1-\frac{1}{10^3}}=\frac{736}{999000}$$

于是，

$$5.041\dot{7}3\dot{6}=5+\frac{41}{1000}+\left[\frac{736}{10^6}+\frac{736}{10^9}+\cdots\right]$$

$$=5+\frac{41}{1000}+\frac{736}{999000}$$

$$=5+\frac{41\times999+736}{999000}$$

由此可以看出，把循环小数化为分数的规律是：小数的整数部分即为分数的整数部分，分数的分母是由几个相同数字 9 和 0 由左向右排列而成（9 在前，0 在后），9 的个数是循环节中所含数字的个数，0 的个数是小数点后至第一个循环节前的位数（第一个例子是两个 9 一个 0，第二个例子是三个 9 三个 0）；分数的分子是第一个循环节前的有效数字所组成的整数（第一个例子是 2，第二个例子是41）与若干个 9 的乘积，其个数是循环节中所含数字的个数，再加上循环节所组成的整数（第一个例子是35，第二个例子是736）。

例 2 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ 的敛散性。

解 因为，

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

所以

$$S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]$$

有
$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]=\frac{3}{4}$$

于是，该级数收敛，其和为$\frac{3}{4}$。

例3 判别级数

$$\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots$$

的敛散性。

解 因为

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$$

所以，

$$S_n=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n$$
$$=\ln\ (n+1)$$

有
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$$

于是，该级数发散。

例4 证明，调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \tag{11.5}$$

是发散的。

分析 根据定理2.23的等价叙述，只须证明$\{S_n\}$的某一个

子列$\{S_k\}$发散即可。

证明 取部分和数列$\{S_n\}$的一个子列$\{S_{2^m}\}$，即

$$S_2,\ S_4,\ S_8,\ \cdots,\ S_{2^m},\ \cdots$$

因为，

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right),$$

其中每个括号的和数皆大于$\frac{1}{2}$。事实上，

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m} > 2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}$$

所以，

$$S_{2^m} > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m\text{个}} = 1 + \frac{m}{2}$$

对上式取极限，令$m \to +\infty$有

$$\lim_{m\to\infty} S_{2^m} \geqslant \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{m}{2}\right) = +\infty$$

从而，$\lim\limits_{m\to\infty} S_{2^m} = +\infty$，根据定理2.23，部分和数列$\{S_n\}$发散，于是调和级数（11.5）发散。 □

§11.2 基本性质

定理11.1 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，其和为$S$，则将级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$各项乘以常数 c 所得到的级数$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 也收敛，其和为 cS。

证明 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$的 n 项部分和分别为 S_n与 $\overline{S}_n$。有

$$\overline{S}_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cS_n$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，有

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = cS$$

于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$收敛，其和为 cS。 □

推论 如果常数 $c \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 有相同的敛散性。

证明 一方面，根据定理，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 也收敛。

另一方面，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 也必发散。用反证法。假设级数$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 收敛，根据定理11.1，各项乘以常数$\frac{1}{c}$($c \neq 0$)所得到的级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c}(ca_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛，

这与假设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散矛盾。

这就证明了级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$（$c\neq 0$）有相同的敛散性。 □

此定理及推论可以概括为：将级数各项乘以非零常数，级数的敛散性不变。若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则有等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

定理11.2 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$皆收敛，其和分别为$S$与$T$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$也收敛，其和为$S\pm T$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

证明 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$的部分和分别为$S_n$、$T_n$及$U_n$，则

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k\pm\sum_{k=1}^{n} b_k=S_n\pm T_n$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$，$\lim\limits_{n\to\infty} T_n=T$，有

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}(S_n\pm T_n)=S\pm T$$

于是，级数$\sum\limits_{n=k}^{\infty}(a_n\pm b_n)$收敛，其和为$S\pm T$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$ □

推论 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$发散。

证明 用反证法。假设级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$收敛，根据定理11.2知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n \pm b_n) - a_n] = \sum_{n=1}^{\infty}(\pm b_n) = \pm\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

也收敛，这与题设级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散矛盾。 □

定义 从级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$中去掉前n项所得到的级数

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} + \cdots \tag{11.6}$$

称为级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的第n项余式或余式，记作R_n，即

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p} + \cdots$$

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，其和为S，称余式

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S - S_n$$

为级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的余和。

发散级数没有和，从而也没有余和。

由级数收敛及余和的定义不难推出，级数收敛的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \tag{11.7}$$