

解析几何习题选集

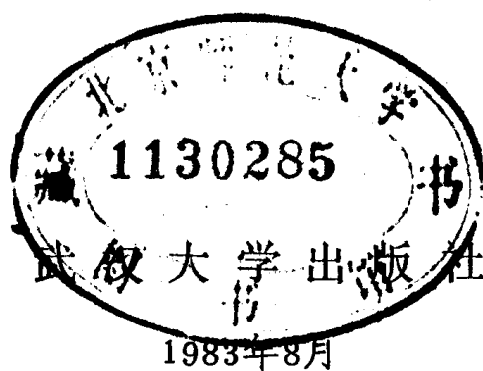
杨文茂 编

武汉大学出版社

解析几何习题选集

杨文茂编

J21/45/06



内 容 简 介

本书内容以空间解析几何习题为主，也选编了一定数量的平面解析几何习题，共一千五百余道。各章或各节之首附有内容提要，所有的题目都给有答案，具有代表性的典型题目或难题给出了解法要点或多种解法。

本书可供大专院校师生使用，也可供中学教师参考。

解 析 几 何 习 题 选 集

杨 文 茂 编

武汉大学出版社出版

(湖北省武昌珞珈山)

湖北省新华书店发行 湖北省孝感地区印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张20 字数440千字

1983年8月第1版 1983年8月第1次印刷

印数：1——15000

统一书号：13279·3 定价：1.90元

前 言

本习题集是高等学校解析几何课程的教学参考书。

全书共分十二章，前五章平面解析几何；后七章空间解析几何，共选入习题1518个。习题按章节组合，每章（或节）前有内容提要，扼要介绍基本概念、公式与定理。各节中题目有属于熟悉与掌握基本概念和公式的；有属于灵活运用理论和技巧的，均由浅入深地编排。书末附有习题答案，并对具有一定代表性或较难习题给出解法要点或提示，有的还给出多种解法。本书可供与这门课程有关的教师和学生使用，也可供中学数学教师参考。

书中收集的习题，除编者讲授这门课程与习题课时选用的题目外，还参考了下列教材与习题集：

- (1) 吴光磊编：解析几何，人民教育出版社，1963。
- (2) 南开大学数学系编：空间解析几何引论（上、下册），人民教育出版社，1978
- (3) 裘光明编：解析几何（第一、二卷），高等教育出版社，1958。
- (4) Д.В.Клетеник编，孙福元等译：解析几何习题集，高等教育出版社，1954。
- (5) О.Н.Цубербиллер编，楼文林译：解析几何习题集，高等教育出版社，1955。
- (6) С.В.Бахвалов等编 Сборник задач по аналитической геометрии
Госу.Изд.Тех-Теор.А.1957.Москва.

编写本书时，作者得到了熊一奇教授多方面帮助与指教，使用过本书原稿的教师们提出了不少有益的意见，在此一并向他们表示衷心的感谢。由于编者水平有限，书中难免有许多缺点和错误，希望得到读者批评指正。

编者于武昌珞珈山 1982.8.

目 录

第一篇 平面解析几何

第一章 平面上点的坐标与曲线的方程

.....	1
§ 1.1.1 直角坐标系.....	7
§ 1.1.2 仿射坐标系.....	10
§ 1.1.3 极坐标系.....	10
§ 1.1.4 坐标变换.....	12
§ 1.1.5 方程与图形的对应关系	15
§ 1.1.6 曲线的一般方程.....	17
§ 1.1.7 曲线的参数方程.....	18

第二章 直线..... 23

§ 1.2.1 直线的各种方程.....	26
§ 1.2.2 直线与直线之间的关系	28
§ 1.2.3 直线的法式方程.....	30
§ 1.2.4 直线束、共点线与共线 点的问题.....	33
§ 1.2.5 直线的极坐标方程.....	34
§ 1.2.6 有关直线的其他问题.....	34

第三章 二次曲线的几何性质..... 37

§ 1.3.1 圆.....	37
§ 1.3.2 椭圆.....	43
§ 1.3.3 双曲线.....	48
§ 1.3.4 抛物线.....	53
§ 1.3.5 圆锥曲线的极坐标方程	57

第四章 二次曲线的一般理论..... 60

§ 1.4.1 二次曲线方程的化简.....	64
§ 1.4.2 二次曲线的中心.....	65

§ 1.4.3 二次曲线的直径、主轴 与渐近线.....	66
§ 1.4.4 二次曲线与直线的相互 位置关系.....	69
§ 1.4.5 二次曲线的不变量.....	70
§ 1.4.6 有关二次曲线的其他问 题.....	73

第五章 平面上的正交变换与仿射变换

.....	75
§ 1.5.1 正交变换.....	80
§ 1.5.2 仿射变换.....	81
§ 1.5.3 二次曲线的仿射性质	84

第二篇 空间解析几何

第一章 空间中点的坐标与曲面、曲线

的方程.....	85
§ 2.1.1 直角坐标系.....	92
§ 2.1.2 两点间的距离与定比分 点.....	93
§ 2.1.3 柱面坐标系与球面坐标 系.....	94
§ 2.1.4 直角坐标变换.....	95
§ 2.1.5 仿射坐标变换.....	96
§ 2.1.6 曲面的一般方程.....	98
§ 2.1.7 曲线的一般方程.....	99
§ 2.1.8 曲面与曲线的参数方程	100

第二章 向量代数..... 103

§ 2.2.1 矢量的线性运算.....	108
§ 2.2.2 矢量的投影与坐标, 用坐标作矢量的线性 运算.....	110

§ 2.2.3	矢量的内积·····	112
§ 2.2.4	用坐标作矢量的内积运算·····	114
§ 2.2.5	矢量的外积·····	114
§ 2.2.6	矢量的混合积·····	116
§ 2.2.7	矢量的二重外积公式·····	117
第三章	平面 ·····	119
§ 2.3.1	平面的点法式方程与一般方程·····	121
§ 2.3.2	平面的截距式方程与参数方程·····	123
§ 2.3.3	平面的法式方程·····	124
§ 2.3.4	两平面间的位置关系·····	126
第四章	直线 ·····	128
§ 2.4.1	直线的参数方程与对称式方程·····	130
§ 2.4.2	直线的一般方程·····	131
§ 2.4.3	直线与直线、直线与平面的位置关系·····	132
§ 2.4.4	平面与直线的综合问题·····	136
第五章	二次曲面的几何性质 ·····	141
§ 2.5.1	球面·····	141
§ 2.5.2	柱面、锥面与旋转曲面·····	145
§ 2.5.3	椭球面、双曲面与抛物面·····	151
§ 2.5.4	直纹二次曲面·····	156
第六章	二次曲面的一般理论 ·····	159
§ 2.6.1	二次曲面的中心、直径面、切平面·····	171

§ 2.6.2	二次曲面方程的确定·····	173
§ 2.6.3	二次曲面的不变量·····	175
§ 2.6.4	二次曲面的形状与位置·····	177
§ 2.6.5	二次曲面与平面的交线·····	178

第七章 空间的正交变换与仿射变换

.....	182
§ 2.7.1 正交变换.....	187
§ 2.7.2 仿射变换.....	188

习 题 答 案

第一编 平面解析几何····· 191

第一章	平面上点的坐标与曲线的方程·····	191
第二章	直线·····	202
第三章	二次曲线的几何性质·····	210
第四章	二次曲线的一般理论·····	231
第五章	平面上的正交变换与仿射变换·····	242

第二编 空间解析几何····· 247

第一章	空间中点的坐标与曲面、曲线的方程·····	247
第二章	矢量代数·····	257
第三章	平面·····	272
第四章	直线·····	277
第五章	二次曲面的几何性质·····	285
第六章	二次曲面的一般理论·····	300
第七章	空间的正交变换与仿射变换·····	310

第一编 平面解析几何

第一章 平面上点的坐标与曲线的方程

(一) 平面上点的坐标

(1) 直角坐标系

平面直角坐标系又叫做笛卡儿直角坐标系或正交坐标系。它是由具有同一个单位长度的两根互相垂直的数轴组成。设一个轴是 Ox 轴,另一个是 Oy 轴,它们之交界点 O 叫做坐标原点。

Ox 与 Oy 轴分别叫做横轴与纵轴,从 Ox 轴正向绕原点 O 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角到达 Oy 轴的正向可能是逆时针或顺时针方向两种情况(见图1),因此有逆时针、顺时针的两种旋转方向的平面直角坐标系,我们多采用前一种。

在坐标系中点 $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$ 分别叫做 Ox , Oy 轴上的单位点, 矢量

(或向量) $\overrightarrow{OE_1} = e_1$, $\overrightarrow{OE_2} = e_2$ 分别叫做 Ox , Oy 轴上的单位矢量或基矢量。坐标系记为 Oxy 或 $[O; E_1, E_2]$ 或 $[O; e_1, e_2]$ 。

轴 Oy 分全平面为两个半平面; 其中位于轴 Ox 正向方面的叫做右半平面, 而另一个叫做左半平面。同样轴 Ox 也分全平面为两个半平面; 其中位于轴 Oy 正向方面的叫做上半平面, 而另一个叫做下半平面。

两坐标轴共同分平面为四个象限, 按下列法则编序: 同时在右半平面和上半平面的叫做第一象限, 同时在左半平面和上半平面的叫做第二象限, 同时在左半平面和下半平面的叫做第三象限, 同时在右半平面和下半平面的叫做第四象限(图1)。

在取定了坐标系后, 平面上任意一点 P 可用两个有顺序的实数来确定它的位置。从点 P 分别向 Ox 轴、 Oy 轴引垂线得垂足 Q, R , 叫做点 P 的射影点、点 Q 在 Ox 轴上有坐标 x , 点 R 在 Oy 轴上有坐标 y , 实数对 (x, y) 称为点 P 的坐标, x 叫做横坐标, y 叫做纵坐标, 记为 $P(x, y)$ 。原点的坐标为 $O(0, 0)$ 。

设平面上两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 则它们之间的距离

$$d(P_1, P_2) = P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

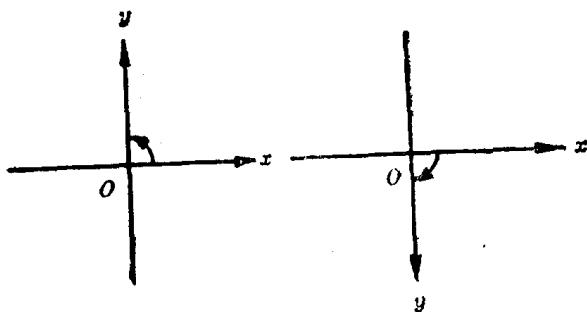


图 1

设点 P 是线段 P_1P_2 或其延长线上的一个内分点或外分点, 记定比

$$\lambda = \begin{cases} \frac{P_1P}{PP_2} & (\text{当 } P \text{ 为内分点}) \\ -\frac{P_1P}{PP_2} & (\text{当 } P \text{ 为外分点}), \end{cases} \quad (2)$$

则点 P 的坐标可按定比分点公式求得

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \end{cases} \quad (3)$$

式中 $\lambda \neq -1$. 如果 $\lambda = 1$, 即点 P 为 P_1P_2 之中点, 则有

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (4)$$

顶点为

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) \quad (5)$$

的 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值.} \quad (6)$$

$$\sigma_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (7)$$

称为 $\triangle ABC$ 的有向面积, 其绝对值为三角形的面积: $S_{\Delta} = |\sigma_{\Delta}|$, 而 $\sigma_{\Delta} > 0$ 表示 $\triangle ABC$ 按 A, B, C 的依次旋转方向与坐标系的旋转方向相同(同为逆时针或同为顺时针方向); 当 $\sigma_{\Delta} < 0$ 表示 $\triangle ABC$ 的旋转方向与坐标系的旋转方向相反。或者说与 $\triangle OE_1E_2$ 旋转方向相同或相反。

(5) 中三点共线的必要充分条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

(2) 仿射坐标系与斜角坐标系

平面仿射坐标系又叫做一般笛卡儿坐标系或平行坐标系。它是由两根相交的数轴组成。这里并不要求两根轴具有相同的单位长度, 也不要求它们互相垂直。设一个轴是 Ox 轴, 另一个是 Oy 轴, 它们的交点 O 叫做坐标原点。 Ox 轴与 Oy 轴分别叫做横轴与纵轴。

在 Ox 、 Oy 轴上分别取定指明方向的矢量 e_1 、 e_2 （它们本身不一定是单位长度）。从 Ox 轴正向到 Oy 轴正向的旋转角 ω 叫做坐标角（图2）。坐标系记为 $[O; e_1, e_2]$ 。

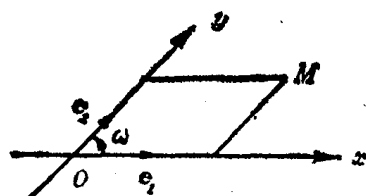


图 2

设平面上任一点 M ，通过它分别作 Ox 轴与 Oy 轴的平行线，交坐标轴于点 M_x 与 M_y ，设

$$\overrightarrow{OM_x} = x e_1, \quad \overrightarrow{OM_y} = y e_2, \quad (9)$$

称 x, y 为点 M 的仿射坐标，记为 $M(x, y)$ 。

原点坐标为 $O(0, 0)$ ，坐标为 $E_1(1, 0)$ 与 $E_2(0, 1)$ 的点分别叫做 Ox 与 Oy 轴上的单位点， $E(1, 1)$ 为平面上的单位点。

若 e_1 与 e_2 为单位矢量（ $|e_1| = |e_2| = 1$ ），当 $\omega \neq \frac{\pi}{2}$ 称此仿射坐标系为斜角坐标系，当 $\omega = \frac{\pi}{2}$ 为直角坐标系。

在仿射坐标系中，关于定比分点的公式（3）与（4）及三点共线的公式（8）都成立。但有关两点间距离及三角形面积的公式比直角坐标系中相应公式要复杂些。

设关于仿射坐标系的基本矢量 e_1, e_2 有

$$|e_1|^2 = g_{11}, \quad |e_2|^2 = g_{22}, \quad |e_1| \cdot |e_2| \cos \omega = g_{12}. \quad (10)$$

那么两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 之间的距离

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{g_{11}(x_2 - x_1)^2 + 2g_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + g_{22}(y_2 - y_1)^2}. \quad (11)$$

（10）中的数满足

$$g_{11} > 0, \quad g_{22} > 0, \quad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0.$$

若记矢量

$$a = \overrightarrow{P_1 P_2} = (X, Y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

则矢量 a 的长为

$$|a| = \sqrt{g_{11}X^2 + 2g_{12}XY + g_{22}Y^2}. \quad (12)$$

两个矢量 $a = (X_1, Y_1), b = (X_2, Y_2)$ 之间的夹角 φ 由下式确定（ $0 \leq \varphi \leq \pi$ ）：

$$\cos \varphi = [g_{11}X_1X_2 + g_{12}(X_1Y_2 + X_2Y_1) + g_{22}Y_1Y_2] / |a| \cdot |b|, \quad (13)$$

$$\sin \varphi = \left(\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} / |a| \cdot |b| \text{ 的绝对值}. \quad (14)$$

在斜角坐标系中公式（11），（13），（14）分别为

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \omega},$$

$$\cos \varphi = [X_1X_2 + (X_1Y_2 + X_2Y_1) \cos \omega + Y_1Y_2] / |a| \cdot |b|,$$

$$\sin \varphi = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \sin \omega / |a| \cdot |b| \text{ 的绝对值}.$$

(3) 极坐标系

平面极坐标系是由一个称为极点的某点 O ，和从极点引出的称为极轴的某 Ox 轴组成。此外，还要给出测量长度与角度的单位，并且还要规定平面上绕极点 O 的旋转正向（一般取逆时针方向为正）。

对于平面上的任一点 M ，可以用一个表示长度与一个表示角度的数来确定它的位置，这两个数为（图3）

$$\rho = |OM|, \theta = \angle xOM. \quad (15)$$

数 ρ 称为极径， θ 称为幅角或极角，这两个数称为点 M 的极坐标，记为 $M(\rho, \theta)$ 。

如果规定

$$\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (16)$$

那么平面上任一点（除极点 O 外）有唯一一组极坐标与它对应。而极点 O 的 $\rho = 0$ ， θ 不定。

若对极坐标取消(16)的限制，让 ρ, θ 可取任意值，显然有如下结果：下列坐标代表同一点。

$$A(\rho, \theta) = A(\rho, \theta + 2k\pi), \quad (17)$$

$$A(\rho, \theta) = A(-\rho, \theta + (2k+1)\pi), \quad (18)$$

式中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

关于极轴对称的两点坐标为

$$A(\rho, \theta) \text{ 与 } B(\rho, -\theta); \quad (19)$$

关于过极点与极轴垂直的直线对称的两点坐标为

$$A(\rho, \theta) \text{ 与 } B(\rho, \pi - \theta); \quad (20)$$

关于极点对称的两点坐标为

$$A(\rho, \theta) \text{ 与 } B(-\rho, \theta) \text{ 或 } A(\rho, \theta) \text{ 与 } B(\rho, \theta \pm \pi). \quad (21)$$

在同一平面上同时建立直角坐标系与极坐标系时，我们规定：（1）测量长度的单位对两系选得一致；（2）测量角度旋转正向规定得一致，例如，从横轴正向按反时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角就得到纵轴，那么极角也是按反时针方向旋转就是正的。在这种规定下，如果选取直角坐标系原点重合于极坐标系极点，横轴重合于极轴（如图3所示），则任意点 A 的两种坐标 (x, y) 与 (ρ, θ) 的变换公式为

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta. \quad (22)$$

或

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}. \quad (23)$$

用极坐标表示的两点 $P_1(\rho_1, \theta_1)$ ， $P_2(\rho_2, \theta_2)$ 之间的距离为

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}. \quad (24)$$

(4) 坐标变换

我们讨论在平面上同一个点在不同坐标系中坐标之间的变换公式。主要有下列几种情

况。

1) 直角坐标系与直角坐标系

直角坐标系在坐标轴平行移动时的坐标变换公式是

$$x = x'' + a_1, \quad y = y'' + a_2. \quad (25)$$

在这里 (x, y) 和 (x', y') 分别是平面上同一个点 P 在旧坐标系 Oxy 和新坐标系 $O'x'y'$ 中的坐标, 而 (a_1, a_2) 是新坐标系 $O'x'y'$ 的原点 O' 在旧坐标系 Oxy 中的坐标。

直角坐标系在坐标轴旋转 θ 角时的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta, \end{cases} \quad (26)$$

式中 (x, y) 和 (x', y') 分别是同一个点 P 在旧坐标系 Oxy 和新坐标系 $O'x'y'$ 中的坐标。一般情况: 设新坐标系 $O'x'y'$ 的原点 O' 在旧坐标系 Oxy 中的坐标为 (a_1, a_2) , 旧坐标系的 Ox 轴旋转到新坐标系的 $O'x'$ 轴的角为 θ , 这样一般坐标换的变换公式是

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta + a_1, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta + a_2, \end{cases} \quad (27)$$

在这里 (x, y) 和 (x', y') 分别是平面上同一个点 P 在旧坐标系 Oxy 和新坐标系 $O'x'y'$ 中的坐标。

2) 仿射坐标系与仿射坐标系

设仿射坐标系 $[O; e_1, e_2]$ 与 $[O'; e'_1, e'_2]$ (分别称为旧与新坐标系), 且新原点 O' 与新基矢量 e'_1, e'_2 在旧系中的坐标为

$$O' (a_1, a_2), \quad e'_1 = (a_{11}, a_{21}), \quad e'_2 = (a_{12}, a_{22}), \quad (28)$$

那么同一点 P 在这两系中的坐标 (x, y) 与 (x', y') 之间的变换公式为

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_1, \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_2. \end{cases} \quad (29)$$

3) 斜角坐标系与斜角坐标系

设有坐标角为 ω 的斜角坐标系 Oxy (旧系), 另有坐标角为 ω' 的斜角坐标系 $O'x'y'$ (新系)。设 O' 在旧系中坐标为 $O' (a_1, a_2)$, 从 Ox 轴旋转到 $O'x'$ 轴的角为 θ , 那么同一点 P 在这两系中的坐标 (x, y) 与 (x', y') 之间的变换公式为

$$\begin{cases} x - a_1 = [x' \sin(\omega - \theta) + y' \sin(\omega - \omega' - \theta)] / \sin \omega, \\ y - a_2 = [x' \sin \theta + y' \sin(\theta + \omega')] / \sin \omega. \end{cases} \quad (30)$$

当 $\omega = \omega' = \frac{\pi}{2}$, 公式 (30) 变为 (27), 即成为两个直角坐标系的相应变换公式。

(二) 平面上曲线的方程

平面上给定坐标系后, 曲线上动点的运动规律反映为它的坐标 x, y 之间的一定的函数关系

$$y = f(x) \quad \text{或} \quad x = g(y), \quad (31)$$

这里要求：1) 凡曲线 C 上的点 M 的坐标 (x, y) 都满足方程(31)；2) 凡满足方程(31)的 (x, y) ，所代表的点 $M(x, y)$ 都在曲线 C 上，称方程(31)为曲线 C 的**一般方程**，而曲线 C 为方程(31)的**图形**。

有时方程(31)也可以用方程

$$F(x, y) = 0 \quad (32)$$

来代替，(32)称为曲线的**隐方程**，而(31)又称为**显方程**，都是曲线的一般方程。

如果已知两条曲线

$$C_1: F_1(x, y) = 0, C_2: F_2(x, y) = 0, \quad (33)$$

那么它们的交点就是方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

的公共解，每一组解 (x, y) 确定一个交点。

如果方程(32)只有若干组实解：

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k),$$

则称(32)表示**退化的曲线**(即由这些点构成的“曲线”)。如果方程(32)只有复解，无实解，则称(32)表示**虚的曲线**(或**虚图形与无轨迹**)。

如果方程组(34)无实解，则两曲线无实的交点，但它们有复解时，也称两曲线交于虚点。当组(34)无解时，那么两曲线不相交。一般来说，两曲线交于虚点，也叫做不相交。

如果在直角坐标系中曲线 C 上的动点坐标 x, y 表示为变量 t 的函数

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) (a \leq t \leq b), \quad (35)$$

或是在极坐标系中，曲线 C 上的动点坐标 ρ, θ 表示为变量 t 的函数

$$\rho = \varphi(t), \theta = \psi(t) (a \leq t \leq b), \quad (36)$$

(35)与(36)都称为曲线的**参数方程**， t 称为**参数**或**参变数**。

为了使(35)或(36)所代表的点与曲线 C 上的点有一一对应的关系，还须要规定两点，这就是：1) 对于区间 $a \leq t \leq b$ 上的每一个 t 值，用(35)所确定的点 $(\varphi(t), \psi(t))$ 都在曲线 C 上；2) 曲线 C 上任一点 M 的坐标 x, y 都可用区间 $a \leq t \leq b$ 上的某一个 t 值代入(35)得到。这里的区间也可以是开的或半开半闭的。在参数方程(35)中若消去参数 t ，得到关于变数 x, y 的方程(31)或(32)，即一般方程。

解析几何学常常面临这样两方面的课题：1) 给出了曲线 C 上动点的几何条件(或称为轨迹条件)，导出它的方程；2) 已知曲线的方程，运用解析的方法研究曲线的几何性质。

已知曲线的方程，可以算出曲线上一系列点的坐标，在图上将它们逐点描出，再连成光滑的曲线，从而得到曲线的图形。这种方法称为**描述法**。

用解析法证明几何命题时常有下列几个步骤：

- 1) 适当选取坐标系(直角坐标系、仿射坐标系或极坐标系等)，使已知的几何条件用坐标表示时，取最简单的形式；
- 2) 将已知的几何条件转化为用坐标表示的各种数量关系(等式或不等式)；
- 3) 将待证的几何结论转化为用坐标表示的各种数量关系；
- 4) 利用各种代数知识，通过推理演算与变形整理，从已知的数量关系推导出待证的数

量关系。

§ 1.1.1 直角坐标系

1. 在 Oxy 坐标系的平面上, 描绘出下列各点: $A(3, 2)$, $B(2, -1)$, $C(-5, 2)$, $D(-3, -2)$, $E\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

2. 试求下列各点在横轴上的射影点的坐标:

$A(2, -3)$, $B(3, -1)$, $C(-5, 1)$, $D(-3, -2)$.

3. 试求下列各点在纵轴上的射影点的坐标:

$A(-3, 2)$, $B(-5, 1)$, $C(3, -2)$, $D(-1, 1)$.

4. 试求与下列各点关于 Ox 轴对称的点的坐标:

(1) $A(2, 3)$; (2) $B(-1, -1)$;

(3) $C(-3, -5)$; (4) $D(a, b)$.

5. 试求与下列各点关于 Oy 轴对称的点的坐标:

(1) $A(-1, 2)$; (2) $B(-2, -2)$;

(3) $C(-2, 5)$; (4) $D(a, b)$.

6. 试求与下列各点关于坐标原点对称的点的坐标:

(1) $A(3, 3)$; (2) $B(-2, 1)$;

(3) $C(-2, 5)$; (4) $D(a, b)$.

7. 试求与下列各点关于第一象限角的平分线对称的点的坐标:

(1) $A(2, 3)$; (2) $B(5, -2)$;

(3) $C(-3, 4)$; (4) $D(a, b)$.

8. 试求与下列各点关于第二象限角的平分线对称的点的坐标:

(1) $A(3, 5)$; (2) $B(-4, 3)$;

(3) $C(7, -2)$; (4) $D(a, b)$.

9. 边长为 a 的正方形, 取坐标原点于它的中心处, Ox 轴与它的一条边平行, 求正方形四顶点的坐标。

10. 边长为 a 的正六边形, 坐标原点在它的中心, Ox 轴平行于它的一边, 求正六边形的各顶点坐标。

11. 确定点 $P(x, y)$ 所在的象限, 如果

(1) $xy > 0$; (2) $xy < 0$; (3) $x - y = 0$;

(4) $x + y = 0$; (5) $x + y > 0$; (6) $x + y < 0$;

(7) $x - y > 0$; (8) $x - y < 0$.

12. 动点沿与 Ox 轴平行的直线移动, 问这动点的坐标有什么特点? 又如果沿与 Oy 轴平行的直线移动, 它的坐标有什么特点?

13. 已知点 $A(0, 0)$, $B(3, -4)$, $C(-3, 4)$, $D(-2, 2)$ 和 $E(10, -3)$, 试确定下列两点间的距离:

(1) A 和 B ; (2) B 和 C ; (3) A 和 C ;

(4) C 和 D ; (5) A 和 D ; (6) D 和 E .

14. 已知点 $A(3, 4)$, $B(-2, 4)$, $C(2, 2)$, 求 $\triangle AEC$ 的周长。
15. 已知四边形顶点为 $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(a, 0)$, $(0, -b)$, 求其周长。
16. 证明顶点为 $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(-1, 4)$ 的三角形是直角三角形。
17. 证明顶点为 $A(1, 4)$, $B(4, 1)$, $C(5, 5)$ 的三角形是等腰三角形。
18. 试问以 $M_1(1, 1)$, $M_2(0, 2)$ 和 $M_3(2, -1)$ 为顶点的三角形, 其中内角有无钝角?
19. 试证以 $M(-1, 3)$, $N(1, 2)$ 和 $P(0, 4)$ 为顶点的三角形, 其中内角都是锐角。
20. 在 Ox 轴上求与点 $(8, 4)$ 的距离为 5 的点。
21. 在 Oy 轴上求与点 $(-8, 13)$ 的距离为 17 的点。
22. 求点 $(5, 3)$ 到 Ox 轴, Oy 轴, 及到原点的距离。
23. 已知两点 $M(2, 2)$ 和 $N(5, -2)$, 试在横轴上求点 P , 使 $\angle MPN$ 成直角。
24. 过点 $A(4, 2)$ 作切于两坐标轴的圆周, 试确定它的中心 C 和半径 R 。
25. 过点 $M(1, -2)$ 作半径为 5 且切于 Ox 轴的圆周, 试确定这个圆周的圆心 C 。
26. 按定比 λ 分割 AB 线段, 求分点 C 之坐标, 已知
 - (1) $A(5, -1)$, $B(2, 4)$, $\lambda = 3$;
 - (2) $A(0, -2)$, $B(7, 5)$, $\lambda = -\frac{1}{2}$;
 - (3) $A(1, 5)$, $B(6, 3)$, $\lambda = -3$ 。
27. 求两点 $A(5, -5)$ 和 $B(-3, 1)$ 所定线段之中点。
28. 将两点 $A(1, -3)$ 和 $B(4, 3)$ 所连线段三等分, 求分点坐标。
29. 已知三角形的顶点为 $A(1, -3)$, $B(3, -5)$ 和 $C(-5, 7)$, 试确定它的各边的中点。
30. 已知两点 $A(3, -1)$ 和 $B(2, 1)$, 试确定:
 - (1) 关于点 A 与点 B 对称的点 M 的坐标;
 - (2) 关于点 B 与点 A 对称的点 N 的坐标。
31. 已知点 $M(2, -1)$, $N(-1, 4)$ 和 $P(-2, 2)$ 是三角形各边的中点, 试确定三角形的顶点。
32. 求 $\triangle ABC$ 的三中线长以及重心, 其中三角形的顶点为 $A(1, 2)$, $B(0, 5)$, $C(-2, 3)$ 。
33. 已知 A 、 B 、 C 、 D 四点依次构成平行四边形, 且其中三点为 $A(0, 0)$, $B(0, a)$, $C(b, c)$, 求点 D 的坐标。
34. 已知平行四边形相邻两个顶点 $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, 其中心 (对角线交点) 为 $M(b, c)$, 求它的另两个顶点。
35. 设以定比 λ 分割线段 AB 的分点是 C , 如果已知

(1) $A(1, 2)$, $C(3, 6)$, $\lambda=2$, 求点 B ;

(2) $C(-3, 8)$, $B(7, 2)$, $\lambda=-2$, 求点 A .

36. 已知三角形三顶点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 试证明它的三条中线相交于一点, 即三角形的重心, 并写出这点的坐标.

37. 在点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 处分别系有重量 m_1 、 m_2 、 m_3 , 试确定这质量组的重心坐标.

38. 在平面上有一组点 $A_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, \dots, k$, 在 A_i 处系有重量 m_i , 试求这质量组的重心坐标.

39. 已知三角形的重心与原点重合, 且一个顶点在横轴上到原点距离为 a , 第二个顶点在纵轴上到原点距离为 b , 求第三个顶点的坐标.

40. 计算顶点为 $(-2, 1)$, $(2, -2)$, $(8, 6)$ 的三角形面积.

41. 计算顶点为 $(-2, 0)$, $(0, -1)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$, $(-1, 3)$ 的五边形面积.

42. 试判断下列各三点是否共线:

(1) $(0, 5)$, $(2, 1)$, $(-1, 7)$;

(2) $(3, 1)$, $(-2, -9)$, $(8, 11)$;

(3) $(0, 2)$, $(-1, 5)$, $(3, 4)$.

43. 已知菱形的两个相邻顶点为 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$, 且它的对角线平行于坐标轴, 求另外两个顶点的坐标.

44. 已知正六边形的两个相邻顶点为 $A(2, 0)$ 与 $B(5, 3\sqrt{3})$, 求它的中心.

45. 已知菱形的两个相对顶点为 $A(8, -3)$ 与 $C(10, 11)$, 且它的边长是10, 求菱形的其余顶点的坐标.

46. 已知三角形顶点 $A(4, 1)$ 、 $B(7, 5)$ 、 $C(-4, 7)$, 求 $\angle A$ 的平分线与对边 BC 的交点之坐标.

47. 两个相似三角形有共同顶点 $A(-3, -6)$, 且在这点上有公共的角. 如果已知小三角形的顶点 $B(6.2, -3.6)$ 及 $C(5, 1)$, 且相似边的比等于 $5/2$, 求大三角形的其余二个顶点.

48. 求圆心在点 $C_1(2, 5)$ 和 $C_2(7\frac{1}{3}, 10\frac{1}{3})$, 而半径分别等于3和7的二圆的公切线的交点.

49. 已知梯形的三个顶点 $A(-1, -2)$, $B(1, 3)$, $C(9, 9)$, 且底边 $AD=15$, 求它的第四个顶点 D 的坐标.

50. 已知正 n 边形的顶点 $A_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$), 求证它的中心的坐标为
$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

51. 用坐标法证明梯形的中线平行于底边, 且长度为两底和的一半.

52. 试证明欧拉定理: 任意四边形 $ABCD$, K 、 L 分别为对角线 AC 、 BD 的中点, 则下式成立

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 - |AC|^2 - |BD|^2 = 4|KL|^2.$$

53. 在52题中, 试证明 KL 的中点为四边形的重心。

§ 1.1.2 仿射坐标系

1. 在 $\omega=150^\circ$ 的斜角坐标系中, 已知 $A(6, 4)$, 求它到坐标原点的距离。
2. 在上题中, 求点 A 到两坐标轴的距离。
3. 在坐标角 $\omega=\pi/6$ 的斜角坐标系中, 已知点 A 到 Ox 轴与 Oy 轴的距离分别为 1 与 1.5, 求点 A 的坐标。
4. 在 $g_{11}=4, g_{22}=25, g_{12}=8$ 的仿射坐标系中求矢量 a 的长度:
(1) $a=(7, -8)$; (2) $b=(56, -10)$ 。
5. 已知 $|e_1|=2, |e_2|=3, \omega=\pi/3$, 试写出 g_{11}, g_{22}, g_{12} 及两点 $A(1, -2)$ 与 $B(-3, 4)$ 之间的距离。
6. 在 $|e_1|=2, |e_2|=\sqrt{3}, \omega=\frac{5}{6}\pi$ 的仿射坐标系中, 求矢量 $a=(1, 2), b=(2, 2)$ 的长度及它们之间的夹角。
7. 在 $\omega=\frac{\pi}{3}$ 的斜角坐标系中, 求关于 Ox 轴与点 $A(-3, -5)$ 对称的点之坐标。
8. 如果选取边长为 1 的正六边形的两条相邻边为坐标轴作斜角坐标系, 且正六边形都在第一象限中, 试写出它的各顶点坐标。
9. 在 $\omega=\frac{\pi}{3}$ 的斜角坐标系中, 已知三角形三顶点为 $A(0, 0), B(7, 4), C(-1, 6)$, 求过点 A 的中线长。
10. 在 $\omega=\frac{2}{3}\pi$ 的斜角坐标系中, 计算以 $A(14, 3), B(9, -2), C(4, 1)$ 为顶点的三角形边长。
11. 在 $\cos \omega=-\frac{3}{5}$ 的斜角坐标系中, 已知正三角形的两个顶点为 $A(2, -2), B(7, 1)$, 求它的第三个顶点。
12. 如果已知两点 $A(10, -4)$ 与 $B(7, -1)$ 的距离为 3, 求斜角坐标系的坐标角 ω 。
13. 连结两点 $A(-1, 4)$ 与 $B(2, 7)$ 的线段与 Ox 轴之间的夹角为多少? 若已知斜角坐标系的 $\omega=\frac{\pi}{3}$ 。

§ 1.1.3 极坐标系

1. 在给定的极坐标系中画出下列各点: $A\left(4, \frac{3}{2}\pi\right), B\left(5, -\frac{3}{4}\pi\right), C\left(6, -\frac{4}{3}\pi\right), D\left(6, \frac{7}{3}\pi\right), E\left(-5, \frac{\pi}{3}\right), F\left(\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$
2. 试确定下列各点关于极轴对称的点的极坐标:
 $M_1\left(3, \frac{\pi}{4}\right), M_2\left(2, -\frac{\pi}{2}\right), M_3\left(3, -\frac{\pi}{3}\right), M_4(1, 2), M_5(5, -1),$

3. 试确定下列各点关于极点对称的点的极坐标:

$$M_1\left(1, \frac{\pi}{4}\right), M_2\left(5, \frac{\pi}{2}\right), M_3\left(2, -\frac{\pi}{3}\right), M_4\left(4, \frac{5}{6}\pi\right), M_5(3, -2).$$

4. 试确定下列各点关于过极点与极轴垂直的直线对称的点的极坐标:

$$M_1\left(3, \frac{\pi}{4}\right), M_2\left(5, -\frac{\pi}{3}\right), M_3(1, 2), M_4\left(4, -\frac{\pi}{2}\right), M_5\left(2, -\frac{\pi}{4}\right).$$

5. 试按下列两种方法证明用极坐标表示的两点间距离公式(24):

(1) 利用直角坐标系中两点间距离公式(1)以及同一点的直角坐标与极坐标的变换公式(22)来证;

(2) 对于三角形 OP_1P_2 (其中 O 为极点), 利用余弦定理来证.

6. 试求下列两点之间的距离:

$$(1) P_1\left(2, \frac{\pi}{3}\right), P_2\left(4, \frac{2}{3}\pi\right);$$

$$(2) P_1\left(5, \frac{\pi}{4}\right), P_2\left(8, -\frac{\pi}{12}\right).$$

7. 试证明 $\triangle OP_1P_2$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2 - \theta_1) \text{ 的绝对值,}$$

中点 $P_1(\rho_1, \theta_1)$, $P_2(\rho_2, \theta_2)$, O 为极点。

8. 已知 $\triangle OAB$ 的两顶点 $A\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(4, \frac{\pi}{12}\right)$, O 为极点, 求它的面积。

9. 若极坐标系的极点与直角坐标系的原点重合, 而极轴与横轴的正半轴重合。已知下列各点的极坐标: $M_1\left(6, \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(5, 0)$, $M_3\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$,

$M_5\left(8, \frac{2}{3}\pi\right)$, $M_6\left(12, -\frac{\pi}{6}\right)$, 试确定这些点的直角坐标。

10. 若极坐标系的极点与直角坐标系的原点重合, 而极轴与横轴的正半轴重合。已知下列各点的直角坐标: $M_1(0, 5)$, $M_2(-3, 0)$, $M_3(\sqrt{3}, 1)$, $M_4(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $M_5(1, -\sqrt{3})$, 试确定这些点的极坐标。

11. 如果将极轴的正向变为负向, 试确定下列各点在新坐标系的极坐标:

$$A\left(3, \frac{\pi}{2}\right), B\left(2, -\frac{\pi}{4}\right), C(1, \pi), D\left(5, -\frac{3}{4}\pi\right), \\ E(3, 2), F(2, -1).$$

12. 已知下列各点的极坐标:

$$M_1\left(3, \frac{\pi}{3}\right), M_2\left(1, \frac{2}{3}\pi\right), M_3(2, 0),$$