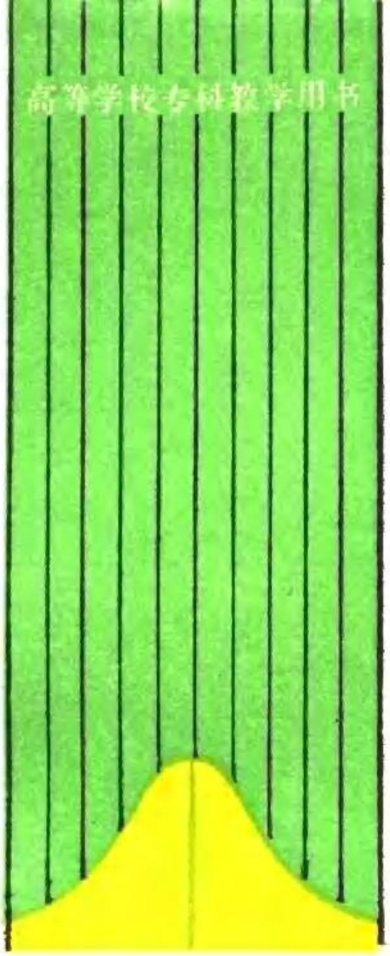

高等学校专科教学用书

盛骤 谢式千 编

线性代数与数理统计

高等学校专科教学用书

线性代数与数理统计

盛骤　谢式千　编

浙江大学出版社

内 容 简 介

本书是针对大学专科的教学要求而编写的，是高等数学后继的数学课程教材。

全书分两部分共七章。前两章为线性代数部分，有矩阵及线性方程组；矩阵的特征值及二次型。后五章为数理统计部分，有概率论的基本知识；随机变量的分布与数字特征；参数估计；假设检验；线性回归和方差分析。

本书深入浅出，有较多的例题，便于自学。每章有一定数量的习题，书末附有习题答案。

本书可作为大学专科、成人高校的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

线性代数与数理统计

盛 聚 谢式千 编

责任编辑 贾吉柱

* * *

浙江大学出版社出版
上虞汤浦印刷厂排版
余杭三墩印刷厂印刷
浙江省新华书店发行

* * *

850×1168 32开本 10.625印张 257千字
1988年6月第1版 1988年6月第1次印刷
印数：0001—8000
ISBN7-308-00050-8
O·011[课] 定价：2.10元

前　言

本书是针对大学专科的教学要求编写的。全书分两部分。线性代数部分内容有矩阵及其运算、分块矩阵、线性方程组、矩阵的特征值及二次型；数理统计部分内容有概率论的基本知识、随机变量的分布与数字特征、参数估计、假设检验、线性回归分析及单因素方差分析。取材适当，便于教学。每章配有习题，书末附有答案。

本书可作为大学专科、成人高校的线性代数与(或)数理统计课程的教材。使用者也可视学时及教学要求的不同删去其中的某些内容。例如，线性回归分析、方差分析两者内容相对独立，使用者可按要求选用。

书中插图由张礼明同志绘制。

本书承国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会委员周茂清教授审阅，对此，我们表示衷心的感谢。

对于书中的不足之处，恳切地希望读者提出宝贵的意见。

盛　聚　　谢式千

1988 年 2 月

目　　录

线性代数部分

第一章　矩阵与线性方程组

§1　矩阵及其运算

（一）矩阵的定义　矩阵产生于线性方程组的求解问题。我们知道，二元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

它的系数行列式为

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

若 $\Delta\neq0$，则此方程组有唯一的一组解。若 $\Delta=0$，则在

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

时，此方程组是矛盾方程组，无解。而在

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{b_1}{b_2}$$

时，此方程组有无限多组解。

讨论表明，上述线性方程组解的情况与系数 a_{ij} 及常数项 $b_i(i,j=1,2)$ 有关，即与数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$

的结构有关．这就启发我们，对于一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

其中方程个数 m 不必等于未知数个数 n，它的解的情况可归结于对下列数表结构的研究：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

于是产生了一个新的数学工具：矩阵．它的定义如下．

定义 由 mn 个数 a_{ij}，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$ 排成的长方表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

称为**矩阵**。其中的数 a_{ij} 称为矩阵的**元素**．横排称为**行**，竖排称为**列**．具有 m 个行与 n 个列的矩阵称为 **m 行 n 列矩阵**，或 **$m\times n$ 矩阵**．当 $m=n$ 时，称为 **n 阶方阵**或 **n 阶矩阵**。

通常我们用大写字母 $A, B, \cdots$ 等表示矩阵，在需要指出一个矩阵的行数及（或）列数时，则用 $A_{m\times n}$ 等表示一个 $m\times n$ 矩阵．我们也用 (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{m\times n}$ 等表示一个 $m\times n$ 矩阵，其中的 a_{ij} 表示该矩阵的一般元素．

例 1 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $(2,3,1)$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$分别是$2\times3$, 3×3, 1×3 及 2×1 矩阵。

只有一个行与一个列的矩阵$(a)_{1\times1}$,约定它就是数 a:

$$(a)_{1\times1}=a$$

若(a_{ij}), (b_{ij})都是 $m\times n$ 矩阵,则称它们是**同型的**。

定义 二同型矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$, $(b_{ij})_{m\times n}$, 当且仅当它们所有对应位置的元素分别相等时,即当且仅当 mn 个等式

$$a_{ij}=b_{ij}, i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n$$

成立时,称这两个矩阵是**相等**的,并记作

$$(a_{ij})=(b_{ij})$$

定义(转置矩阵) 将$m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 的行列互换,得到的$n\times m$ 矩阵,称为 A 的**转置矩阵**,记作 A' 或 A^T。即若 A 具有(1.3)的形式,则

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

显然

$$(A')'=A$$

下面介绍一些常见的矩阵。

n 维列向量 $n\times1$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

常称为 **n 维列向量**或 **n 元列**,其中第 i 行的元素又称为该向量

的第 i 个**分量**。我们常用小写粗体字如 $\mathbf{v}$ 等表示一个 n 维列向量。n 维列向量又常被简称为 **n 维向量**或**向量**①。

若用 $\mathbf{v}$ 表示(1.5)的 n 维列向量,即

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

我们又常使用转置矩阵,写成

$$\mathbf{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)'$$

以节省篇幅。n 维列向量的转置,又称为**行向量**. 本书下面叙述中不用行向量一词。

零矩阵 若 $m\times n$ 矩阵中的元素都等于零,则称它为 **$m\times n$ 零矩阵**,记作 $0_{m\times n}$。特别,在行数、列数能自明时,简记为 0,简称为**零矩阵**. $0_{n\times 1}$ 又称为**零向量**,用通常的零(即 0)来表示它。

实对称矩阵 设方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中的元素都是实数,并且

$$A'=A$$

则称 A 为**实对称矩阵**。

易见,实对称矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 中的元素,关于 $a_{11},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线(称为**主对角线**)是对称的,即

$$a_{ij}=a_{ji},\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n$$

例如,$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 分别是 2 阶和 3 阶实对称矩阵。

---

① 若把 $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ 看成普通空间向量 $v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 为相互垂直的单位向量)的一种表示法,则 n 维列向量就是普通空间向量的推广。

三角矩阵 若 $A_{n\times n}$ 的主对角线下方的元素都等于零,就称 A 为**上三角矩阵**。若 $A_{n\times n}$ 的主对角线上方的元素都等于零,就称 A 为**下三角矩阵**。

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 分别是3阶上三角矩阵和3阶下三角矩阵。

对角矩阵 在 $A_{n\times n}$ 中,若不在主对角线上的元素都等于零,则称 A 为**对角矩阵**。

例如, 3阶矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 都是对角矩阵,一般,n 阶对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

常简记作

$$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

例如,上述两个3阶对角矩阵,可分别记作 diag $(-2, 2, 1)$和 diag$(3,2,0)$。

单位矩阵 主对角线元素都是1的 n 阶对角矩阵diag$(1,1,\cdots,1)$,称为**n 阶单位矩阵**,记作 I_n,或简记作 I。

另外,我们还会遇到矩阵的行列式。其定义如下。设有方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$。由此方阵的元素,且不改变相互位置构成的(n 阶)行列式,称为矩阵 A 的**行列式**,记作 det A 或$|A|$。例如,设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 10 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad 则 \det A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 10 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

读者都知道，2阶及3阶行列式都可用对角线法则来计算它们的值。对于阶数 $n\geqslant 4$ 的 n 阶行列式，对角线法则已不再适用，需要用一般的计算公式（对角线法则是该公式在 $n=2,3$ 时的一种表达方式）。为便于读者掌握高阶($n\geqslant 4$)行列式的计算方法，下面，我们来介绍行列式的计算公式。

n 阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的计算公式是

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \tag{1.6}$$

i 为 $1,\cdots,n$ 中的任一值，此式称为按行展开公式；或

$$\Delta=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \tag{1.7}$$

j 为 $1,\cdots,n$ 中的任一值，此式称为按列展开公式。公式中的 A_{ij} 是行列式 Δ 中划去第 i 行及第 j 列的全部元素后，由余下的 $(n-1)^2$ 个元素，不改变相互位置所构成的 $(n-1)$ 阶行列式（所谓 Δ 的一个子行列式）乘以 $(-1)^{i+j}$。A_{ij} 称为 a_{ij}（或称 (i,j)）的**代数余子式**。由于2阶，3阶行列式的计算我们都很熟悉，从而，按(1.6)或(1.7)的递推关系可知，原则上任何一个 n 阶行列式的值均可算出（实际计算时还需根据行列式的具体形式，采用适当的有效计算方法，具体可参看有关计算方法的书籍）。又，众所周知的有关3阶行列式的一切性质，对于 n 阶行列式都成立，对此，我们不再逐一罗列与证明。此处仅写出关于代数余子式的一个性质：一行(列)元素与其它行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j \tag{1.8}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\ i\neq j \tag{1.9}$$

下面，我们介绍矩阵的代数运算。这些运算使矩阵获得广泛的

应用。

（二）数乘矩阵，矩阵的加（减）法

定义 设 α 为一数，$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为一矩阵，则称 $m\times n$ 矩阵 (αa_{ij}) 为数 α 与矩阵 $A=(a_{ij})$ 的乘积，记作 αA 或 $A\alpha$，即

$$\alpha A=\alpha(a_{ij})_{m\times n}=(\alpha a_{ij})_{m\times n}$$

定义 设 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，则称矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 与 B 的和，记作 $A+B$，即

$$A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

对于一个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，易知恒存在矩阵 $B=(-a_{ij})_{m\times n}$，使 $A+B=0$，我们称 B 为 A 的**负矩阵**，记作 $-A$，即

$$-A=-(a_{ij})=(-a_{ij})$$

有了负矩阵后，我们就把 A 与 $-B$ 之和，称为矩阵 A 与 B 之差，记作 $A-B$，即

$$A-B=A+(-B)$$

注意 矩阵的和、差运算只能在同型矩阵中进行。

例 2 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$。求 $4A$，$-A$，$A+B$，$B+A$ 及 $A-B$。

解 $4A=\begin{pmatrix} 4\cdot 2 & 4\cdot 1 & 4\cdot 4 \\ 4\cdot(-3) & 4\cdot 0 & 4\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 16 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$-A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+3 & 1+(-5) & 4+1 \\ -3+2 & 0+(-1) & 2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B+A=\begin{pmatrix} 3+2 & -5+1 & 1+4 \\ 2+(-3) & -1+0 & 3+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=A+B$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 2-3 & 1-(-5) & 4-1 \\ -3-2 & 0-(-1) & 2-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

零矩阵在矩阵加法中起着数 0 在数的加法中的作用，即

$$A_{m\times n}+0_{m\times n}=A_{m\times n},\quad A_{m\times n}-A_{m\times n}=0_{m\times n}$$

若用 α、β 表示数，A,B,C 表示同型的矩阵．容易验证，以下性质成立：

$$A+B=B+A \qquad (交换律)$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C \qquad (结合律)$$

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B \qquad (分配律)$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A \qquad (分配律)$$

$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A \qquad (结合律)$$

$$(\alpha A)'=\alpha A'$$

$$(A+B)'=A'+B'$$

根据结合律，遇到三个或三个以上矩阵相加时，可以不加括弧，即

$$A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C$$

例 3　设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$，求 $k\boldsymbol{a}$（k 为常数）及 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

解　因 n 维列向量就是 $n\times 1$ 矩阵，从而，按数乘矩阵及矩阵加法定义，有

$$k\boldsymbol{a}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)'$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)'$$

在 $n=3$ 时（参见 n 维列向量的脚注），上述结果就是通常空间向量关于数乘及加法两种运算的坐标表达式．因此，这里所定义的矩阵的两种运算，是通常向量的相应运算的推广．

（三）矩阵与矩阵的乘积

定义　设 $A=(a_{ij})_{m\times p}$，$B=(b_{jk})_{p\times n}$，则称矩阵 $C=(c_{ik})_{m\times n}$ 为矩阵 A,B 的乘积，并记作 $C=AB$，其中

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{ip}b_{pk}=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}b_{jk}$$

$$i=1,\cdots,m;\ k=1,\cdots,n \tag{1.10}$$

也就是说

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{p}a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{p}a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{p}a_{1j}b_{jn} \\ \sum\limits_{j=1}^{p}a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{p}a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{p}a_{2j}b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p}a_{mj}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{p}a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{p}a_{mj}b_{jn} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

注意，只有在 A 的列数等于 B 的行数时，AB 才有意义。乘积 AB 的运算，称为用 A 左乘 B，或称用 B 右乘 A。

例 4 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$。

求 $AB, BA, BC, B'B, (AB)C$ 及 $A(BC)$。

解

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 3+1\cdot(-1)+5\cdot 2 & 2\cdot 4+1\cdot 2+5\cdot 1 \\ 1\cdot 3+3\cdot(-1)+2\cdot 2 & 1\cdot 4+3\cdot 2+2\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}3&4\\-1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&5\\1&3&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot2+4\cdot1&3\cdot1+4\cdot3&3\cdot5+4\cdot2\\-1\cdot2+2\cdot1&-1\cdot1+2\cdot3&-1\cdot5+2\cdot2\\2\cdot2+1\cdot1&2\cdot1+1\cdot3&2\cdot5+1\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10&15&23\\0&5&-1\\5&5&12\end{pmatrix}$$

(注意 AB 不等于 BA)

$$BC=\begin{pmatrix}3&4\\-1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot1+4\cdot(-1)&3\cdot3+4\cdot(-1)\\-1\cdot1+2\cdot(-1)&-1\cdot3+2\cdot(-1)\\2\cdot1+1\cdot(-1)&2\cdot3+1\cdot(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&5\\-3&-5\\1&5\end{pmatrix}$$

$$B'B=\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\-1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot3+(-1)\cdot(-1)+2\cdot2&3\cdot4+(-1)\cdot2+2\cdot1\\4\cdot3+2\cdot(-1)+1\cdot2&4\cdot4+2\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}14&12\\12&21\end{pmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{pmatrix}15&15\\4&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-1&-1\end{pmatrix}$$