高等数学基本教程

2 常用函数

[法] J. 奎奈 著

唐兆亮 郭书春 译

高等教育出版社

〔法〕 J. 奎奈 著

高等数学基本教程

2 常用函数

唐兆亮 郭书春 译

高等教育出版社

本书是根据法国 Dunod 1976 年出版的 J. Quinet 著 Cours élémentaire de mathématiques supérieures 2—Fonctions usuelles 一书翻译而成的. 原书是法国高等工业学校的教材，可以供我国工科高等学校(包括大专)，特别是电类专业的师生与工程技术人员参考.

［法］J. 奎奈著

高等数学基本教程

2 常用函数

唐兆亮 郭书春 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9 字数215 000

1988 年10月第 1 版 1988 年10月第 1 次印刷

印数 00 001— 2 330

ISBN 7-04-001930-2/0·689

定价 2.85 元

目　　录

第一章　数值函数 …………………………………………… 1

1.1　定义 …………………………………………… 1

1.2　函数在一点的极限 …………………………………………… 2

1.3　在一点上连续的函数 …………………………………………… 4

1.4　在一个区间上的连续性 …………………………………………… 6

1.5　函数的递增 …………………………………………… 7

1.6　严格单调函数的反函数 …………………………………………… 11

1.7　m次幂函数，m是非零的自然数 …………………………………………… 13

1.8　m次根函数，m是非零的自然数 …………………………………………… 14

1.9　反三角函数 …………………………………………… 16

1.10　复值函数 …………………………………………… 20

练习 …………………………………………… 21

第二章　导数 …………………………………………… 24

2.1　引言 …………………………………………… 24

2.2　计算导数的预备知识 …………………………………………… 24

2.3　函数的导数定义 …………………………………………… 25

2.4　导数概念的重要性 …………………………………………… 26

2.5　计算导数的一般方法 …………………………………………… 26

2.6　函数的导函数 …………………………………………… 27

2.7　三角函数的导数 …………………………………………… 28

2.8　可导函数的性质 …………………………………………… 31

2.9　导数计算的一些例子 …………………………………………… 38

2.10　导数的几何解释 …………………………………………… 40

2.11　在一点的切线方程 …………………………………………… 43

2.12　导数概念的扩展 …………………………………………… 45

2.13　复值函数的导数 …………………………………………… 46

2.14　高阶导数 …………………………………………… 46

2.15 n 次可导函数的性质……48
练习……50
第三章 微分……54
3.1 可微函数……54
3.2 函数的微分……55
3.3 和、积、商的微分……57
3.4 复合函数的微分……57
3.5 导数的微分记号……58
3.6 微分计算的一些例子……59
3.7 物理中的微分记号……60
3.8 微分在数值计算中的应用……61
3.9 微分在研究灵敏度中的应用……63
练习……65
第四章 导数在研究函数变化中的应用……69
4.1 极大值和极小值……69
4.2 罗尔定理……71
4.3 有限增量公式……72
4.4 在函数变化方向中的应用……73
4.5 例……76
4.6 泰勒-拉格朗日公式……79
4.7 泰勒-拉格朗日公式在数值计算中的应用……81
4.8 泰勒-拉格朗日公式在拐点研究中的应用……83
练习……87
第五章 在实际应用中求极大值和极小值……89
5.1 盒子问题……89
5.2 有柄平底锅问题……90
5.3 罐头盒问题……91
5.4 光的反射问题(笛卡儿)……92
5.5 光的折射问题(笛卡儿)……94
5.6 船舶问题……96
5.7 塑像问题……97

5.8 公共汽车问题……………………………………………………………98
5.9 变压器问题………………………………………………………………99
5.10 抛射物问题……………………………………………………………101
5.11 电谐振问题……………………………………………………………103
5.12 磁感应问题……………………………………………………………105
5.13 最大电功率问题………………………………………………………106
5.14 电池的最佳组合问题…………………………………………………107
5.15 惠斯登电桥问题………………………………………………………108
5.16 变压器效率问题………………………………………………………110
5.17 用一个电阻分流的电容器问题………………………………………112
5.18 电话线问题……………………………………………………………114

第六章 函数变化的实际研究 ……………………………………………116

6.1 所遵循的步骤 …………………………………………………………116
6.2 二次三项式 ……………………………………………………………118
6.3 双二次函数 ……………………………………………………………120
6.4 单应函数 ………………………………………………………………122
6.5 十五个例子 ……………………………………………………………124
练习……………………………………………………………………………146

第七章 积分 ………………………………………………………………148
7.1 原函数 …………………………………………………………………148
7.2 积分概念 ………………………………………………………………149
7.3 可积函数的定义 ………………………………………………………152
7.4 函数的平均值 …………………………………………………………154
7.5 可积函数的存在性 ……………………………………………………154
7.6 积分区间的变换 ………………………………………………………155
7.7 可积函数的性质 ………………………………………………………156
7.8 积分与原函数 …………………………………………………………160
7.9 积分计算的例子 ………………………………………………………163
7.10 积分限的积分函数……………………………………………………164
7.11 原函数的积分记号……………………………………………………165
7.12 换元积分法……………………………………………………………166

7.13 对称性和周期性的应用……168
7.14 分部积分……171
7.15 复值函数的原函数……172
7.16 复值函数的积分……173
7.17 电流的均值……173
7.18 电流的有效值……175
7.19 交流电产生的功率……176
7.20 为拉长弹簧所做功的计算……177
7.21 电容器放电所产生能的计算……178
7.22 为分离电容器的两极板所做功的计算……178
7.23 排完容器中的水所需时间的计算……179
7.24 在垂直平面上的水的压力的计算……181
7.25 垂直杆的长度减少的计算……182
练习……183

第八章 对数函数和指数函数……185

8.1 引言……185
8.2 对数函数的定义……185
8.3 对数函数的性质……187
8.4 自然对数……188
8.5 以 a 为底的对数……190
8.6 对数的导数……192
8.7 对数的微分……194
8.8 指数函数……194
8.9 以 a 为底的指数函数……196
8.10 关于指数函数的练习……198
8.11 对数函数和指数函数导数的练习……200
8.12 幂函数……202
8.13 指数的不定型……204
8.14 例……205
8.15 关于数 e 的几个补充评注……207
8.16 出现幂函数的函数的例子……209

8.17 双曲函数的定义……213
8.18 双曲函数的导数……215
8.19 双曲函数的变化……216
8.20 双曲三角学……218
8.21 反双曲函数……219
8.22 双曲函数的几何解释……222
练习……222
练习解答……225
第一章……225
第二章……232
第三章……242
第四章……249
第六章……253
第七章……263
第八章……267
常用导数……277

第一章　数 值 函 数

1.1　定义

在第一卷中我们遇到过映射的基本概念.我们记得,从集合E到集合F中的映射f,使E的每个元素x对应于F的一个且只一个元素y,记为$f(x)$,常表示为

$$f:\quad x\longmapsto f(x).$$

在分析中,我们主要使用一个变量的数值函数,亦即,在实数域$\boldsymbol{R}$的一个子集(这个子集可以等于整个$\boldsymbol{R}$)上定义,在$\boldsymbol{R}$中取值的映射.

(更一般地,我们会遇到几个变量的数值函数,定义域是$\boldsymbol{R}^p$的子集,其中p是非零自然整数.我们也会遇到复值函数,这时终结的集合是复数域$\boldsymbol{C}$.)

例　读者已经熟悉下列函数:

线性函数　$x\longmapsto ax$,其中$a\in\boldsymbol{R}$;

仿射函数　$x\longmapsto ax+b$,其中$a,b\in\boldsymbol{R}$;

二次三项式函数　$x\longmapsto ax^2+bx+c$,其中$a,b,c\in\boldsymbol{R}$;

正弦函数　$x\longmapsto \sin x$.

一个电灯泡所消耗的电能W,依赖于照明的时间t,并用一个线性函数表示:

$$W=RI^2t.$$

交流电的电流强度I是时间t的正弦函数:

$$I=I_0\sin\omega t.$$

定义域　研究函数的第一步,是确定定义域;一般地,定义域

是$\boldsymbol{R}$的一个区间，或有限个区间集合的并集.

例如，函数 $x \longmapsto \sin x$ 定义在整个$\boldsymbol{R}$上.

函数 $x \longmapsto \sqrt{4-x^2}$ 定义在有界闭区间$[-2,2]$上.

函数 $x \longmapsto 1/(\sqrt{x^2-4})$ 定义在区间$]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$上.

函数 $x \longmapsto \sqrt{-x^2-1}$ 的定义域是空集.

1.2 函数在一点的极限

在第一卷我们已经遇到过序列的极限的概念. 函数在一点的极限概念和上述概念十分相似，是分析的基本概念.

我们考虑在$\boldsymbol{R}$的子集P上定义的函数f和实数x_0. 假定x_0属于P，或者，更一般地，x_0是包含在P中的一个开区间的端点. 从直观上，说$f(x)$当x趋向x_0时以实数l为极限，是指当x的值越来越逼近于x_0的值时，可使$f(x)$的值愈来愈逼近l的值，想要多近，就多近.

更严格地，这可表示成下列方式：对大于零的任意实数ε，存在一个大于零的实数η，使得关系

$$x \in [x_0-\eta, x_0+\eta] \cap (P-\{x_0\})$$

蕴涵关系

$$f(x) \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon];$$

简单地记成$|x-x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$，当然，$x$属于定义域$P$，但不等于$x_0$.

(要注意，如果对于“小”的ε值，存在一个这样的数η，那么，这个数η对于“大”的ε值仍然合适. 这就是为什么人们往往明确地指出数ε是任意小，而不简单地说ε是任意的！)

我们来证明下述重要结论：这样的数l（如果它存在）是唯一的.

事实上，假定存在一个与 l 不同的数 l'，满足上述性质，那么，$l'-l$ 不等于零，而且我们可以取一个小于 $|l'-l|/2$ 的正实数作为 ε，那么，存在一个实数 $\eta>0$，使得对于 $[x_0-\eta, x_0+\eta]\cap P$ 中与 x_0 不同的任意点 x，有

$$|f(x)-l|<|l'-l|/2, \tag{1}$$

并且存在一个实数 $\eta'>0$，使得对于与 x_0 不同的

$$[x_0-\eta', x_0+\eta']\cap P$$

中的任意点 x，有

$$|f(x)-l'|<|l'-l|/2. \tag{1'}$$

令 $\eta_1=\inf(\eta,\eta')$，那么，对于 $[x_0-\eta_1, x_0+\eta_1]\cap P$ 中与 x_0 不同的任意点 x，不等式(1)和(1′)成立．由三角形不等式推出矛盾关系

$$|l'-l|<\frac{|l'-l|}{2}+\frac{|l'-l|}{2}=|l'-l|.$$

实数 l 称为当 x 趋向 x_0 时 $f(x)$ 的极限，或者也称为 f 在点 x_0 的极限．把它记成

$$l=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

下面是关于有极限的函数的一些主要结果：

设 f 和 g 是分别定义在 $\mathbf{R}$ 的子集 P 和 Q 上的两个函数．假定 $f(P)$ 包含在 Q 中，这就使我们能定义复合函数 $f\circ g$（我们记得，这是一个将 P 的任一元素 x 与数 $g[f(x)]$ 对应起来的函数）．*如果 f 在点 x_0 有极限 l，且 g 在点 l 有极限 m，那么，$g\circ f$ 在点 x_0 有极限 m.*

设 f 和 g 是定义在子集 P 上的两个函数，它们在点 x_0 分别有极限 l 和 m，那么，$f+g$ 有极限 $l+m$，fg 有极限 lm.

（由此得到，在 P 上定义的并在点 x_0 有极限的函数集合，是在 P 上定义的函数的代数的一个单式子代数．此外，把任一函数 f

与它在点 x_0 的限极对应起来的映射是一个代数同态)：

最后，如果函数 g 在 P 上不为零，并且如果 $m\neq 0$，那么，f/g 的极限是 l/m.

这些直观的结果是很重要的，而它们的证明也是精致的. 例如我们证明 $f+g$ 的极限是 $l+m$. 事实上，我们考虑一个正实数 ε. 因为 f 的极限是 l，那么，存在一个正实数 η_1，使得 $|x-x_0|\leqslant\eta_1$ 时，有 $|f(x)-l|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 同样，因为 g 的限极是 m，那么，存在一个正实数 η_2，使得 $|x-x_0|\leqslant\eta_2$ 时，有 $|g(x)-m|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $\eta=$ nf(η_1,η_2)，由于数 η 是两个正实数 η_1 和 η_2 中最小的，所以它也 i为正. 对于$[x_0-\eta, x_0+\eta]$的任一元素 x，有

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)-(l+m)|&\leqslant|f(x)-l|+|g(x)-m|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $f+g$ 的极限是 $l+m$.

(这个结果是双重的：它既证明了两个函数的和有极限，又证明了这个极限就是两个极限的和.)

1.3 在一点上连续的函数

下面是与极限概念紧密相连的一个概念：

我们考虑在 $\mathbf{R}$ 的子集 P 上定义的函数 f. 说 f 在点 x_0 处是连续的，如果

a) 函数 f 在这点有定义，亦即 $x_0\in P$.

b) 函数 f 在点 x_0 有极限 $f(x_0)$：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

从上面关于函数有极限的结果，可以很容易地推及函数在一点连续的特殊情况.

假定 f 和 g 是在子集 P 和 Q 上定义的两个函数. 假设 $f(P)$ 包含在 Q 中, f 在 P 的点 x_0 处连续而 g 在点 $f(x_0)$ 处连续, 那么, 复合函数 $g\circ f$ 在点 x_0 处连续.

假定 f 和 g 是在子集 P 上定义并且在 P 的一点 x_0 处连续的两个函数, 那么, $f+g$ 和 fg 在点 x_0 处连续. 如果 g 不为零, 那么, f/g 在点 x_0 处连续.

例

1. 证明在 $[-1,+\infty[$ 上由关系

$$f(x)=\sqrt{x+1}$$

定义的函数 f 在 $x_0=3$ 处连续. 既然

$$f(x_0)=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2,$$

而

$$|f(x)-2|=|\sqrt{x+1}-2|=\frac{|x-3|}{\sqrt{x+1}+2}\leqslant\frac{|x-3|}{2}.$$

所以, 对于 $|x-3|\leqslant 2\varepsilon$, 不等式 $|f(x)-2|\leqslant\varepsilon$ 成立. 因此, 只要取 $\eta=2\varepsilon$ 就够了. 于是, 为了得到 $|f(x)-2|\leqslant 0.01$, 只要取 $|x-3|\leqslant 0.02$ 就够了, 亦即 x 在区间 $[2.98, 3.02]$ 中.

2. 在 $\mathbf{R}$ 上由

$$f(x)=\frac{|x|}{x}, \text{如果 } x\neq 0,$$

$$f(0)=0$$

定义的函数 f 在点 0 处不连续. 事实上, 对于 $x>0$, $f(x)=1$, 而对于 $x<0$, $f(x)=-1$. 因此, 当 x 由正值趋向零时, $f(x)$ 的极限是 1, 而当 x 由负值趋向零时, $f(x)$ 的极限是 -1. 函数 f 在点 0 处没有极限, 因此, 在这一点不可能是连续的.

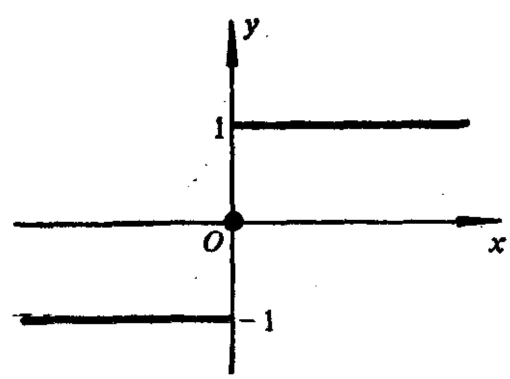

图 1.1

我们称这个函数 f 呈现间断性. 这在函数 f 的图形上用"跳

跃"表示出来(图 1.1).

电学上在含有一个断路开关的电路中，会遇到这样的函数(忽略断路感应电流的情况).

1.4 在一个区间上的连续性

在实际中遇到的函数大多数没有间断性.

所谓定义在 $\boldsymbol{R}$ 的子集 P 上的一个函数 f 在 P 上是连续的，是指它在 P 的每一点都是连续的.

例

任何仿射函数在 $\boldsymbol{R}$ 上都是连续的. 特别，常数函数和线性函数在 $\boldsymbol{R}$ 上都是连续的.

正弦函数在 $\boldsymbol{R}$ 上是连续的.

在一点上连续的函数的一些结果，无疑可以应用于在每一点上连续的函数:

设 f 和 g 是在子集 P 和 Q 上定义的两个函数. 假定 $f(P)$ 包含在 Q 中，f 在 P 上连续，g 在 Q 上连续，那么，$f\circ g$ 在 P 上连续.

设 f 和 g 是在子集 P 上定义而且连续的两个函数，那么，$f+g$ 和 fg 在 P 上都是连续的. 如果 g 不为零，那么，f/g 在 P 上连续.

(按习惯，可以用代数方法表示所考虑的函数集合的性质: 在 P 上的连续函数集合，是在 P 上定义的函数的代数的单式子代数.)

对自然整数 m 用数学归纳法，可以证明在 P 上的 m 个连续函数的积仍然是 P 上的连续函数. 特别，m 次幂函数，亦即函数 $x\longmapsto x^m$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上是连续的. 实际上，这是 m 个等于恒等映射 $x\longmapsto x$ 的函数的积.

关于在 $\boldsymbol{R}$ 的一个区间上的连续函数的研究，导致我们将引入两个基本定理:

介值定理 设 f 是在 $\boldsymbol{R}$ 的区间 I 上连续的数值函数，那么，

区间 I 在 f 下的象 $f(I)$ 还是 $\boldsymbol{R}$ 的区间.

根据区间的定义，这等价于下面的说法：

设 c 和 d 是区间 I 的任意两点，而 k 是闭区间 $[f(c), f(d)]$ 的

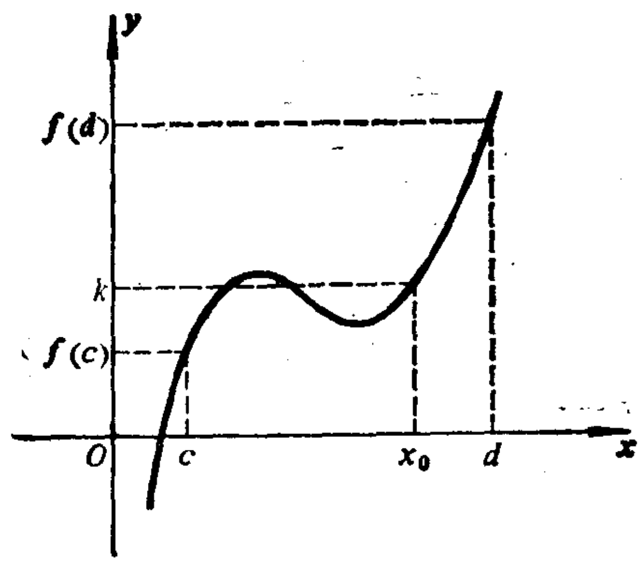

图 1.2

一点(图 1.2)，那么，在区间 $[c,d]$ 上存在一点 x_0，使得

$$f(x_0)=k.$$

有界闭区间的连续象 设 f 是在 $\boldsymbol{R}$ 的区间 I 上连续的数值函数. 如果 I 是有界闭区间，那么 I 在 f 下的象仍然是有界闭区间.

因为 f 的象是有界的，所以它有一个下界 m 和一个上界 M；此外，m 和 M 就是区间 $f(I)$ 的起点和终点. 因此，在区间 I 上至少存在一点 x_1，使得 $f(x_1)=m$，及一点 x_2，使得 $f(x_2)=M$. 我们说 f 达到了它的上界和下界(图 1.3).

1.5 函数的递增

我们说函数 f 在 $\boldsymbol{R}$ 的子集 P 上是递增的，如果对于 P 的任何元素对 (x,x')，由关系 $x\leqslant x'$ 可得到关系 $f(x)\leqslant f(x')$. 换言之，

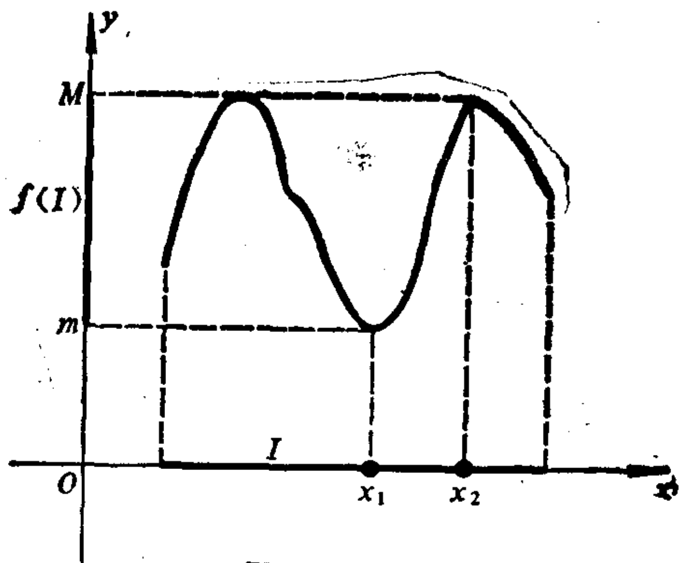

图 1.3

变量和函数的变化方向相同（图 1.4）. 如果由关系 $x<x'$ 得到

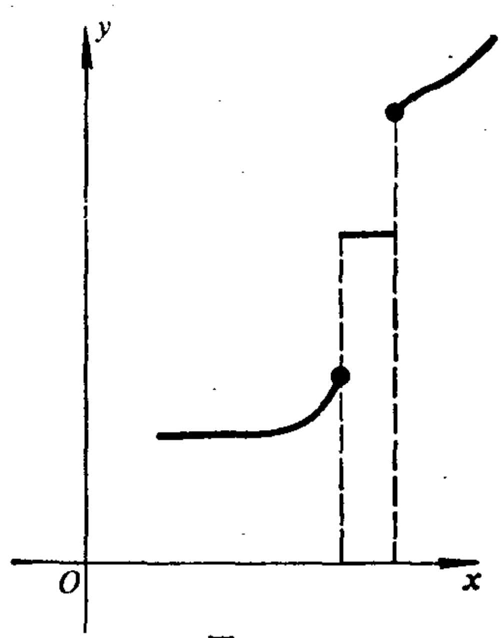

图 1.4

$f(x)<f(x')$，就说函数 f 是严格递增的(图 1.5).

同样，我们说 f 在 P 上是递减的，如果对 P 的任何元素对 (x, x')，由关系 $x\leqslant x'$ 可得到关系 $f(x)\geqslant f(x')$. 在这种情况下，变量和函数的变化方向相反(图 1.6). 如果由关系 $x<x'$，得到 $f(x)>f(x')$，就说 f 是严格递减的.

最后，我们说一个函数是单调的，如果它或者是递增的，或者是递减的. 我们说一个函数是严格单调的，如果它或者是严格递增

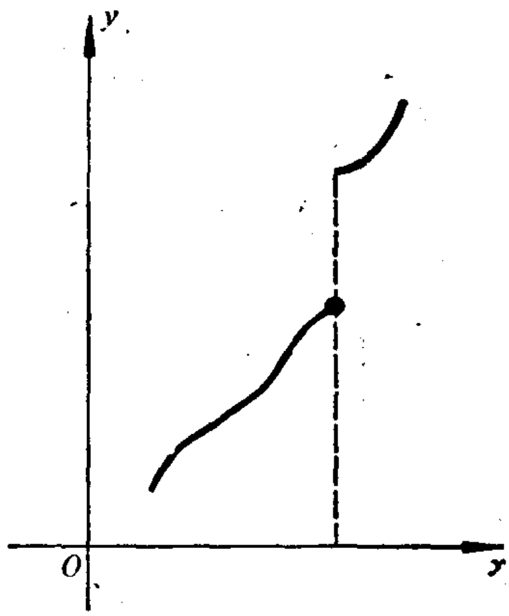

图 1.5

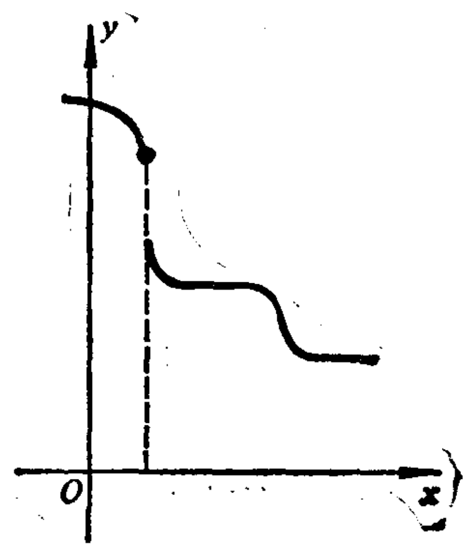

图 1.6

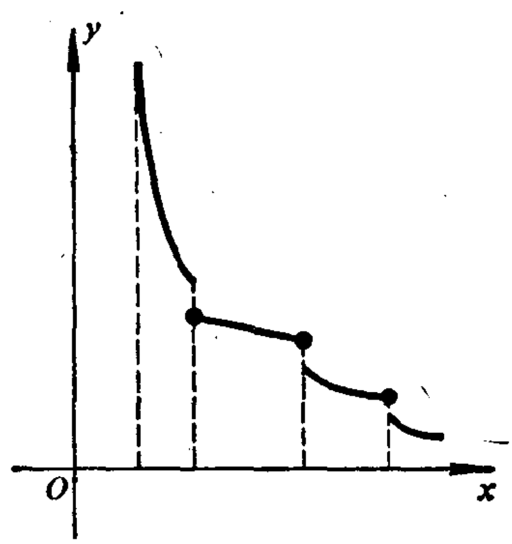

图 1.7

的，或者是严格递减的(图 1.7).

例 线性函数 $x \longmapsto ax$，或者更一般地，仿射函数 $x \longmapsto ax+b$，在 $\boldsymbol{R}$ 上是单调的；更确切地，如果 $a=0$，它是一个常数，如果 $a>0$，它是严格递增的，如果 $a<0$，它是严格递减的. 事实上，由 $x<x'$，得到

$$ax<ax', \text{因而} \quad ax+b<ax'+b, \text{如果 } a>0;$$