

傅衣铭 罗松南 熊慧而 编著

弹塑性理论

湖南大学出版社

弹 塑 性 理 论

傅衣铭 罗松南 熊慧而 编著

川

湖南大学出版社

1996年·长沙

内 容 简 介

本书采用从一般到特殊的叙述方法,以笛卡尔张量为工具,系统地介绍了弹塑性力学的基本原理和分析方法。全书分 15 章,每章开头都简洁地介绍了主要内容和重要概念,章末有一定数量的习题,并给出了习题答案。本书深入浅出,概念清楚,可作为工程力学专业本科生的教材,及有关工科专业本科生、研究生的教材或教学参考书,亦可作为从事结构强度分析与计算的工程技术人员的参考书。

弹塑性理论

Tansuxing Lilun

傅衣铭 罗松南 熊慧而 编著

责任编辑 张高明

☆

湖南大学出版社出版发行 湖南省新华书店经销

(长沙岳麓山 邮政编码 410082)

湖南大学印刷厂印装

☆

850×1168 32 开 17.75 印张 429 千字

1996 年 12 月第 1 版 1996 年 12 月第 1 次印刷

印数:1-1000 册

ISBN 7-81053-061-5/O3·2

定价:23.00 元

(湖南大学版图书凡有印装差错,请向承印厂调换)

前 言

弹性力学和塑性力学是固体力学的两个重要分支,是近代工程技术的科学基础。在目前高等学校的教学中,这两门课程是分别开设的,无疑地,这有利于加强基础,但所占的课时亦较多,知识的连贯性与对比性也不够强。事实上,弹、塑性力学都是研究结构在外部因素作用下的力学响应的,即研究结构的强度、刚度和稳定性问题,以及结构的“破坏”准则或失效准则;方法上都是在一定边值(初值)条件下求解三类基本方程(平衡(运动)方程、几何方程、物理方程)。且实际上,结构在足够大的外部因素作用下,从弹性变形发展到塑性变形,直至破坏,是一个连贯的不可分割的过程。由此,将弹、塑性力学结合起来讲述,不仅可以适当缩减学时,加强知识的连贯性,而且便于将结构变形过程中的弹性阶段与塑性阶段的力学行为进行反复比较,以加强学生对基本概念的理解,从而使学生较快和较完整地掌握弹、塑性力学的基本知识和分析、求解问题的方法。

本书在内容编排和叙述方面,力求由浅入深,简明易懂,特别注重于讲清基本概念和原理。且采用笛卡尔张量为工具,既使书中计算公式简洁、紧凑,又为学生运用近代数学工具打下基础。为使学生对力学中的守恒规律有初步而较系统的认识,本书中编写了“守恒定律”一章,而变形固体的运动平衡微分方程亦可由动量守恒方程导出。

全书共分为 15 章和 2 个附录,所包含内容基本符合教学要求。其中第 1,2,3,4,8 章及附录 A,附录 B 由傅衣铭教授编写;第 5,9,10,12,13,15 章由罗松南副教授编写;第 6,7,11,14 章由熊慧而副教授编写。

在本书的编写过程中,熊祝华教授提出了许多宝贵的意见,且认真细致地审阅了全书。在此,谨表示衷心的感谢。

目 次

1 绪论

- 1.1 弹性和塑性力学的任务 (1)
- 1.2 力学模型 (3)
- 1.3 简单拉伸的实验结果 (7)
- 1.4 拉伸曲线的进一步简化 (11)
- 1.5 三杆桁架的弹塑性分析 (12)
- 习题 (20)

2 应力状态理论

- 2.1 应力和一点的应力状态 (21)
- 2.2 斜面应力公式和边界条件 (24)
- 2.3 转轴时应力分量的变换 (26)
- 2.4 主应力和应力不变量 (29)
- 2.5 最大剪应力和八面体应力 (33)
- 2.6 球形应力张量和偏斜应力张量 (38)
- 2.7 应力空间和 π 平面 (40)
- 2.8 平衡微分方程 (45)
- 2.9 正交曲线坐标系中的平衡微分方程 (47)
- 习题 (53)

3 应变状态理论

- 3.1 位移和应变 (57)
- 3.2 小应变张量和转动张量 (63)
- 3.3 转轴时应变分量的变换、主应变及应变张量的不变量 (68)

3.4	应变率张量和应变增量张量	(73)
3.5	应变协调方程	(74)
3.6	正交曲线坐标系中的几何方程	(80)
	习题	(83)
4	守恒定律	
4.1	质量守恒定律	(86)
4.2	体积分的时间导数	(87)
4.3	线动量守恒定律	(90)
4.4	角动量守恒定律	(91)
4.5	能量守恒定律	(93)
4.6	间断面和间断条件	(97)
	习题	(103)
5	弹性本构方程	
5.1	柯西弹性和超弹性	(105)
5.2	线性弹性材料的本构方程	(107)
5.3	各向同性线性弹性材料的本构方程	(110)
5.4	各向同性线性弹性本构方程的矩阵表示	(113)
5.5	各向同性线性弹性材料的应变能	(115)
5.6	有初应力和初应变时的广义胡克定律	(118)
	习题	(120)
6	屈服条件和塑性本构方程	
6.1	布里奇曼试验和体积弹性定律	(121)
6.2	初始屈服条件的一般性质	(123)
6.3	两个常用的屈服条件	(128)
6.4	相继屈服条件	(139)
6.5	德鲁克公设	(145)
6.6	理想塑性材料的本构方程——塑性流动法则	(150)

6.7	强化材料的本构关系——增量理论	(161)
6.8	全量理论	(165)
6.9	库仑-莫尔屈服条件及相关连的流动法则	(172)
	习题	(176)
7	弹塑性问题的建立和简单的弹塑性问题	
7.1	弹性力学和弹塑性力学的边值问题	(180)
7.2	求解弹性力学边值问题的基本方法和解的唯一性原理	(185)
7.3	局部性原理和叠加原理	(191)
7.4	矩形截面梁的弹塑性弯曲	(194)
7.5	厚壁圆筒的弹塑性分析	(200)
7.6	厚壁球壳的极对称变形	(212)
	习题	(218)
8	弹性空间问题的通解及其应用	
8.1	拉梅-纳维埃方程的一般解	(220)
8.2	位移矢量的势函数分解	(225)
8.3	空间轴对称问题	(230)
8.4	半空间问题	(238)
8.5	两弹性体之间的接触问题	(247)
	习题	(256)
9	弹性力学平面问题的直角坐标解答	
9.1	平面应力问题与平面应变问题	(258)
9.2	平面问题的基本方程式	(261)
9.3	应力解法和应力函数	(265)
9.4	用多项式解平面问题	(268)
9.5	悬臂梁的弯曲	(271)
9.6	简支梁的弯曲	(278)
9.7	三角形水坝	(280)

9.8	三角级数解答	(282)
	习题	(287)
10	弹性力学平面问题的极坐标解答	
10.1	极坐标系中平面问题的基本方程	(290)
10.2	轴对称应力问题及相应的位移	(292)
10.3	曲梁(圆弧杆)的纯弯曲	(296)
10.4	曲梁一端受径向集中力作用	(299)
10.5	圆孔孔边的应力集中	(302)
10.6	楔形体在楔顶或楔面受力	(306)
10.7	半无限平面体问题	(311)
	习题	(316)
11	刚性理想塑性平面应变问题	
11.1	刚塑性平面应变问题的基本特点和基本方程	(319)
11.2	应力沿滑移线的变化规律	(326)
11.3	速度沿滑移线的变化规律	(330)
11.4	滑移线的若干性质	(332)
11.5	边界条件	(336)
11.6	基本的边值问题	(342)
11.7	截头对称楔体顶部受均匀压力	(347)
11.8	单面受均匀压力的楔体	(350)
11.9	圆孔周围的轴对称滑移线场	(352)
11.10	切口试件的拉伸	(354)
	习题	(357)
12	柱形杆的扭转和弯曲	
12.1	弹性扭转问题的位移解法	(360)
12.2	扭转函数的共轭函数和圣维南简单解法	(363)
12.3	弹性扭转问题位移解法的应用	(365)

12.4	弹性扭转问题的应力法求解·····	(371)
12.5	弹性扭转问题的薄膜比拟·····	(375)
12.6	弹性矩形截面杆的扭转·····	(378)
12.7	弹性薄壁杆件的扭转·····	(381)
12.8	柱形杆的弹性弯曲·····	(385)
12.9	柱形杆的弹塑性扭转和薄膜屋顶比拟法·····	(392)
	习题·····	(401)
13	弹性力学变分原理	
13.1	基本概念·····	(404)
13.2	可能虚功原理·····	(409)
13.3	弹性力学变分方程·····	(411)
13.4	位移变分法·····	(413)
13.5	位移变分法的应用·····	(416)
13.6	应力变分法·····	(423)
13.7	应力变分法的应用·····	(425)
13.8	广义变分原理·····	(431)
13.9	哈密顿(Hamilton W R)变分原理·····	(438)
	习题·····	(441)
14	塑性极限分析定理	
14.1	基本概念·····	(444)
14.2	基本等式和基本不等式·····	(447)
14.3	塑性极限分析定理及其引理·····	(449)
14.4	耗散功率·····	(450)
14.5	屈服函数和比耗散函数·····	(453)
14.6	间断解对耗散功率的影响·····	(457)
14.7	计算简例·····	(462)
14.8	薄板的极限分析——上限解·····	(472)
	习题·····	(480)

15 弹性波的传播

15.1 弹性波	(484)
15.2 杆中的弹性波	(488)
15.3 平面波	(492)
15.4 球面波	(494)
15.5 表面波	(496)
习题	(499)

习题答案	(500)
------------	-------

参考文献	(512)
------------	-------

附录 A 张量分析基础

A1 字母指标法和求和约定	(516)
A2 符号 δ_{ij} 与 e_{rst}	(518)
A3 坐标与坐标转换	(522)
A4 张量的分量坐标转换规律	(525)
A5 张量代数	(528)
A6 几种特殊张量	(531)
A7 张量的主方向与主分量	(534)
A8 笛卡儿张量的微积分	(537)
A9 场论基础	(539)

附录 B 正交曲线坐标系

B1 基、标准正交基	(544)
B2 正交曲线坐标系	(546)
B3 正交曲线坐标系内单位基矢量的导数及微分算子	(549)
B4 柱坐标和球坐标的有关公式	(554)

1 绪论

1.1 弹性和塑性力学的任务

弹性力学和塑性力学是固体力学的两个重要分支。固体力学是研究固体材料及其构成的物体结构在外部干扰(载荷、温度变化等)下的力学响应的科学。固体力学又按其研究对象而区分为不同的学科分支,例如,弹性力学是研究固体材料及由其构成的物体结构在弹性变形阶段的力学行为,包括在外部干扰下弹性物体的内力(应力)、变形(应变)和位移的分布,以及与之相关的原理、理论和方法;塑性力学则研究它们在塑性变形阶段的力学响应。大多数材料都同时具有弹性和塑性性质,当外载较小时,材料呈现为弹性的或基本上是弹性的;当载荷渐增时,材料将进入塑性变形阶段,即材料的行为呈现为塑性的(关于弹性和塑性的特征见 1.2)。所谓弹性和塑性,只是材料力学性质的流变学分类法中两个典型性质或理想模型;同一种材料在不同条件下可以主要表现为弹性的或塑性的。因此,所谓弹性材料或弹性物体是指在一定条件下主要呈现弹性性质的材料或物体。塑性材料或塑性物体的含义与此相类。如上所述,大多数材料往往都同时具有弹性和塑性性质,特别是在塑性变形阶段,变形中既有可恢复的弹性变形,又有不可恢复的塑性变形;因此有时又称为弹塑性材料。本书内容则是简单介绍关于分析弹塑性材料和结构在外部干扰下力学响应的基本原理、理论和方法,以及相应的“破坏”准则或失效准则。

以弹性分析为基础的结构设计是假定材料为理想弹性的,相应地这种设计观点便以分析结果的实际适用范围作为设计的失效准则,即认为应力(严格地说是应力的某一函数值)到达一定限值(弹性界限),将进入塑性变形阶段时,材料将破坏。结构中如果有一处或部分材料“破坏”,则认为结构失效(丧失设计所规定的效用)。由于一般的结构都处于非均匀受力状态,当高应力点或高应力区的材料到达弹性界限时,结构的大部分材料仍处于弹性界限之内;而实际材料在应力超过弹性界限以后并不实际发生破坏,仍具有一定的继续承受应力(载荷)的能力,只不过刚度相对地降低。因此弹性设计方法不能充分发挥材料的潜力,导致材料的某种浪费。实际上,当结构内的局部材料进入塑性变形阶段,在继续增加外载时,结构的内力(应力)分布规律与弹性阶段不同,即所谓内力(应力)重分布;这种重分布总的是使内力(应力)分布更趋均匀,使原来处于低应力区的材料承受更大的应力,从而更好地发挥材料的潜力,提高结构的承载能力。显然,以塑性分析为基础的设计比弹性设计更为优越。但是,塑性设计允许结构有更大的变形,以及完全卸载后结构将存在残余变形。因此,对于刚度要求较高及不允许出现残余变形的场合,这种设计方法不适用。

另外,在有些问题(例如:金属压延成型工艺)中,需要利用金属的塑性;在有些问题(例如:集中力作用点附近及裂纹尖端附近的应力场问题)中,如果不考虑材料的塑性,就从本质上得不到切合实际的结果。综上所述可见,弹塑性力学是近代工程技术所必需的基础技术学科。

材料力学、弹性力学和塑性力学在研究的基本内容及方法上有某些相同之处。例如,它们都是研究结构(杆件)在外部干扰下的力学响应。具体地说,是研究结构的强度、刚度和稳定性问题(有时统称为强度问题),以及结构的“破坏”准则或失效准则。

在方法上都是在一定的边界条件(或再加上初始条件)下求解三类基本方程:平衡(运动)方程、几何方程和本构(物理)方程。同时,都是以实验结果为依据,所得结果由实验来检验等。但是,由于材料力学(严格地说,是一般材料力学教材和课程)研究的对象主要限于细长体,即杆件,从而在三类基本方程之外,还根据实验观察引入了几何性的假设——截面平面假设。这实际上是对应变沿杆件横截面的分布规律作了近似的(线性的)假设,从而大大简化了计算,使得用初等方法就可获得解答。弹塑性力学一般地不需引入这类假设,从而可以获得更为精确的结果;更重要的是扩大了研究对象的范围,它可包括各种实体结构(如挡土墙、堤等)、深梁、非圆截面杆的扭转、孔边应力集中,以及板壳等材料力学初等理论所不能解决的力学问题。当然,在弹塑性理论中,有时也引入某些几何性的假设,如薄板、薄壳变形中的直法线假设等;又如在处理边界条件中同样要应用圣维南(Saint B de Venant)原理等,以便既使求解成为可能或得到一定程度的简化,又能获得足够精确的结果。

作为一门课程,弹塑性力学以理论力学、材料力学、高等数学、数理方程等课程为基础,较系统地介绍弹性力学和塑性力学的基本概念、基本理论和基本方法,为进一步学习板壳理论、断裂力学、连续介质力学、实验应力分析、有限单元法等后续课程打下基础。无疑,在固体力学专业学生的培养中,这是一门重要的专业基础课程。

1.2 力学模型

在弹塑性力学的研究中,如同在所有科学研究中一样,都要对研究对象进行模拟,建立相应的力学模型(科学模型)。“模型”是“原型”的近似描述或表示。建立模型的原则,一是科学性

——能尽可能地近似表示原型；二是实用性——能方便地应用。显然，一种科学（力学）模型的建立，要受到科学技术水平的制约。总的来说，力学模型大致有三个层次：材料构造模型、材料力学性质模型，以及结构计算模型。第一类模型属于基本的，它们属于科学假设范畴。因此，往往以“假设”的形式出现。“模型”有时还与一种理论相对应；因而在有些情况下，“模型”、“假设”和“理论”可以是等义的。

1.2.1 材料构造模型

(1) 连续性假设

假定固体材料是连续介质，即组成物体的质点之间不存在任何空隙，连续紧密地分布于物体所占的整个空间。由此，我们可以认为，一些物理量如应力、应变和位移等可以表示为坐标的连续函数，从而在作数学推导时可方便地运用连续和极限的概念。事实上，一切物体都是由微粒组成的，都不可能符合这个假设。但可以想象，当微粒尺寸及各微粒之间的距离远比物体的几何尺寸小时，运用这个假设不会引起显著的误差。

(2) 均匀及各向同性假设

假设物体由同一类型的均匀材料组成，则物体内各点与各方向上的物理性质相同（各向同性）；物体各部分具有相同的物理性质，不会随坐标的改变而变化（均匀性）。

1.2.2 材料力学性质模型

(1) 弹性材料

弹性材料是对实际固体材料的一种抽象，它构成一个近似于真实材料的理想模型。弹性材料的特征是：物体在变形过程中，对应于一定的温度，应力与应变之间呈一一对应的关系，它和载荷的持续时间及变形历史无关；卸载后，其变形可以完全恢复。在变形过程中，应力与应变之间呈线性规律，即服从胡克（Hooke R）规律的弹性材料，称为线性弹性材料；而某些金属和

塑料等,其应力与应变之间呈非线性性质,称为非线性弹性材料。材料弹性规律的应用,就成为弹性力学区别于其它固体力学分支学科的本质特征。

(2) 塑性材料

塑性材料也是固体材料的一种理想模型。塑性材料的特征是:在变形过程中,应力和应变不再具有一一对应的关系,应变的大小与加载的历史有关但与时间无关;卸载过程中,应力与应变之间按材料固有的弹性规律变化,完全卸载后,物体保持一个永久变形,或称残余变形。变形的不可恢复性是塑性材料的基本特征。

(3) 粘性材料

当材料的力学性质具有时间效应,即材料的力学性质与载荷的持续时间和加载速率相关时,称为粘性材料。实际材料都具有不同程度的粘性性质,只不过有时可以略去不计。

1.2.3 结构计算模型

(1) 小变形假设

假定物体在外部因素作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸。应用这条假设,可使计算模型大为简化。例如,在研究物体的平衡时,可不考虑由于变形所引起的物体尺寸位置的变化;在建立几何方程和物理方程时,可以略去其中的二次及更高次项,使得到的基本方程是线性偏微分方程组。与之相对立的是大变形情况,这时必须考虑几何关系中的二阶或高阶非线性项,导致变形与载荷之间为非线性关系,得到的基本方程是更难求解的非线性偏微分方程组。

(2) 无初应力假设

假定物体原来是处于一种无应力的自然状态。即在外力作用以前,物体各点应力均为零。我们的分析计算是从这种状态出发的。

(3) 荷载分类

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力,两者分别简称为体力和面力。

所谓体力,是分布在物体体积内的力,例如重力和惯性力。物体各点所受的体力一般是不同的。为了表明物体某一点 A 所受体力的大小和方向,在这一点取物体的一小部分,它包含 A

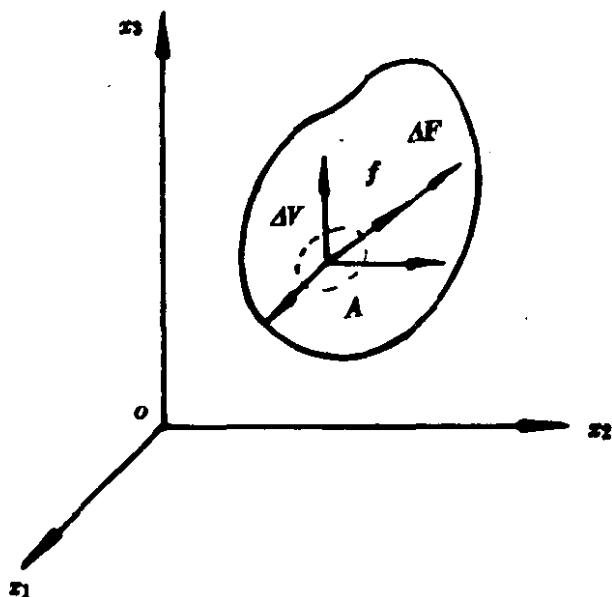


图 1.1

点,它的体积为 ΔV ,见图 1.1。设作用于 ΔV 的体力为 ΔF ,则体力的平均集度为 $\Delta F / \Delta V$ 。如果把所取的这一小部分物体不断减小,即 ΔV 不断减小,则 ΔF 和 $\Delta F / \Delta V$ 都将不断地改变大小、方向和作用点。现在,假定体力为连续分布,令 ΔV 无限减小而趋于 A 点,则 $\Delta F / \Delta V$ 将趋于一定的极限 f ,即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = f$$

这个极限矢量 f 就是该物体在 A 点所受体力的集度。由 ΔV 是标量,所以 f 的方向就是 ΔF 的极限方向。矢量 f 在坐标轴 x_i ($i=1,2,3$) 上的投影 x_i 称为该物体在 A 点的体力分量,以沿坐标轴正方向时为正,它们的因次是 $[\text{力}][\text{长度}]^{-3}$ 。

所谓面力,是分布在物体表面上的力,如风力、流体压力、两固体间的接触力等。物体上各点所受的面力一般也是不同的。为

了表明物体表面上一点 B 所受面力的大小和方向,可仿照对体力的讨论,得出当作用于 ΔS 面积上的面力为 $\Delta \mathbf{P}$ 而面力的平均集度为 $\Delta \mathbf{P}/\Delta S$ 时,微小面 ΔS 无限缩小而趋于 B 点时的极限矢量 $\mathbf{p}$,即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S} = \mathbf{p}$$

矢量 $\mathbf{p}$ 在坐标轴 x_i 上的投影 $\bar{x}_i$ 称为 B 点的面力分量,以沿坐标轴正方向时为正,它们的因次是[力][长度] $^{-2}$ 。作用在物体表面上的力都占有一定的面积;当作用面很小或呈狭长形时,可分别理想化为集中力或线集中力。

本节所述材料构造模型、结构计算模型是本书讨论问题的共同基础;而材料力学性质模型的选取,则需根据材料本身的力学性质、工作环境及限定的研究范围来确定。弹性、塑性和粘性只是材料的三种基本理想性质,在一定条件下能近似地反映材料在一个方面的力学行为。因而,它们是材料力学性质的理想模型。大多数材料的力学性质在一定条件下可采用上述三种模型之一或其组合加以近似描述。

由于弹塑性力学问题的复杂性,还有一些针对具体问题所作的假设,将在以后各章节中给出。

1.3 简单拉伸的实验结果

固体材料在受力后产生变形,从变形开始到破坏一般要经历弹性变形和塑性变形这两个阶段。根据材料力学性质的不同,有的弹性阶段较明显,而塑性阶段很不明显,象铸铁等脆性材料,往往经历弹性阶段后就破坏。有的则弹性阶段很不明显,从开始变形就伴随着塑性变形,弹塑性变形总是耦联产生,象混凝土材料就是这样。而大部分固体材料都呈现出明显的弹性变形