●研究生用书●

ELEMENTS OF MODERN MATHEMATICS

华中理工大学出版社

于寅

近代数学基础

近代数学基础

于　寅

华中理工大学出版社

JYl 138/24

内容提要

本书是华中理工大学研究生(主要对象是博士研究生)"近代数学基础"课程的教材. 内容包含抽象代数、点集拓扑、测度与积分论、泛函分析与算子理论等分支的基本概念和基本理论,以及它们的某些应用. 主要内容有:半群与群,环与域,有限自动机,代数编码;拓扑与拓扑空间,可数性、分离性及可度量化,紧性与连通性,完备度量空间和函数空间;可测空间和测度空间,可测函数与可测映射,积分理论,广义测度,乘积测度和乘积空间上的积分;线性算子理论,泛函分析的基本定理,谱分析,非线性算子等.

本书可作理工科研究生(博士生和高年级硕士生)的教材或参考书,也可供有关教师和工程技术人员参考.

Abstract

This book is primarily written for the graduate course《Elements of modern mathematics》in Huazhong University of Science and Technology. It consists of those parts: Abstract algebra and its application, General topology, Measure theory and integrations, Functional analysis and Elements of operator theory. The main topics are Semi-group and Group, Rings and Fields, Finite automata, Algebraic coding theory; Topology and topological spaces, Countability、Separation and Metrization, Compactness and Connection, Complete metric spaces and function spaces; Measurable spaces and measured spaces, Measurable functions and measurable mapping, Theory of integration, Signed measures, Product measures and integration on a product space; Theory of linear operators, Fundamental theorems of linear functionals, Spectral analysis of linear operators, Some problems of nonlinear operators.

The book can serve as textbook or reference for graduate students in Doctor or Master degree. It can also be consulated by relevent teachers and engineers.

写在“研究生用书”出版10周年

在今天，面对科技的迅速发展，知识经济的已见端倪，国际竞争也日趋激烈，显然，国家之间的竞争是国家综合实力的竞争，国家综合实力的竞争关键是经济实力的竞争，而经济实力的竞争关键又在于科技(特别是高科技)的竞争，科技(特别是高科技)的竞争归根结底是人才(特别是高层次人才)的竞争，而人才(特别是高层次人才)的竞争基础又在于教育。“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。”十六个字、四句话，确是极其深刻的论断。目前，国际形势清楚表明：我们国家的强大与民族的繁荣，主要立足于自己，以“自力更生”为主；把希望寄托于他人，只是一种不切实际的幻想。这里，我们决不是要再搞“闭关锁国”，搞“自我封闭”，因为那是没有出路的；我们强调的是要“自信，自尊，自立，自强”，要“自力更生”为主，走自己发展的道路。

显然，知识经济最关键的是人才，是高层次人才的培养，而作为高层次人才培养的研究生教育就在一个国家的方方面面的工作中，占有十分重要的战略地位。可以说，没有研究生教育，就没有威伟雄壮的科技局面，就没有国家的强大实力，就没有国家在国际上的位置，就会挨打，就会受压，就会被淘汰，还说什么知识经济与国家强大?!

“工欲善其事，必先利其器。”教学用书是教学的重要

基本工具与条件。这是所有从事教育的专家所熟知的事实。所以，正如许多专家所知，也正是原来的《“研究生用书”总序》中所指出，研究生教材建设是保证与提高研究生教学质量的重要环节，是一项具有战略性的基本建设。没有研究生的质量，就没有研究生教育的一切。

我校从 1978 年招收研究生以来，即着力从事于研究生教材与教学用书的建设。积十多年建设与实践的经验，我校从 1989 年起，正式分批出版“研究生用书”。第一任研究生院院长陈珽教授就为之写了《“研究生用书”总序》，表达了我校编写这套用书的指导思想与具体要求，“要力求‘研究生用书’具备科学性、系统性、先进性”。后三任研究生院长，也就是各任校长黄树槐教授、我本人和周济教授完全赞同这一指导思想与具体要求，从多方面对这套用书加以关心与支持。

我是十分支持出版“研究生用书”的。早在 1988 年我在为列入这套书中的第一本，即《机械工程测试・信息・信号分析》写“代序”时就提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见。但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在“这一特定方面”，他也可以选择一本有关的书作为了解与学习这方面专业知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣在“这一特定方面”，他更应选择一本有关的书作为主要学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书。这就是我赞成为研究生编写系列教学用书的原因。

目前，这套书自第一本于 1990 年问世以来，已经渡

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

过了10个春秋，出版了8批共49种，初步形成规模，逐渐为更多读者所认可。在已出版的书中，有15种分获国家级、部省级图书奖，有16种一再重印，久销不衰。采用此套书的一些兄弟院校教师纷纷来信，赞誉此书为研究生培养与学科建设作出了贡献，解决了他们的“燃眉之急”。我们感谢这些赞誉与鼓励，并将这些作为对我们的鞭策与鼓励，“衷心藏之，何日忘之?!”

现在，正是江南春天，“最是一年春好处”。华工园内，红梅怒放，迎春盛开，柳枝油绿，梧叶含苞，松柏青翠，樟桂换新，如同我们的国家正在迅猛发展、欣欣向荣一样，一派盎然生机。尽管春天还有乍寒时候，我们国家在前进中还有种种困难与险阻，来自国内与来自国外的阻挠与干扰，有的还很严峻；但是，潮流是不可阻挡的，春意会越来越浓，国家发展会越来越好。我们教师所编的、所著的、所编著的这套教学用书，也会在解决前进中的种种问题中继续发展。然而，我们十分明白，这套书尽管饱含了我们教师的辛勤的长期的教学与科研工作的劳动结晶，作为教学用书百花园中的一丛鲜花正在怒放，然而总会有这种或那种的不妥、错误与不足，我衷心希望在这美好的春日，广大的专家与读者，不吝拔冗相助，对这套教学用书提出批评建议，予以指教启迪，为这丛鲜花除害灭病，抗风防寒，以进一步提高质量，提高水平，更上一层楼，我们不胜感激。我们深知，“一个篱笆三个桩”，没有专家的指导与支持，没有读者的关心与帮助，也就没有这套教学用书的今天。我衷心祝愿在我们学校第三次大发展的今天，在百年之交与千年之交的时候，这套教学用书会以更

雄健的步伐，走向更美好的未来。

诗云：“嘤其鸣矣，求其友声。”这是我们的心声。

中国科学院院士

华中理工大学学术委员会主任

杨叔子

于华工园内

1999 年 5 月 15 日

前　言

当代科学技术发展的一大特点是，在几乎所有的领域，数学和计算机技术被广泛应用. 近代数学的思想方法、观点和结论正在深入地渗透进自然科学和社会科学的众多的理论分支，这是因为各门学科越来越走向定量化，越来越需要用数学来表达其定量和定性的规律，并且运用数学的方法和成就来加速自身的发展. “高技术本质上是一种数学技术”的观念已日益为人们所共识. 因此，就研究生数学教育而言，必须要求他们接触近代数学，了解和熟悉近代数学的思想、观点和方法，使他们具有较高的抽象能力和建模能力. 基于上述认识，我们自 1995 年起为非数学专业研究生(主要对象是博士研究生)开设了一门综合性数学课程——近代数学基础. 目标是了解近代数学中某些主要分支的基本概念和基本理论、研究方法、以及一些应用，熟悉近代数学的术语、符号和观点，以提高研究生的数学修养、抽象思维和逻辑推理能力，为进一步学习专门的数学知识和自觉运用数学创造性地开展科学研究与解决问题打了必要的基础.

本书是根据教育部高等学校工科数学课程教学指导委员会研究生组和工科研究生数学教学研究会多次讨论博士研究生数学教育的意见，参考国内外有关的资料，针对工科研究生的特点选材编写的，又在多年讲授该课程的基础上对初稿经过整理、修改和完善后定稿的. 全书由集合和映射、代数结构、拓扑结构、测度结构、线性算子和非线性算子引论等五章组成. 编写时强调近代数学中“结构”的观点，综合代数、几何和分析的方法，突出基本概念和基本理论，尽量通过一些例子来阐明有关的概念和理论. 内容编排上注意由浅入深循序渐进，文字叙述和表达力求条理清楚、深入浅出. 除

第一章是全书的基础知识外，各章内容基本上相对独立，教学时可根据实际情况和要求作适当的取舍. 每章节都配备了适量的习题，其中大部分是巩固性的，但也有一部分是有关内容的拓宽. 为了理解近代数学的思想方法和有关结论，作一定数量的习题是必要的. 每章都列出参考书，以便读者查阅和进一步学习.

中国建设银行湖北省分行尊师重教联合会用其研究生教育基金优秀研究生教材出版奖励金资助本书的出版，华中理工大学研究生院和出版社对本书的出版给予了大力的支持和帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢. 在本书编写过程中参考了所列参考书，从中得到很多的启发和帮助，引用了部分的观点和材料，借此机会向这些参考书的编著者致谢.

由于编者水平有限，而书又是给非数学专业研究生使用的，因此在内容选择、难点处理和深浅把握方面都有一定的难度，故书中的缺点和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正. 书名叫做近代数学基础，能否起到基础的作用，也望读者提出宝贵意见，以期进一步修改.

编者

1998 年 1 月于华中理工大学

目　录

第一章　集合和映射 …………………………………………………… (1)

§1.1　集合 …………………………………………………… (1)

§1.2　关系 …………………………………………………… (4)

§1.3　映射 …………………………………………………… (8)

§1.4　集合的势 …………………………………………………… (12)

§1.5　选取公理 …………………………………………………… (14)

第二章　代数结构 …………………………………………………… (18)

§2.1　代数系的一般概念 …………………………………………… (18)

§2.2　半群与群 …………………………………………………… (22)

1.半群与群的概念 …………………………………………… (23)

2.陪集、正规子群及共轭子群 ………………………………… (27)

3.群的同态与同构 …………………………………………… (36)

4.群的直积 …………………………………………………… (39)

5.群在计数问题上的应用 …………………………………… (40)

§2.3　环与域 …………………………………………………… (51)

1.环与域的概念 …………………………………………… (51)

2.环的同态与同构 …………………………………………… (57)

3.扩域 …………………………………………………… (60)

4.应用举例 …………………………………………………… (71)

(1)拉丁方阵 …………………………………………………… (71)

(2)Hadamard 矩阵 …………………………………………… (76)

§2.4　有限自动机及其应用 ………………………………………… (83)

1.有限自动机 …………………………………………………… (83)

2.移位寄存器 …………………………………………………… (94)

3.形式语言 …………………………………………………… (101)

§2.5　代数编码 …………………………………………………… (109)

1.编码理论的基本概念 …………………………………………… (109)

2. 线性码 …………………………………………………… (113)
3. 群码与陪集译码法 …………………………………………… (116)
4. 循环码 …………………………………………………… (119)
第三章　拓扑结构 ……………………………………………… (131)
§3.1　拓扑与拓扑空间 ……………………………………………… (131)
1. 拓扑与拓扑空间的定义 ……………………………………… (131)
2. 拓扑基与可数性公理 ………………………………………… (136)
3. 连续映射与同胚 …………………………………………… (141)
4. 乘积空间和商空间 ………………………………………… (147)
§3.2　可数性、分离性及可度量化 ………………………………… (158)
1. 可数性 …………………………………………………… (158)
2. 分离性 …………………………………………………… (162)
3. 函数分离性 ……………………………………………… (167)
4. 度量化定理 ……………………………………………… (172)
§3.3　紧性 ……………………………………………………… (177)
1. 紧空间及其性质 …………………………………………… (177)
2. 序列紧性与可数紧性 ……………………………………… (183)
3. 度量空间中的紧性 ………………………………………… (187)
4. 局部紧与紧化 ……………………………………………… (191)
§3.4　连通性 …………………………………………………… (195)
1. 连通空间 ………………………………………………… (195)
2. 道路连通与道路连通分支 …………………………………… (200)
3. 同伦与基本群 ……………………………………………… (202)
§3.5　完备度量空间与函数空间 …………………………………… (211)
1. 完备度量空间 ……………………………………………… (211)
2. 函数空间 ………………………………………………… (216)
第四章　测度结构 ……………………………………………… (227)
§4.1　可测空间与测度空间 ……………………………………… (227)
1. σ 代数与可测空间 …………………………………………… (227)
2. 测度与测度空间 …………………………………………… (229)
3. 测度的延拓与完备化 ……………………………………… (235)
§4.2　可测函数与可测映射 ……………………………………… (253)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1. 可测函数的定义及其基本性质 …………………………… (253)
2. 可测函数序列的收敛性 …………………………………… (258)
3. 可测映射 ……………………………………………………… (265)
§4.3 积分理论……………………………………………………… (269)
1. 测度空间上可测函数的积分及其性质 …………………… (269)
2. 积分的极限定理 …………………………………………… (276)
3. Lebesgue-Stieltjes 积分 …………………………………… (281)
4. L^p 空间 ……………………………………………………… (284)
§4.4 广义测度……………………………………………………… (294)
1. 广义测度的 Hahn 分解和 Jordan 分解 …………………… (294)
2. Radon-Nikodym 定理及其应用 …………………………… (300)
3. Lebesgue 分解定理 ………………………………………… (307)
§4.5 乘积测度和乘积空间上的积分…………………………… (316)
1. 基本概念与性质 …………………………………………… (316)
2. Fubini 定理 ………………………………………………… (322)
3. 无穷多个测度空间的乘积 ………………………………… (327)
第五章 线性算子和非线性算子引论 ………………………… (333)
§5.1 线性算子 …………………………………………………… (334)
1. 有界线性算子和连续线性算子 …………………………… (335)
2. Hilbert 伴随算子 …………………………………………… (347)
3. Hilbert 空间中的无界线性算子 …………………………… (350)
§5.2 泛函分析的基本定理……………………………………… (358)
1. 泛函延拓定理 ……………………………………………… (358)
2. 纲定理和一致有界性定理 ………………………………… (367)
3. 弱收敛和弱*收敛 …………………………………………… (370)
4. 逆算子定理和闭图像定理 ………………………………… (377)
§5.3 线性算子的谱理论………………………………………… (385)
1. 基本概念 …………………………………………………… (387)
2. 有界线性算子的谱性质 …………………………………… (394)
3. 有界自伴线性算子的谱性质 ……………………………… (399)
4. 自伴线性算子的谱分析 …………………………………… (399)
§5.4 非线性算子………………………………………………… (413)

1. 非线性算子的有界性和连续性 …………………………………… (413)
2. Banach 空间中的微分和积分 ……………………………………… (420)
3. 梯度算子 ………………………………………………………… (431)
4. 压缩算子与非扩展算子 …………………………………………… (435)
5. 全连续算子 ……………………………………………………… (443)
参考文献 ……………………………………………………………… (454)

第一章　集合和映射

§1.1 集　　合

我们把一定范围内的一些确定的不同对象的全体称为一个**集合**或**集**. 给定一个集合，意味着能够判定一个对象是否属于该集合，集合中的对象称为该集合的元或成员. 不包含任何元的集合称为**空集**，记为$\varnothing$. 若集合S包含了某个问题所讨论的一切集合，则称S为该问题的**全集**.

本书假定读者已经熟悉集合的表示法和集合的运算等基本概念，也理解下列符号的含义：$a\in S$，$b\notin S$，$A=\{a\in S\mid a$ 具有性质 $P\}$，$B\subset S$，$A=B$，$A\cup B$，$A\cap B$，A^c，$A-B$ 等.

若集合$\mathscr{A}$的每个元本身是集合S的子集，则称$\mathscr{A}$是S的一个**集族**. 这时把$\mathscr{A}$中所有元的并称为集族$\mathscr{A}$的**并**，记为$\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}A$；把$\mathscr{A}$中所有元的交称为集族$\mathscr{A}$的**交**，记为$\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}}A$.

若除了集合S之外，另有一个集合J(称为**指标集**)，使得对J中每一个元α，均有S上的一个子集A_α与之对应，这样就得到S上的一个集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$，称它为由指标集$J$所确定的$S$上的集族，并把此集族的并与交分别记为$\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$与$\bigcap\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$. 特别，若$J$为非负整数集$N$或正整数集$P$时，集族$\{A_n\}_{n\in N}$或$\{A_n\}_{n\in P}$称为是一个集合序列，常用$\{A_n\}_{n\geqslant 1}$表示之.

集合S的所有子集(包括空集$\varnothing$和S自身)所成的集族称为S的**幂集**，记为$\mathscr{P}(S)$. 于是，S上的任一集族都是$\mathscr{P}(S)$的子族.

若S是有限集，则用$|S|$表示它的元数. 容易验证，当$|S|=n$

时有$|\mathscr{P}(S)|=2^n$.

设集合 A,B 是全集 S 的两个子集,则称 S 的子集$(A-B)\cup(B-A)$为 A 与 B 的**对称差**,记为 $A\oplus B$. 显然

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B).$$

当 A,B 都是有限集时,

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|. \qquad (1.1\text{-}1)$$

设$\{A_n\}_{n\geqslant 1}$是一个集合序列. 若

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots,$$

则称该序列是上升的,记为 $A_n\uparrow$;若

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots,$$

则称该序列是下降的,记为 $A_n\downarrow$. 对于每个正整数 n,我们可以由该集合序列构造两个序列:

$$\{B_n\triangleq\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\}_{n\geqslant 1}\text{ 和 }\{C_n\triangleq\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\}_{n\geqslant 1},$$

显然 $B_n\downarrow,C_n\uparrow$. 我们称集合$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ 为序列$\{A_n\}_{n\geqslant 1}$的上极限,记为$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$,即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k; \qquad (1.1\text{-}2)$$

而称集合$\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$ 为$\{A_n\}_{n\geqslant 1}$的下极限,记为$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$,即

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k. \qquad (1.1\text{-}3)$$

容易看出,$x\in\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ 的充要条件是存在无穷多个 A_n 包含 x,而 $x\in\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ 的充要条件是存在与 x 有关的正整数 n_x,使得对一切 $n\geqslant n_x$,A_n 均包含 x. 因此,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n. \qquad (1.1\text{-}4)$$

例 1 设 $A_{2n-1}=[0,2-\frac{1}{n+1}]$,$A_{2n}=[0,1+\frac{1}{2n})$,$n=1,2,\cdots$,求序列$\{A_n\}_{n\in P}$的上极限和下极限.

解 由于[0,1]上的点属于每个 $A_n(n=1,2,\cdots)$，而对于(1，2)中的点 x，必存在正整数 n_x，使得当 $n\geqslant n_x$ 时有

$$1+\frac{1}{2n}<x<2-\frac{1}{n+1},$$

即当 $n\geqslant n_x$ 时，$x\notin A_{2n}$ 但 $x\in A_{2n-1}$. 因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=[0,2),\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=[0,1].$$

定义 若集合序列 $\{A_n\}_{n\geqslant1}$ 的上极限与下极限相等，则称该序列收敛，并称 $A=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ 为 $\{A_n\}_{n\geqslant1}$ 的极限，记为 $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

容易验证，若 $A_n\uparrow$ 或 $A_n\downarrow$，则 $\{A_n\}_{n\geqslant1}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 分别为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 与 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

定义 设 X 是给定的非空集，A 是 X 的子集，则定义在 X 上的函数

$$X_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A;\\ 0, & \text{当 } x\in X-A\end{cases}\tag{1.1-5}$$

称为 A 的特征函数. 显然子集 A 完全由它的特征函数所确定，也就是说 $X_A(x)\equiv X_B(x)$ 的充要条件是 $A=B$.

特征函数与集合之间有下列的关系：

(1) $A=X$ 与 $A=\varnothing$ 分别等价于 $X_A(x)\equiv1$ 与 $X_A(x)\equiv0$；

(2) $A\subset B$ 等价于 $X_A(x)\leqslant X_B(x)$；

(3) $X_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}(x)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_{A_i}(x)$，$X_{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}(x)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_{A_i}(x)$；

(4) 设 $\{A_n\}_{n\geqslant1}$ 是集合序列，则

$$X_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}X_{A_n}(x),X_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\underline{\lim_{n\to\infty}}X_{A_n}(x);\tag{1.1-6}$$

(5) 设 $\{A_n\}_{n\geqslant1}$ 是集合序列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}X_{A_n}(x)$ 存在，且当极限存在时

$$X_{\lim\limits_{n\to\infty} A_n}(x) = \lim_{n\to\infty} X_{A_n}(x).$$

(1.1-6)式中的第一个等式的证明如下. 若 $X_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x)=1$,则 $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,故存在无穷多个 A_n 包含 x. 从而数列 $\{X_{A_n}(x)\}_{n\geqslant1}$ 中必有无穷多个 1,故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}X_{A_n}(x)=1$. 反之亦然,因此在 X 中使函数 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}X_{A_n}(x)$ 取值为 1 的元与使 $X_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x)$ 取值为 1 的元是一致的. 由于特征函数的值不是 1 就是 0,所以 X 中使这两个函数分别取值为 0 的元也是一致的.

设 A,B 是两个集合,对任意 $a\in A$ 及 $b\in B$,可以组成一个序偶 (a,b). 若规定当且仅当 $a_1=a_2$ 和 $b_1=b_2$ 时 $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$,则由 A 和 B 中的元组成的所有序偶的集合称为 A 与 B 的**直积**,记为 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

容易验证,集合的直积有下列性质:

(1) $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$;

(2) $A_1\times B_1\subset A_2\times B_2$ 的充要条件是,$A_1\subset A_2$ 和 $B_1\subset B_2$;

(3) $A_1\times B_1=A_2\times B_2$ 的充要条件是 $A_1=A_2$ 和 $B_1=B_2$;

(4) $(A_1\times B_1)-(A_2\times B_2)=[(A_1-A_2)\times B_1]\cup[(A_1\cap A_2)\times(B_1-B_2)]$.

§1.2 关　　系

集合 A 与 B 的直积 $A\times B$ 中的任意一个子集称为 A 到 B 的一个**关系**. 具体地说,若 $R\subset A\times B$,且 $(a,b)\in R$,则称 a 与 b 有着关系 R,也记为 aRb. 特别,若 $R\subset A\times A$,则称 R 是 A 上的一个二元关系.

设 R 是集合 S 上的一个二元关系.

(1)若 $\forall\ a\in S$ 均有 $(a,a)\in R$,则称 R 是自反的;

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com