青年数学小丛书

力学在几何中的一些应用

吴文俊

北京市数学会编
中国青年出版社

青年数学小丛书

力学在几何中的一些应用

吴文俊

北京市数学会编

中国青年出版社

1962年·北京

青年数学小丛書第一批書目

有 * 号的是已經出版的.

力学在几何中的一些应用
吳　文　俊
*
中国青年出版社出版
（北京东四12条老君堂11号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第036号
中国青年出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店經售
*
787×1092 1/32　7/8印張　16,000字
1962年6月北京第1版　1962年6月北京第1次印刷
印数 1—20,000

統一书号：13009·203
定价（6）一角

內 容 提 要

数学在力学上的应用是明显的，比如力学上的一些計算就要用到数学．但是力学对于数学、比如在几何中的应用，大家就不一定知道的很多了．其实远在2000年前的阿基米德，就已經应用力学上的物体平衡定律等来証明一些几何命題了．学过物理的中学生，都熟悉物体的重心和力的平衡这些力学概念；本书引用了这些力学概念，来举例說明它們如何用来証明一些几何命題．內容只涉及中学課程里的一些物理和几何的知識，不涉及深奥的理論．

編者的話

数学課外讀物对提高学生的学习兴趣，学好数学，以及扩大他們的数学知識領域，具有重要的意义．近年来，越来越多的中学教师和中学生，都迫切希望出版更多的适合青年人閱讀的通俗数学讀物．在一些关心青年数学教育的数学家的热情敦促下，我們約請了一些数学工作者，編写这一套"青年数学小丛書"，准备陆續分批分册出版，想来适应这样一个要求．

考虑到这套小丛書是中学生的課外讀物，在編写时，我們希望做到：不脫离学生現有的知識水平，又必須在已有基础上逐步加深和提高，以培养学生深入鑽研的精神；要介紹一些課外的饒有趣味的富有启发性的数学知識，但又不完全脫离当前教学內容，或把高等数学中的內容簡单的搬过来．

这是我們的初步想法和尝試．热切地希望数学工作者和讀者对我們的工作提出宝貴的意見和建議，更希望数学工作者为青年人写出更多更好的数学課外讀物．

北京市数学会

1962年四月

作 者 的 話

北京市数学会举办 1962 年度数学竞賽,在竞賽之前,先对中学生作了几次講演。 这本書就是我所作的一次講演稿,由李培信、江嘉禾两位同志記录,并由江嘉禾同志执笔整理,謹此志謝。

吳 文 俊

1962 年四月

目　　次

前　言

数学、力学以及其他各学科，尽管它們研究的对象形形色色，使用的方法千变万化，但它們有一个共同的目的，即它們都是为了認識客观世界的規律性并用来改造客观世界而发生、发展和壮大起来的．在这个共同的目的之下，数学和力学更是一对亲密的战友，它們互相支援和推动，彼此启发和帮助．

数学对于力学的作用是显明的．由于数学研究的对象非常普遍，研究的范围也就极其广泛，不論是自然科学、工程技术、国民經济以至于日常生活都不能不和数学打交道；特别是力学，更要用到数学．数学对力学家說来几乎是“不可一日无此君”．

但是反过来，力学对数学的帮助也并不小：从小的方面来說，某些数学定理用力学方法来証明就很簡单，某些数学問題从力学着眼来考虑就可能提供一些解决的办法；从大的方面来說，由力学出发，还可能提供新的数学思想、新的数学方法，从而产生新的数学分支．自然，这样的作用并不是力学所独有的．数学是一門基础科学，它是認識和改造客观世界的重要武器之一，尽管經过长期的发展，数学有一套独特的理論系統，个别的数学家在个别的时期表面上和外界脫节，但就数学

整体以及整个数学家队伍来說，为生产实践服务不仅是它的主要目的，也可以說是它的唯一目的． 它不能不經常对外来任务提供或摸索解决办法，还通过它不断从外界吸收营养，来壮大自己的力量． 这种外来的推动来自各个方面，但从历史的久远和影响的巨大来看，力学的作用特别显著．例如，微积分的产生，力学就起了决定性的作用． 在十六世紀英国工业革命的結果，工业的迅速发展和技术革新都要求深入了解物体的运动規律，因而对力学提出了很多急待研究的問題；要解决这些問題，原来的数学工具已經不够用了，迫切需要一个新的数学工具．这就是微积分产生的原因．

力学对数学的应用甚至可以追溯到2000年前． 那时是罗馬帝国称雄的时代，有一位著名的科学家阿基米德． 他对于物体在液体中的浮沉原理的发现是众所周知的，在中学的物理教科書中，就提到它． 他在数学上的主要貢献是一些几何图形的面积和体积的計算．这些在今天看来仍然不是輕而易举的，而在当时就更难得了． 阿基米德从力学考虑入手提供了新的方法，这些方法用比較近代的观点来看，属于积分的范围． 阿基米德的主要著作之一就叫做“一些几何命題的力学証明”．

学过物理的中学生，都熟悉物体的重心和力的平衡这些力学概念． 本書引用了这些力学概念，举例說明它們如何用来証明一些几何命題．

本書內容只涉及中学課程里的一些物理和几何的知識，不涉及深奥的理論．

一　重心概念的应用

一根棒，如果它的質量均匀分布，它的重心就在棒的中央；如果棒的質量不是均匀的，密度大小各处不同，它的重心就可能偏在某处。但是不管怎样，只要在重心那一点把棒支起，就可以讓这根棒达到平衡(图 1)．同样，在一个平板的重心那一点将这平板支起，也能达到平衡(图 2)．在最簡单的情形，只有两个質点 M_1 和 M_2，它們的質量分别是 m_1 和 m_2，那么这两个質点的重心 M 就在 M_1 和 M_2 这两点的連綫上(图3)．它把綫段 M_1M_2 分成下面这个比例：

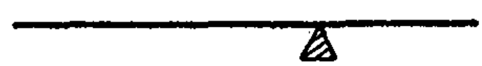

图　1.

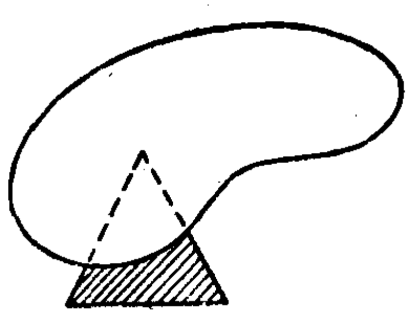

图　2.

$$d_1 : d_2 = m_2 : m_1.$$

三角形有許多有趣的性質是大家熟悉的．例如，三条中綫交于一点(重心)，三条高交于一点(垂心)，三条内分角綫交于一点(内心)，等等．我們現在从力学出发来証明三条中綫交于一点．

設想有一个三角形板，質量均匀分布．那么它的重心应該在什么地方呢？我們把这个三角形板分成許多沿底边平行

图　3.

的狭条(图 4)。当这些狭条分得很細时,它的重心就在它的中点。所有这些狭条的重心就都在三角形板底边的中綫上,因此整个三角形板的重心也就在这条中綫上。同样道理,这个三角形板的重心也在另外两条中綫上。可見三角形的三条中綫相交在一点,即这个三角形的重心。

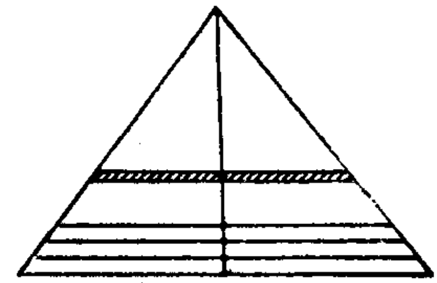

图 4.

我們也可以换一种方法来考慮。設想在三角形的三个頂点处有相同的質量 m(图 5)。我們来看这三个質点的重心应該在什么地方？質点 $B(m)$ 和 $C(m)$ 的重心在底边 BC 的中点 D 处,質量是 $2m$。質点 $D(2m)$ 和質点 $A(m)$ 的重心,也就是三个質点 $A(m)$、$B(m)$ 和 $C(m)$ 的重心,应該在 AD 这条中綫上,并且这个重心 M 将綫段 AD 分成下面的比例:

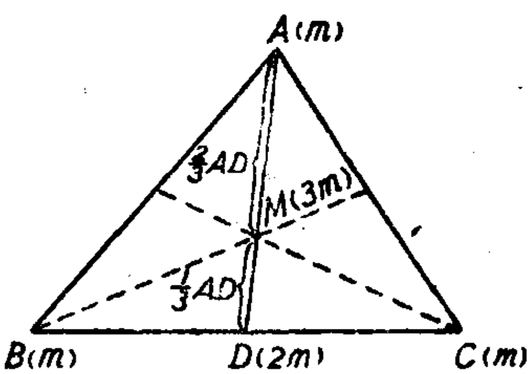

图 5.

$$AM : MD = 2m : m,$$

即 $AM = 2MD$。可見 $AM = \frac{2}{3}AD, MD = \frac{1}{3}AD$。同样道理,重心 M 也应該在另外两条中綫上。于是三条中綫都相交在重心 M 这一点,它和每个頂点的距离等于相应中綫长度的 $\frac{2}{3}$。

上面是設想三个頂点处有相同的質量的情形。現在我們来看如果这三个頂点处質量不同,将会发生什么情形？例如,

在頂点 A 处的質量等于对边 BC 的长度 a；同样，在另外两个頂点 B、C 处的質量也等于它們对边的长度 b、c（图 6）。質点 B、C 的重心 D 在綫段 BC 上，它把綫段 BC 分成下面的比例：

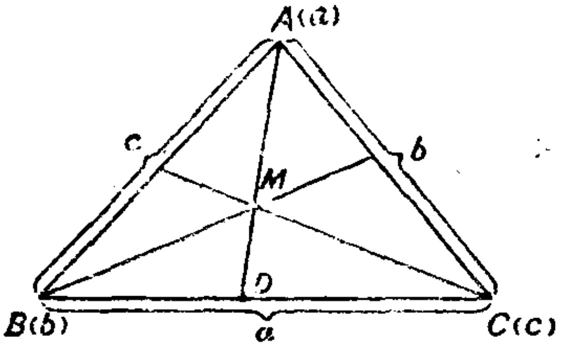

图 6.

$$BD:DC = c:b = AB:AC.$$

可見 AD 是角 A 的平分綫（三角形的角平分綫把对边分成的两綫段和两条邻边成比例）。于是質点 A 和 D 的重心，也就是整个質点系 A、B、C 的重心 M，应該在这条角平分綫 AD 上。同样道理，这个重心也应該在另外两条角平分綫上：这样，我們就很清楚地看出了三角形的三內角平分綫应該交于一点。

如果我們把三頂点处的質量分布再变化一下（图7，角 A、角 B、角 C 都是銳角），也可以証明三角形的三条高交于一点。

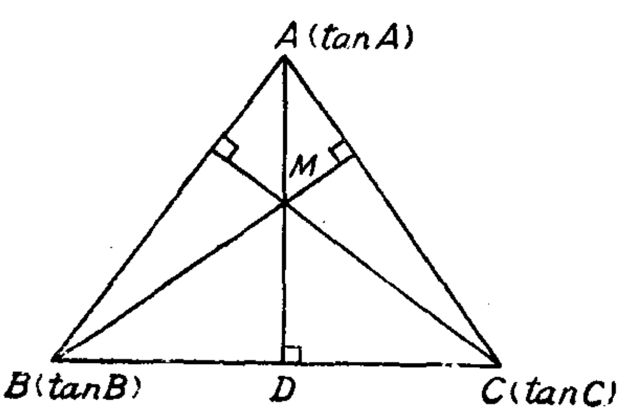

图 7.

現在我們考慮更一般的情形。設想通过三角形 ABC 的每个頂点处有一条直綫（图 8），把对边分成的比例分別是 α、β、γ，即

$$BD:DC = \alpha,$$
$$CE:EA = \beta,$$
$$AF:FB = \gamma.$$

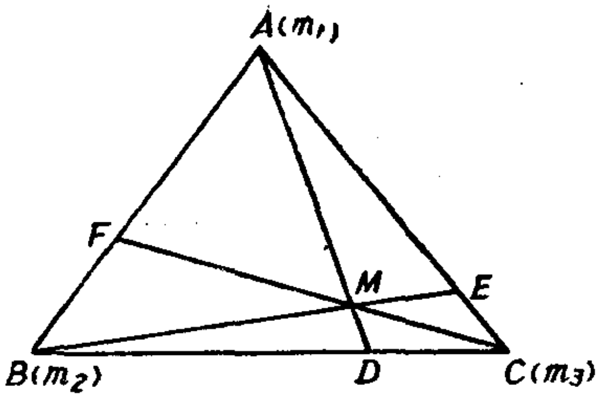

图 8.

假若 AD、BE、CF 这三条直綫交于一点，我們来看 α、β、γ 之間有什么样的关系．設想在頂点 A、B、C 处分别有質量 m_1、m_2 和 m_3，我們总可以选择 m_1、m_2、m_3 使得 F 是質点 A、B 的重心，同时 E 是質点 A、C 的重心，即选择 m_1、m_2、m_3 使得

$$m_2 : m_1 = \gamma,\ \ m_1 : m_3 = \beta.$$

所以，显然整个質点系 A、B、C 的重心 M 应該在 BE 和 CF 的交点处．既然直綫 AD 也通过这个重心，所以 D 一定是質点 B、C 的重心（假若 B、C 的重心不是 D 而是另外一点 D'，那么整个質点系 A、B、C 的重心也就不在 AD 上，而在 AD' 上了），因此也应該有

$$m_3 : m_2 = \alpha.$$

所以，如果 AD、BE、CF 交于一点 M，那么

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \frac{m_3}{m_2} \cdot \frac{m_1}{m_3} \cdot \frac{m_2}{m_1} = 1.$$

反过来，如果 $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$，我們总可以选择适当的 m_1、m_2、m_3，作为 A、B、C 的質量，使得質点 B、C 的重心正好在 D，質点 C、A 的重心正好在 E，而同时質点 A、B 的重心也正好在 F（例如，讓 $m_1 = 1$，$m_2 = \gamma$，$m_3 = \frac{1}{\beta}$）．因此整个質点系 A、B、C 的重心应該同时在 AD、BE、CF 这三条直綫上，可見这时 AD、BE、CF 交于一点． 这样，我們就証明了三角形的西瓦(Ceva)定理：AD、BE、CF 交于一点的充分必要的条件是

$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$.

从上面这些例子看来，应用力学的重心概念不仅可以簡化某些几何命題的証明，很自然地得到所要的結論，而且也能够自然而然地发現某些几何事实。我們再举一例来說明如何利用重心概念来发現一个几何图形的性質。

設想在一个四面体(图 9)的四个頂点 A、B、C、D 处有相同的質量 m。質点 A、B 的重心在綫段 AB 的中点 M_{AB}；質点 C、D 的重心在綫段 CD 的中点 M_{CD}。所以質点 $M_{AB}(2m)$ 和質点 $M_{CD}(2m)$ 的重心，也就是整个質点系 A、B、C、D 的重心 M，应該在綫段 $M_{AB}M_{CD}$ 的中点。同样，这个重心 M 也应該在 BC 的中点 M_{BC} 和 AD 的中点 M_{AD} 的連綫上，也在 M_{AC} 和 M_{BD} 的連綫上。因此，如果把 AB 和 CD 叫做对边，那么，我們就十分自然地看出：四面体的三双对边的中点联綫相交在一点，即四面体的重心。

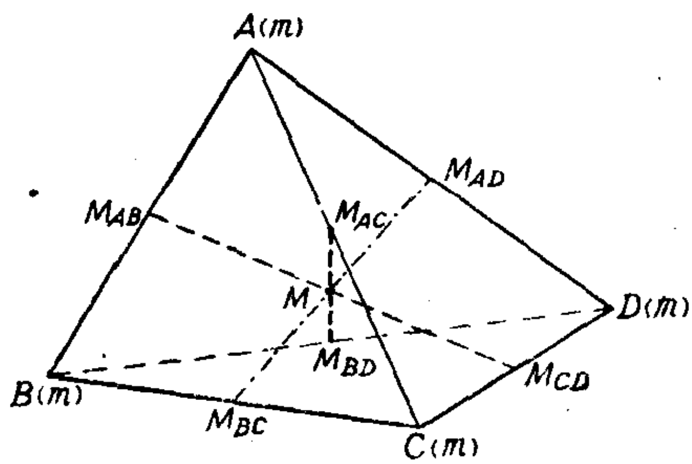

图 9.

我們也可以換一种方法来求这个重心 M。質点 B、C、D 的重心 M_{BCD} 在三角形 BCD 的重心处，即三条中綫的交点。因此

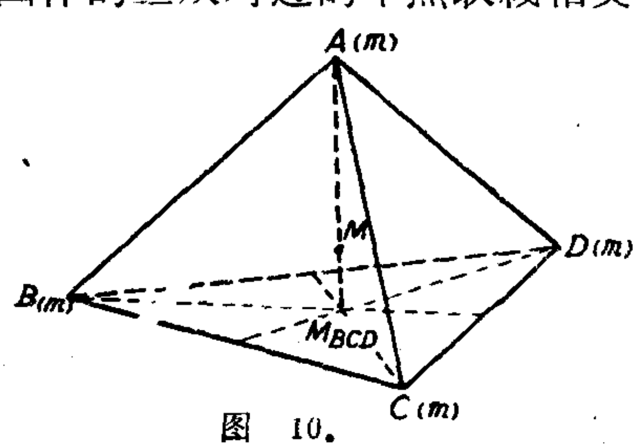

图 10.

整个質点系 A、B、C、D 的重心 M，就在綫段 AM_{BCD} 上，即質点 $A(m)$ 和質点 $M_{BCD}(3m)$ 的重心所在处．于是綫段 AM 的长度等于 AM_{BCD} 的长度的$\frac{3}{4}$．同样，这个重心也在綫段 BM_{CDA}、CM_{DAB}和 DM_{ABC} 上．因此，AM_{BCD}、BM_{CDA}、CM_{DAB} 和 DM_{ABC} 这四个綫段又应該相交在 M 这一点．这样，我們很自然地发現了上面所說的几何事实，即四面体 $ABCD$ 共有七条上面所說的特殊綫段相交在一点．

对于四面体，我們考慮了在各个頂点处質量分布相同的情形． 如果各个頂点处的質量各不相同，我們又可以得到什么样的結論呢？是否可以得到类似于三角形的西瓦定理那样的命題呢？这个問題留給讀者自己去解答．

二　力系平衡概念的应用

力，是造成运动改变的原因，通常用一个箭头来表示：箭头的方向表示力的作用方向，箭头的起点表示力的作用点，箭头的长短表示力的大小(图11)． 可見，一个力是由三个因素組成，即力的方向、大小和作用点． 下面我們把一个力記为 $\vec{a}$ 并把它的大小記为 $|\vec{a}|$．

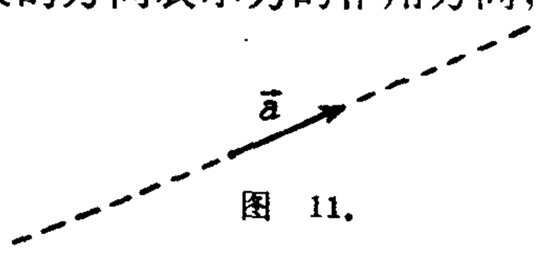

图 11.

我們設想用一条理想的繩来拉一个物体(图12)，只要使用的力一样大，作用的方向一样，那么不論这个力作

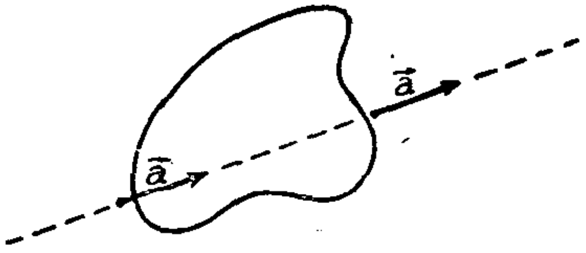

图 12.

用在繩上哪一点，它所产生的效果总是一样的。这个性質就是力的传递性。 力既然有传递性，所以有时也可以不考虑力的作用点，而只考虑力的方向和大小。

現在設想有一物体受許多力的作用，这些力构成一个力系。这个力系对这物体所产生的总效果究竟怎样呢？我們先考虑两个力，它們作用在一点，总的效果就象物体受单独一个力的作用一样，这个力称为这二力的**合力**，它的方向、大小可用下面这个几何方法求得：在$\vec{a}$、$\vec{b}$的作用綫相合时，合力是很明显的；假使不相合，那么以力$\vec{a}$和$\vec{b}$为边的平行四边形的对角綫就可代表这合力$\vec{a}+\vec{b}$的大小和方向，也就是力$\vec{a}$和$\vec{b}$的总效应(图13)。如果这两个力不交于一点，但作用綫交于一点，那么可以把这两个力移到这个交点后，再应用上述平行四边形法則来求得它們的合力。如图 13 所示，合力$\vec{a}+\vec{b}$和力$\vec{a}$作成的角是β，和力$\vec{b}$作成的角是α，那么

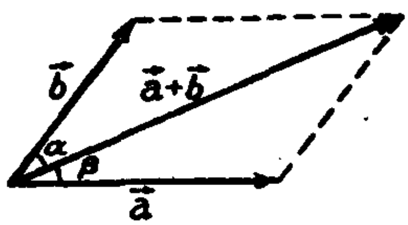

图 13.

$$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

如果一个平面上的二个力$\vec{a}$和$\vec{b}$的作用綫平行，它們的方向又相同(图 14)，那么合力$\vec{a}+\vec{b}$的作用綫和这二力的作用綫平行，其間的距离d_1和d_2有下面的关系：

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

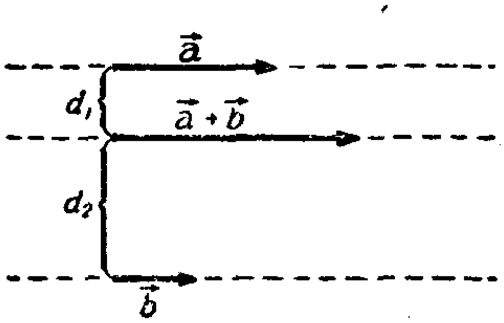

图 14.