高等学校教材

力学 下册

（理论力学）

梁昆淼 编

第三版

高等教育出版社

力　　学

下册（理论力学）

（第三版）

梁昆淼　编　　俞　超　马光群　修订

高等教育出版社

(京)112号

内容简介

本书第二版于1987年获国家教委高等学校优秀教材一等奖．此为第三版．这次修订，根据读者意见和修订者教学体会，在保持原书特点的同时，调整更换了某些内容，使下册相对独立于上册，起点也做了适度放低，以供物理类专业理论力学教学使用．下册内容包括：矢量力学，达朗伯原理，拉格朗日动力学，有心力，散射问题，微振动，刚体力学，哈密顿动力学，力学变分原理，正则变换，哈密顿-雅可俾方程，弹性体，流体运动学，流体动力学。

本书可作为综合大学、高等师范院校物理类专业或其他院校相近专业的教材，也可供中学教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

力学　下册：理论力学/梁昆淼编．—3版．—北京：高等教育出版社，1995

高等学校教材

ISBN 7-04-005173-7

I．力…　II．梁…　III．力学-理论力学-高等学校-教材

IV．①O3②O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第01079号

高等教育出版社出版

新华书店总店北京发行所发行

中国科学院印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 15　字数 380 000

1980年11月第2版

1995年5月第3版　1995年5月第1次印刷

印数 0001—4 142

定价 8.50 元

第三版序言

这次修订，注意保持前两版的风格。此外，特别注意使下册相对独立于上册，俾可供物理类专业理论力学的教学使用。

在前两版中，下册起点稍嫌偏高，这次适度放低。例如，矢量力学扩充为较长的一章，加以系统的具体论述，而不再是提纲挈领式的复习性的一节。

有心力、微振动、刚体定点运动，各设专章，用拉格朗日动力学处理，但也适当地引用矢量力学作为对照。我们希望这样既能体现分析力学简明、系统的优点，又可以体现矢量力学物理图象鲜明的优点。

在整个分析力学，尤其是哈密顿动力学及相关内容中，我们力图突出其不同于矢量力学的思考方法、其所具有的更大概括性以及引向近代物理的跳板作用。

这次修订，修改了个别提法，调整更换充实了某些内容。根据学时情况，有些内容可列为选讲，这些或用小字排印或在节码前用记号*标明。尤其是连续介质力学部分，如受学时限制，可以只保留初等的论述，而略去进一步的讨论。

此次特约的修订者俞超教授、马光群副教授，在南京大学物理系多年使用本书进行理论力学的教学，各自具体修订分工为：俞超负责第一、四、五、七、十一、十二各章及相应的习题，马光群负责第二、三、六、八、九、十各章及相应的习题。我参加了修订过程中的集体讨论。

我们期待着同行和读者的批评指正。

梁昆淼

1992年5月

目　　录

连续介质力学

第一章 矢量力学

研究力学，很自然从矢量力学开始．这就是说：用位移、速度、动量、加速度等矢量来描述运动，用力矢量表征物体之间的相互作用，机械运动基本规律也表述为牛顿运动定律之类的矢量定律．当然，功、动能、势能这些重要的力学量并不是矢量，但它们与力矢量、位移矢量有着密不可分的联系．

在展开具体论述之前，先要谈谈方法论方面的问题．

(a) **区分主要因素与次要因素** 任一物理现象总要牵涉到众多因素．我们必须把起决定性作用、主要作用、次要作用、微不足道作用的各种因素加以区分，否则即使对最简单的物理现象也不可能进行分析研究．针对某一特定问题所涉及的实际对象，应当只保留那些起决定性作用、主要作用的性质，必要时最多再考虑某些起次要作用的性质，坚决抛弃那些只起偶然作用或微不足道作用的因素，这样就把实际对象抽象为模型．例如，“质点”和“刚体”都是力学中常用的模型．

(b) **掌握与运用变量与常量之间的辩证关系** 初等物理学一般只考虑常量，例如匀速、匀加速、常力．但在客观世界中经常出现变速、变加速、变力．因此，首先需要学会在小区间上把变量作为常量处理再令小区间→0．具体说，就是用微分和积分处理变量．例如，对于 x 轴上的直线运动，

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\dot{x},\qquad a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\dot{v};$$

$$x=x_0+\lim_{\Delta\tau\to 0}\Sigma v(\tau)d\tau=x_0+\int^t v(\tau)d\tau,$$

$$v=v_0+\lim_{\Delta\tau\to 0}\Sigma a(\tau)d\tau=v_0+\int^t a(\tau)d\tau.$$

(c) **建立"代数式"思考方法** 初等物理所研究的问题虽然计算有繁有简，但性质上都是比较单纯的．人们往往可以从已知数直接算出某个未知数，接着又可利用已求数依次推算出第二个、第三个未知数，如此等等，即沿着一条"链"推算下去．但是，在客观世界的绝大多数现象中，各种物理量之间往往交织为错综复杂的"网"，"链"式推算法难以奏效．因此，应当通过具体分析，把已知、未知的各物理量间的错综复杂关系尽可能如实地表为"代数"方程，例如动力学中的运动方程．当然，这些方程很可能是微分方程，并不真的是代数方程．

§1. 质点运动学

为描述物体的机械运动，首先要选定**参考系**，运动就是相对于参考系来描述的．

(1) 质点的速度和加速度

在参考系上选定一点作为**原点**．质点的位置可用从原点到质点的**径矢** $\boldsymbol{r}$ 表示，质点的运动则由径矢随时间 t 的变化 $\boldsymbol{r}(t)$ 描述．

在一段时间 $\Delta t = t_2 - t_1$ 上，质点径矢的改变 $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ 叫做质点的**位移**．径矢对时间的平均变化率 $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ 叫做这段时间内的平均速度．令 $\Delta t \to 0$，平均速度 $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ 的极限

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.1}$$

叫做质点在该时刻的（**即时**）**速度** $\boldsymbol{v}(t)$．速度是矢量，它的大小 $= \lim\limits_{\Delta t \to 0}|\Delta \boldsymbol{r}|/\Delta t = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\Delta s/\Delta t = ds/dt$ 即速率 v，它的指向就是 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的极限指向即轨道的切向，以 $\boldsymbol{t}$ 为切向单位矢量，则 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{t}$．

速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 的时间变化率 $d\boldsymbol{v}/dt$ 即 $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ 叫做质点的（即

时)加速度 $\boldsymbol{a}(t)$. 作为速度的变化率，既要考虑速度大小的变化，也要考虑速度指向的变化. 即

$$\boldsymbol{a}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}=\frac{d}{dt}(v\boldsymbol{t})=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{t}+v\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}$$

这里还需要 $d\boldsymbol{t}/dt$ 的具体表达式. 参看图 1-1，设在时刻 t,质点经过点 A；很短时间 Δt 之后，在时刻 $t+\Delta t$，质点经过点 B. 在 A 和 B 分别作轨道的切向单位矢量 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t}$，这两个矢量大小相等而指向不同.(为清晰起见，A 与 B 的间距在图中是极为夸大了的. 事实上，A 与 B 很近，$\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t}$ 的指向差异极小.)为便于思考起见，从点 α 引矢量 $\overrightarrow{\alpha\beta}$ 与 $\overrightarrow{\alpha\gamma}$，前者等同于 $\boldsymbol{t}$，后者等同于 $\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t}$，那么 $\overrightarrow{\beta\gamma}$ 就是 $\Delta\boldsymbol{t}$. 容易看出，只要时间 Δt 很短，则 $\Delta\boldsymbol{t}$ 的大小几乎就等于 A 与 B 两点的切向之间所夹的角 $\Delta\theta$，而指向则既垂直于 $\boldsymbol{t}$ 也垂直于 $\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t}$，并指着轨道曲线的凹侧. 把指着轨道曲线凹侧的法向单位矢量记作 $\boldsymbol{n}$，那么，当 $\Delta t\to 0$，$\Delta\boldsymbol{t}\to\Delta\theta\boldsymbol{n}$，从而 $d\boldsymbol{t}/dt=\dot{\theta}\boldsymbol{n}$. 于是，质点的加速度

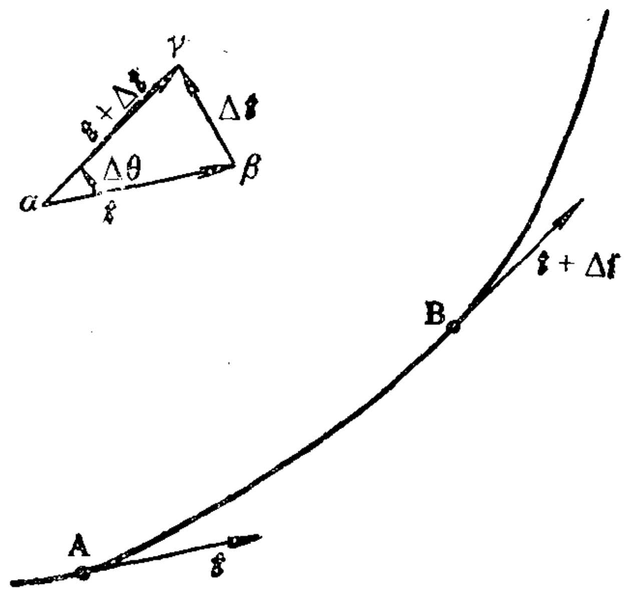

图 1-1

$$\boldsymbol{a}=\frac{d}{dt}(v\boldsymbol{t})=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{t}+v\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}=\dot{v}\boldsymbol{t}+v\dot{\theta}\boldsymbol{n}. \qquad (1.2)$$

这样，加速度的切向分量 a_t 为 $\dot{v}$ 而法向分量 a_n 为 $v\dot{\theta}$.

法向加速度 $v\dot{\theta}$ 中的 $\dot{\theta}$ 计算起来不很方便，让我们把它改写成较为方便的形式，这是不难做到的：

$$a_n=v\frac{d\theta}{dt}=v\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}=v^2\frac{d\theta}{ds}.$$

$d\theta/ds$ 是轨道曲线的一种几何性质，即曲线上极为相近的两点的切向之间的夹角与两点之间距离的比，亦即曲线在那里的弯曲程度，通常称为**曲率**。曲率的倒数 $ds/d\theta$ 称为**曲率半径**，兹记作 R。这样

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{1.3}$$

以上矢量式适合于进行一般的理论探讨，但在具体问题的计算中却以使用**坐标系**较为简便。

（2）直角坐标系

古典力学认为空间是欧几里德的，即平直而无弯曲的。在欧几里德空间中可以建立**直角坐标系**，而任一矢量$\boldsymbol{A}$ 可用直角坐标分量表示为 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$，其中

$$\begin{cases} A_x = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i} = A\cos\alpha, \\ A_y = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j} = A\cos\beta, \\ A_z = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k} = A\cos\gamma, \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \\ \cos\alpha = A_x/A, \\ \cos\beta = A_y/A, \\ \cos\gamma = A_z/A. \end{cases}$$

这样，在直角坐标系中，

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}, \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}. \tag{1.6}$$

（3）平面极坐标系

对于平面问题，还可以建立**平面极坐标系**。任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可用径向分量 A_ρ 与横向分量 A_φ 表示为 $\boldsymbol{A} = A_\rho\boldsymbol{i} + A_\varphi\boldsymbol{j}$，其中 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 分别是径向和横向单位矢量。注意 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 的指向随地点而异，因而 $d\boldsymbol{i}/dt$ 和 $d\boldsymbol{j}/dt$ 一般并不等于零。

为了计算 $d\boldsymbol{i}/dt$，作出对应于 t 和 $t+dt$ 两时刻的径向单

位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}+d\boldsymbol{i}$（图 1-2），这两个矢量的大小相同而指向不同。易见 $d\boldsymbol{i}$ 的大小等于 $d\varphi$；当 $dt\to 0$ 时，$d\boldsymbol{i}$ 的指向趋于 $\boldsymbol{j}$ 的指向，因而

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{j}=\dot{\varphi}\boldsymbol{j}.$$

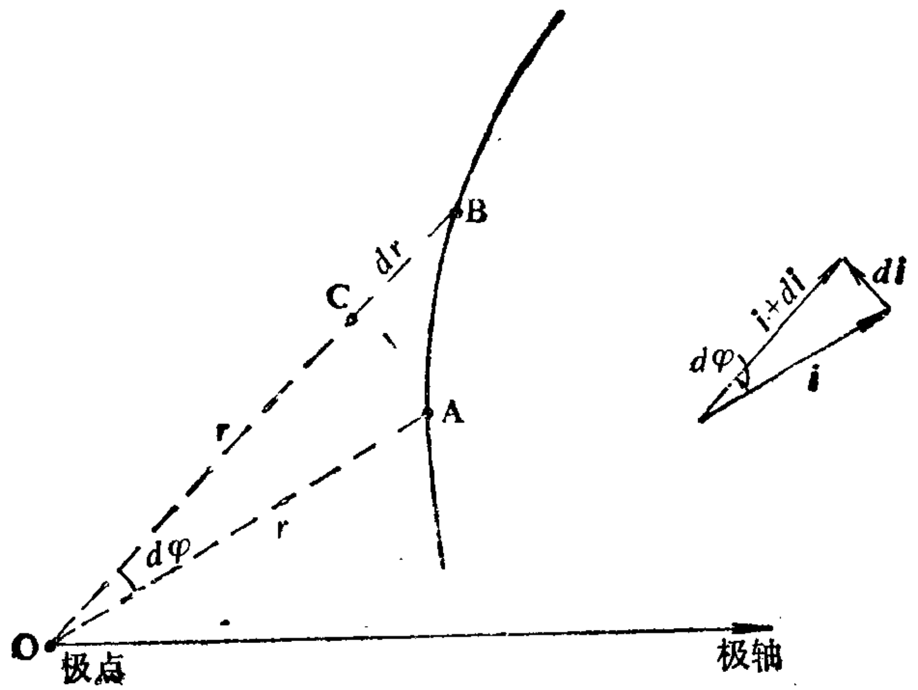

图 1-2

同理可以得出

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=-\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{i}=-\dot{\varphi}\boldsymbol{i}.$$

这样，在极坐标系中，

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{i}, \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{d}{dt}(\rho\boldsymbol{i})=\dot{\rho}\boldsymbol{i}+\rho\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\dot{\rho}\boldsymbol{i}+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{j}, \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{d}{dt}(v_\rho\boldsymbol{i}+v_\varphi\boldsymbol{j})=\dot{v}_\rho\boldsymbol{i}+v_\rho\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+\dot{v}_\varphi\boldsymbol{j}$$

$$+v_\varphi\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=\dot{v}_\rho\boldsymbol{i}+v_\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{j}+\dot{v}_\varphi\boldsymbol{j}$$

$$+ v_\varphi(-\dot{\varphi}\boldsymbol{i}) = (\dot{v}_\rho - v_\varphi\dot{\varphi})\boldsymbol{i} + (\dot{v}_\varphi + v_\rho\dot{\varphi})\boldsymbol{j}.$$

注意，径向加速度 $\dot{v}_\rho - v_\varphi\dot{\varphi}$ 不仅来自径向速度的大小变化（即 $\dot{v}_\rho$），而且也来自横向速度的方向变化（即 $-v_\varphi\dot{\varphi}$）；横向加速度不仅来自横向速度的大小变化（即 $\dot{v}_\varphi$），而且也来自径向速度的方向变化（即 $v_\rho\dot{\varphi}$）. 以 $v_\rho = \dot{\rho}$，$v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$ 代入 $\boldsymbol{a}$ 的式子，即得

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{i} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{j}. \tag{1.9}$$

运用极坐标系描述质点的运动，常常用到所谓**掠面速度**，即质点的径矢所掠过的面积与所用时间之比的极限值．参看图 1-2，在 dt 时间里，质点从 A 移到 B，径矢掠过曲边三角形 OAB．既然 dt 很小，曲边三角形 OAB 的面积可以认为就等于直边三角形 △OAB 的面积

$$\Delta S = \triangle OAB = \triangle OAC + \triangle CAB$$

$$= \frac{1}{2}(\rho d\varphi)\rho + \frac{1}{2}(\rho d\varphi)d\rho.$$

第二项比起第一项为高阶微量，不妨略去，从而

$$\dot{S} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\frac{1}{2}(\rho d\varphi)\rho\right\} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}. \tag{1.10}$$

例 1 一行星绕太阳沿椭圆轨道运动，其极坐标方程为 $\rho = p/(1 + e\cos\varphi)$，（其中 e 为离心率，p 是焦点参数），且在运动过程中径矢 $\boldsymbol{r}$ 的掠面速度为常量．（注意：这正符合开普勒关于行星运动的第一和第二定律，两定律的文字表述见 § 15．）求行星的加速度．

解 从题意知，行星可看作质点，它在作椭圆运动，椭圆的焦点即在极坐标系的原点上．

质点的加速度表达式为

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, & (1) \\ a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, & (2) \end{cases}$$

而 a_φ 又可表示为 $a_\varphi = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})$.

因为径矢的掠面速度为常量（记这常量为 $h/2$），即

$$\dot{S}=\frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}=\frac{1}{2}h, \tag{3}$$

亦即

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})=\frac{d}{dt}h=0,$$

所以 $a_\varphi=0$. 问题只剩下求 a_ρ.

由轨道方程 $\rho=p/(1+e\cos\varphi)$ 得 $p/\rho=1+e\cos\varphi$. 将此式两边对时间求导，得

$$-(p/\rho^2)\dot{\rho}=-e\dot{\varphi}\sin\varphi. \tag{4}$$

利用式(3)消去 $\dot{\varphi}$，得

$$\dot{\rho}=(he/p)\sin\varphi. \tag{5}$$

再求导一次，并再次利用式(3)消去 $\dot{\varphi}$，有

$$\ddot{\rho}=\frac{he}{p}\dot{\varphi}\cos\varphi=\frac{h^2e}{p\rho^2}\cos\varphi. \tag{6}$$

于是，

$$a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2=\frac{h^2e}{p\rho^2}\cos\varphi-\frac{h^2}{\rho^3}. \tag{7}$$

以轨道方程代入式(7)，得

$$a_\rho=\frac{h^2}{p\rho^2}\left(\frac{p}{\rho}-1\right)-\frac{h^2}{\rho^3}=-\frac{h^2}{p}\frac{1}{\rho^2}. \tag{8}$$

由 $a_\varphi=0$ 与式(8)可见，质点的加速度指向椭圆焦点而大小反比于其与焦点距离的平方. 此质点所受的力，当然也就是指向椭圆焦点而大小反比于其与焦点距离的平方.

本例从开普勒行星运动第一和第二定律出发，证明了质点所受的力是平方反比引力. 本书中 § 15(1) 将补充指出，考虑到开普勒行星运动第三定律(此定律的文字表述见 § 15)，则可证明此引力又正比于行星的质量. 这就引出了万有引力定律.

(4) 柱 坐 标 系

对于三维空间问题，可以在平面极坐标系的基础上加一垂直于平面极坐标系所在平面的 z 轴，构成**柱坐标系**(图 1-3). 任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{A}=A_\rho\boldsymbol{i}+A_\varphi\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k},$$

其中 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 的意义跟平面极坐标中的相同，$\boldsymbol{k}$ 是 z 轴上的单位矢量，$\boldsymbol{k}$ 不同于 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，它的指向不随地点而异.

这样，在柱坐标系中，质点的径矢、速度、加速度分别是:

$$\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}, \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\rho}\boldsymbol{i} + \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}, \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{i} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}. \tag{1.13}$$

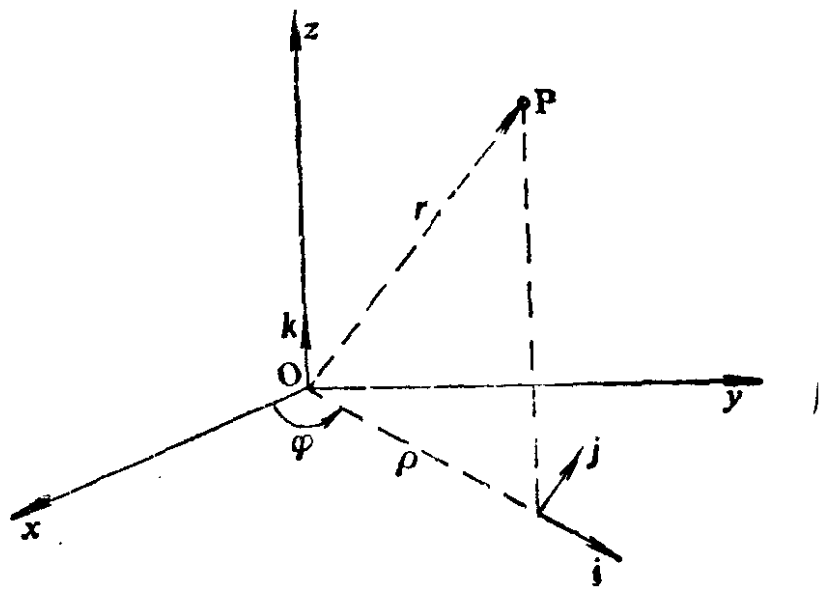

图 1-3

用分量形式，则

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

例 2 质点在一固定圆柱体上作螺旋运动，已知它的直角坐标为 $x = R\sin\omega t$，$y = R\cos\omega t$，$z = ut$，式中 R、ω、u 均为常数. 求它的轨道方程、速度和加速度(图 1-4).

解 1 应用前文所述的直角坐标系求解. 已知

$$\begin{cases} x = R\sin\omega t, & (1) \\ y = R\cos\omega t, & (2) \\ z = ut. & (3) \end{cases}$$

消去 t 得轨道方程