

高等学校教材

力学

下册

(理论力学)

梁昆森 编



第三版

高等教育出版社

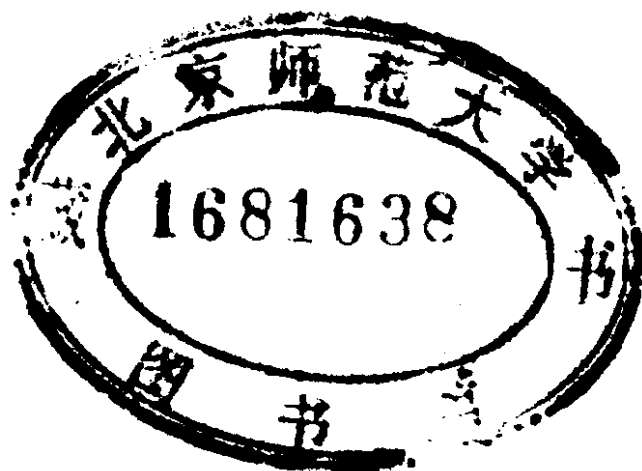
力 学

下册(理论力学)

(第三版)

梁昆森 编 俞超 修订
 马光群

1981.12.10



高等教育出版社

(京) 112 号

内 容 简 介

本书第二版于1987年获国家教委高等学校优秀教材一等奖。此为第三版。这次修订，根据读者意见和修订者教学体会，在保持原书特点的同时，调整更换了某些内容，使下册相对独立于上册，起点也做了适度放低，以供物理类专业理论力学教学使用。下册内容包括：矢量力学，达朗伯原理，拉格朗日动力学，有心力，散射问题，微振动，刚体力学，哈密顿动力学，力学变分原理，正则变换，哈密顿-雅可俾方程，弹性体，流体运动学，流体动力学。

本书可作为综合大学、高等师范院校物理类专业或其他院校相近专业的教材，也可供中学教师参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

力学 下册：理论力学/梁昆森编。—3版。—北京：高等教育出版社，1995

高等学校教材

ISBN 7-04-005173-7

I. 力… II. 梁… III. 力学-理论力学-高等学校-教材

IV. ①03②031

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 01079 号

高等教育出版社出版

新华书店总店北京发行所发行

中国科学院印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 15 字数 380 000

1980年11月第2版

1995年5月第3版 1995年5月第1次印刷

印数 0001—4 142

定价 8.50 元

第三版序言

这次修订,注意保持前两版的风格。此外,特别注意使下册相对独立于上册,俾可供物理类专业理论力学的教学使用。

在前两版中,下册起点稍嫌偏高,这次适度放低。例如,矢量力学扩充为较长的一章,加以系统的具体论述,而不再是提纲挈领式的复习性的一节。

有心力、微振动、刚体定点运动,各设专章,用拉格朗日动力学处理,但也适当地引用矢量力学作为对照。我们希望这样既能体现分析力学简明、系统的优点,又可以体现矢量力学物理图象鲜明的优点。

在整个分析力学,尤其是哈密顿动力学及相关内容中,我们力图突出其不同于矢量力学的思考方法、其所具有的更大概括性以及引向近代物理的跳板作用。

这次修订,修改了个别提法,调整更换充实了某些内容。根据学时情况,有些内容可列为选讲,这些或用小字排印或在节码前用记号*标明。尤其是连续介质力学部分,如受学时限制,可以只保留初等的论述,而略去进一步的讨论。

此次特约的修订者俞超教授、马光群副教授,在南京大学物理系多年使用本书进行理论力学的教学,各自具体修订分工为:俞超负责第一、四、五、七、十一、十二各章及相应的习题,马光群负责第二、三、六、八、九、十各章及相应的习题。我参加了修订过程中的集体讨论。

我们期待着同行和读者的批评指正。

梁昆森

1992年5月

目 录

第一章 矢量力学	1
§ 1. 质点运动学	2
(1) 质点的速度和加速度 (2) 直角坐标系 (3) 平面极坐标系	
(4) 柱坐标系 (5) 球坐标系 (6) 自然“坐标系”	
§ 2. 质点动力学基本定律	14
§ 3. 非惯性参考系	17
§ 4. 质点动力学运动定理	22
(1) 动量定理 (2) 角动量定理 (3) 动能定理	
§ 5. 质点组动力学	24
(1) 两体问题 (2) 质点组运动定理 (3) 非惯性系 质心系	
§ 6. 变质量质点动力学	29
§ 7. 刚体的平移、定轴转动、平面平行运动	35
(1) 运动学 (2) 动力学	

分 析 力 学

第二章 达朗伯原理	52
§ 8. 约束	52
(1) 约束及其分类 (2) 约束力 (3) 约束使问题复杂	
§ 9. 自由度与广义坐标	60
§ 10. 虚功原理 达朗伯原理	64
(1) 虚位移 (2) 虚功原理 (3) 广义坐标下的虚功原理 (4)	
主动力全是保守力的情况 (5) 约束力的求解——拉格朗日乘子	
法 (6) 达朗伯原理	
第三章 拉格朗日动力学	80
§ 11. 拉格朗日方程	80

(1) 广义坐标的引入 (2) 拉格朗日方程 (3) 主动力全是保守力的情况 (4) 广义动量守恒原理 (5) 哈密顿函数守恒原理	
*§ 12. 非完整系的动力学	98
*§ 13. 拉格朗日动力学的推广	105
第四章 有心力 散射问题	110
§ 14. 动力学方程及其解算	110
§ 15. 平方反比引力	115
(1) 开普勒行星运动定律 (2) 平方反比引力作用下的运动 (3) 椭圆运动的能量 (4) 圆轨道的稳定性	
§ 16. 人造地球卫星	126
(1) 环绕卫星 (2) 同步卫星 (3) 轨道卫星的自动姿态稳定	
§ 17. 散射问题	136
(1) 平方反比斥力 (2) 散射	
第五章 微振动	144
§ 18. 两个自由度的振动	144
§ 19. 分子的振动	154
§ 20. 微振动的一般理论	160
(1) 拉格朗日函数 (2) 化平方和 (3) 直接求解 (4) 证明 $\lambda^2 < 0$ (5) 矩阵表述	
*§ 21. 非线性振动	171
*§ 22. 参数共振	175
第六章 刚体力学	180
§ 23. 刚体运动学	180
(1) 自由刚体的自由度 (2) 刚体的运动 (3) 刚体里各点的运动 (4) 基点的选取 (5) 角速度矢量 (6) 转动的矩阵表述 (7) 欧拉角	
§ 24. 刚体动力学	194
(1) 刚体的角动量和动能 (2) 惯量张量 惯量椭球 (3) 欧拉方程 (4) 拉格朗日方程 (5) 动能定理	
§ 25. 无外力矩的定点运动(欧拉-班锁情况)	211

(1) 对称刚体 (2) 非对称刚体 (3) 动平衡的稳定性	
§ 26. 对称重刚体的定点运动(拉格朗日-泊松情况).....	219
(1) 欧拉方程 (2) 拉格朗日方程 (3) 解算与阐释 (4) 简明的解释	
*§ 27. 带电的旋转物体在磁场中的旋进(拉莫尔旋进).....	226
第七章 哈密顿动力学	228
§ 28. 哈密顿正则方程	228
(1) 哈密顿正则方程 (2) 勒让德变换 (3) 守恒原理 (4) 例题	
*§ 29. 刘维定理.....	247
*§ 30. 位力定理	251
§ 31. 泊松括号	256
(1) 力学量的时间变化率 (2) 泊松括号 (3) 雅可俾恒等式 (4) 量子力学中的泊松括号	
第八章 力学变分原理	266
§ 32. 变分法初步	267
(1) 泛函 (2) 变分问题 (3) 欧拉方程 (4) 附加条件下的变分问题	
§ 33. 哈密顿原理	274
§ 34. 最小作用量原理	279
(1) 可遗坐标和哈密顿原理 (2) 雅可俾最小作用量原理	
第九章 正则变换 哈密顿-雅可俾方程	284
§ 35. 正则变换	284
(1) 正则变换的条件 (2) 母函数 (3) 正则变换举例 (4) 泊松括号的不变性 (5) 无限小正则变换	
§ 36. 哈密顿-雅可俾方程	297
(1) 哈密顿主函数 (2) 哈密顿特征函数 (3) 例题	
*§ 37. 作用量变数与角变数	305
*§ 38. 浸渐不变量	312
*§ 39. 正则微扰理论	314
*§ 40. 从“几何力学”到波动力学	317

(1) 从波动光学到几何光学 (2) 从“几何力学”到波动力学

连续介质力学

第十章 弹性体	326
§ 41. 张变(或长变)	326
(1) 胡克定律 杨氏模量 (2) 泊松比 一般情况下的胡克定律	
(3) 体积的改变 容积弹性模量 (4) 弹性限度 极限强度	
§ 42. 切变(或剪变)	332
(1) 切变 (2) 纯切变 (3) 切变模量与杨氏模量的关系 (4)	
切变弹性势能密度	
§ 43. 圆杆的扭转	337
§ 44. 杆的弯曲	341
(1) 单纯弯曲 (2) 关于截面的形状 (3) 带有切变的弯曲	
*§ 45. 胁变的一般分析	349
(1) 胁变张量 (2) 胁变主轴 (3) 体胀系数 (4) 相容条件	
*§ 46. 胁强的一般分析	357
(1) 胁强张量 (2) 胁强主轴 (3) 胁强与胁变之间的关系 (4)	
相容条件	
*§ 47. 弹性体静力学	363
*§ 48. 弹性体动力学	370
(1) 动力学基本方程 (2) 哈密顿原理 拉格朗日方程 (3) 弹性体中的波动	
第十一章 流体运动学	375
§ 49. 流体运动学的特点	375
(1) 着重研究速度场 (2) 迹线与流线 (3) 当地变化率与实体变化率	
*§ 50. 速度场的分析	380
(1) 速度场的一般分析 (2) 有旋流动与无旋流动 (3) 连续性方程	
第十二章 流体动力学	395

§ 51. 流体动力学的特点	395
§ 52. 流体静力学	397
(1) 流体的平衡方程 (2) 静止液体的自由表面 (3) 不可压缩 流体中的静压强分布 (4) 可压缩流体中的静压强分布	
§ 53. 理想流体稳恒流动的运动定理	402
(1) 动量定理 (2) 伯努利定理	
*§ 54. 无粘滞流体动力学	412
(1) 欧拉方程 (2) 欧拉方程的第一次积分 (3) 涡旋动力学 (4) 绕流对物体的作用力 (5) 欧拉方程的线性近似	
§ 55. 粘滞流体	419
(1) 粘滞系数 (2) 直圆管的流量公式 (3) 运动定理	
*§ 56. 粘滞流体动力学方程	426
(1) 纳维尔-斯托克斯方程 (2) 雷诺数 (3) 边界层 [附]球体 所受粘滞阻力	
附录	435
习题	435
答案	461

第一章 矢量力学

研究力学，很自然从矢量力学开始。这就是说：用位移、速度、动量、加速度等矢量来描述运动，用力矢量表征物体之间的相互作用，机械运动基本规律也表述为牛顿运动定律之类的矢量定律。当然，功、动能、势能这些重要的力学量并不是矢量，但它们与力矢量、位移矢量有着密不可分的联系。

在展开具体论述之前，先要谈谈方法论方面的问题。

(a) **区分主要因素与次要因素** 任一物理现象总要牵涉到众多因素。我们必须把起决定性作用、主要作用、次要作用、微不足道作用的各种因素加以区分，否则即使对最简单的物理现象也不可能进行分析研究。针对某一特定问题所涉及的实际对象，应当只保留那些起决定性作用、主要作用的性质，必要时最多再考虑某些起次要作用的性质，坚决抛弃那些只起偶然作用或微不足道作用的因素，这样就把实际对象抽象为模型。例如，“质点”和“刚体”都是力学中常用的模型。

(b) **掌握与运用变量与常量之间的辩证关系** 初等物理学一般只考虑常量，例如匀速、匀加速、常力。但在客观世界中经常出现变速、变加速、变力。因此，首先需要学会在小区间上把变量作为常量处理再令小区间 $\rightarrow 0$ 。具体说，就是用微分和积分处理变量。例如，对于 x 轴上的直线运动，

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}, \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v};$$

$$x = x_0 + \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \sum v(\tau) d\tau = x_0 + \int v(\tau) d\tau,$$

$$v = v_0 + \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \sum a(\tau) d\tau = v_0 + \int a(\tau) d\tau.$$

(c) **建立“代数式”思考方法** 初等物理所研究的问题虽然计算有繁有简，但性质上都是比较单纯的。人们往往可以从已知数直接算出某个未知数，接着又可利用已求数依次推算出第二个、第三个未知数，如此等等，即沿着一条“链”推算下去。但是，在客观世界的绝大多数现象中，各种物理量之间往往交织为错综复杂的“网”，“链”式推算法难以奏效。因此，应当通过具体分析，把已知、未知的各物理量间的错综复杂关系尽可能如实地表为“代数”方程，例如动力学中的运动方程。当然，这些方程很可能是微分方程，并不真的是代数方程。

§ 1. 质点运动学

为描述物体的机械运动，首先要选定**参考系**，运动就是相对于参考系来描述的。

(1) 质点的速度和加速度

在参考系上选定一点作为**原点**。质点的位置可用从原点到质点的**径矢** \mathbf{r} 表示，质点的运动则由径矢随时间 t 的变化 $\mathbf{r}(t)$ 描述。

在一段时间 $\Delta t = t_2 - t_1$ 上，质点径矢的改变 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ 叫做质点的**位移**。径矢对时间的平均变化率 $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$ 叫做这段时间内的平均速度。令 $\Delta t \rightarrow 0$ ，平均速度 $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$ 的极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1.1)$$

叫做质点在该时刻的（即时）**速度** $\mathbf{v}(t)$ 。速度是矢量，它的大小 $= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta \mathbf{r}| / \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s / \Delta t = ds/dt$ 即速率 v ，它的指向就是 $\Delta \mathbf{r}$ 的极限指向即轨道的切向，以 \mathbf{t} 为切向单位矢量，则 $\mathbf{v} = vt$ 。

速度 $\mathbf{v}(t)$ 的时间变化率 $d\mathbf{v}/dt$ 即 $d^2\mathbf{r}/dt^2$ 叫做质点的（即

时)加速度 $a(t)$ 。作为速度的变化率,既要考虑速度大小的变化,也要考虑速度指向的变化。即

$$a = \frac{d}{dt} v = \frac{d}{dt} (vt) = \frac{dv}{dt} t + v \frac{dt}{dt}$$

这里还需要 dt/dt 的具体表达式。参看图 1-1, 设在时刻 t , 质点经过点 A; 很短时间 Δt

之后, 在时刻 $t + \Delta t$, 质点经过点 B。在 A 和 B 分别作轨道的切向单位矢量 t 和 $t + \Delta t$, 这两个矢量大小相等而指向不同。(为清晰起见, A 与 B 的间距在图中是极为夸大的了。

事实上, A 与 B 很近, t 和 $t + \Delta t$ 的指向差异极小。)为便于思考起见, 从

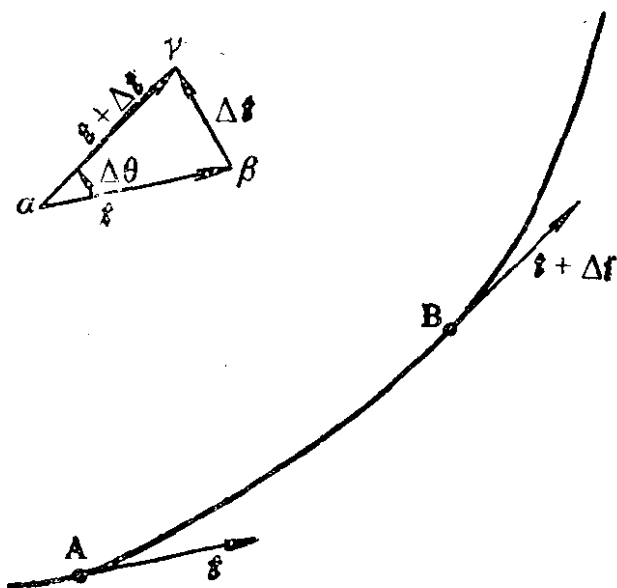


图 1-1

点 α 引矢量 $\alpha\beta$ 与 $\alpha\gamma$, 前者等同于 t , 后者等同于 $t + \Delta t$, 那么 $\beta\gamma$ 就是 Δt 。容易看出, 只要时间 Δt 很短, 则 Δt 的大小几乎就等于 A 与 B 两点的切向之间所夹的角 $\Delta\theta$, 而指向则既垂直于 t 也垂直于 $t + \Delta t$, 并指着轨道曲线的凹侧。把指着轨道曲线凹侧的法向单位矢量记作 n , 那么, 当 $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow \Delta\theta n$, 从而 $dt/dt = \dot{\theta}n$ 。于是, 质点的加速度

$$a = \frac{d}{dt} (vt) = \frac{dv}{dt} t + v \frac{dt}{dt} = \dot{v}t + v\dot{\theta}n. \quad (1.2)$$

这样, 加速度的切向分量 a_t 为 \dot{v} 而法向分量 a_n 为 $v\dot{\theta}$ 。

法向加速度 $v\dot{\theta}$ 中的 $\dot{\theta}$ 计算起来不很方便, 让我们把它改写成较为方便的形式, 这是不难做到的:

$$a_n = v \frac{d\theta}{dt} = v \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = v^2 \frac{d\theta}{ds}$$

$d\theta/ds$ 是轨道曲线的一种几何性质, 即曲线上极为相近的两点的切向之间的夹角与两点之间距离的比, 亦即曲线在那里的弯曲程度, 通常称为**曲率**。曲率的倒数 $ds/d\theta$ 称为**曲率半径**, 兹记作 R 。这样

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (1.3)$$

以上矢量式适合于进行一般的理论探讨, 但在具体问题的计算中却使用**坐标系**较为简便。

(2) 直角坐标系

古典力学认为空间是欧几里德的, 即平直而无弯曲的。在欧几里德空间中可以建立**直角坐标系**, 而任一矢量 \mathbf{A} 可用直角坐标分量表示为 $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$, 其中

$$\begin{cases} A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A \cos \alpha, \\ A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A \cos \beta, \\ A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A \cos \gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \\ \cos \alpha = A_x / A, \\ \cos \beta = A_y / A, \\ \cos \gamma = A_z / A. \end{cases}$$

这样, 在直角坐标系中,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \quad (1.6)$$

(3) 平面极坐标系

对于平面问题, 还可以建立**平面极坐标系**。任一矢量 \mathbf{A} 可用径向分量 A_ρ 与横向分量 A_φ 表示为 $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{i} + A_\varphi \mathbf{j}$, 其中 \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 分别是径向和横向单位矢量。注意 \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 的指向随地点而异, 因而 $d\mathbf{i}/dt$ 和 $d\mathbf{j}/dt$ 一般并不等于零。

为了计算 $d\mathbf{i}/dt$, 作出对应于 t 和 $t + dt$ 两时刻的径向单

位矢量 $i, i + di$ (图 1-2), 这两个矢量的大小相同而指向不同。易见 di 的大小等于 $d\varphi$; 当 $dt \rightarrow 0$ 时, di 的指向趋于 j 的指向, 因而

$$\frac{di}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} j = \dot{\varphi} j.$$

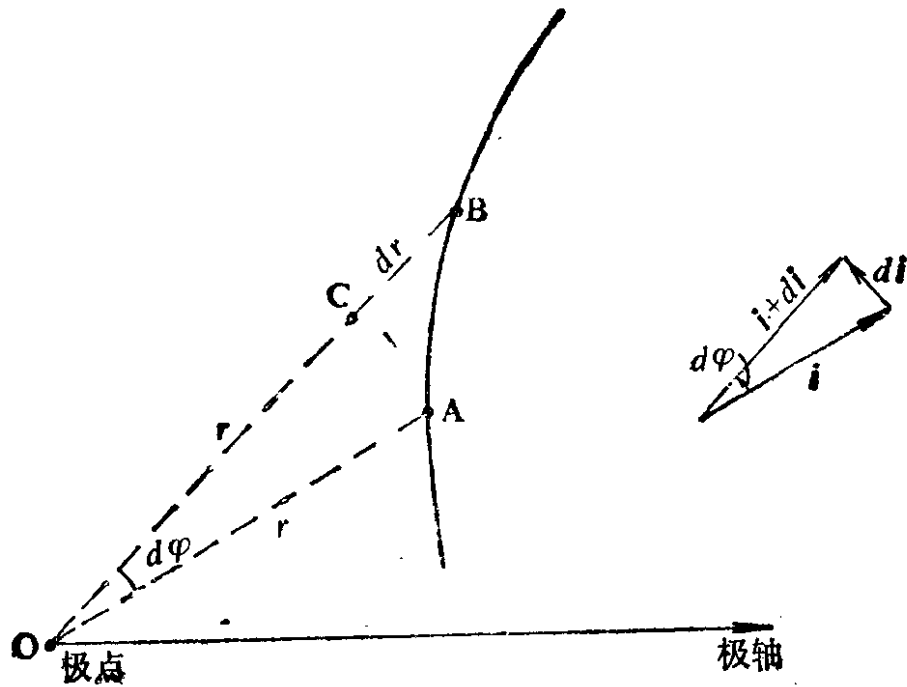


图 1-2

同理可以得出

$$\frac{dj}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} i = -\dot{\varphi} i.$$

这样, 在极坐标系中,

$$r = \rho i, \quad (1.7)$$

$$v = \dot{r} = \frac{d}{dt}(\rho i) = \dot{\rho} i + \rho \frac{di}{dt} = \dot{\rho} i + \rho \dot{\varphi} j, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} a = \dot{v} &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho} i + \rho \dot{\varphi} j) = \ddot{\rho} i + \dot{\rho} \frac{di}{dt} + \dot{\rho} \dot{\varphi} j + \rho \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \\ &+ \rho \dot{\varphi} \frac{dj}{dt} = \ddot{\rho} i + \dot{\rho} \dot{\varphi} j + \rho \ddot{\varphi} j + \rho \dot{\varphi} \dot{\varphi} i \end{aligned}$$

$$+ v_{\varphi}(-\dot{\varphi}i) = (\dot{v}_{\rho} - v_{\varphi}\dot{\varphi})i + (\dot{v}_{\varphi} + v_{\rho}\dot{\varphi})j.$$

注意, 径向加速度 $\dot{v}_{\rho} - v_{\varphi}\dot{\varphi}$ 不仅来自径向速度的大小变化 (即 \dot{v}_{ρ}), 而且也来自横向速度的方向变化 (即 $-v_{\varphi}\dot{\varphi}$); 横向加速度不仅来自横向速度的大小变化 (即 \dot{v}_{φ}), 而且也来自径向速度的方向变化 (即 $v_{\rho}\dot{\varphi}$). 以 $v_{\rho} = \dot{\rho}$, $v_{\varphi} = \rho\dot{\varphi}$ 代入 \boldsymbol{a} 的式子, 即得

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{i} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{j}. \quad (1.9)$$

运用极坐标系描述质点的运动, 常常用到所谓**掠面速度**, 即质点的径矢所掠过的面积与所用时间之比的极限值. 参看图 1-2, 在 dt 时间里, 质点从 A 移到 B, 径矢掠过曲边三角形 OAB. 既然 dt 很小, 曲边三角形 OAB 的面积可以认为就等于直边三角形 $\triangle OAB$ 的面积

$$\Delta S = \triangle OAB = \triangle OAC + \triangle CAB$$

$$= \frac{1}{2}(\rho d\varphi)\rho + \frac{1}{2}(\rho d\varphi)d\rho.$$

第二项比起第一项为高阶微量, 不妨略去, 从而

$$\dot{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{1}{2}(\rho d\varphi)\rho \right\} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}. \quad (1.10)$$

例 1 一行星绕太阳沿椭圆轨道运动, 其极坐标方程为 $\rho = p/(1 + e \cos \varphi)$, (其中 e 为离心率, p 是焦点参数), 且在运动过程中径矢 r 的掠面速度为常量. (注意: 这正符合开普勒关于行星运动的第一和第二定律, 两定律的文字表述见 § 15.) 求行星的加速度.

解 从题意知, 行星可看作质点, 它在作椭圆运动, 椭圆的焦点即在极坐标系的原点上.

质点的加速度表达式为

$$\begin{cases} a_{\rho} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, & (1) \\ a_{\varphi} = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, & (2) \end{cases}$$

而 a_{φ} 又可表示为 $a_{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2\dot{\varphi})$.

因为径矢的掠面速度为常量 (记这常量为 $h/2$), 即

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} h, \quad (3)$$

亦即 $\frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) = \frac{d}{dt} h = 0,$

所以 $a_\varphi = 0$. 问题只剩下求 a_ρ .

由轨道方程 $\rho = p/(1 + e \cos \varphi)$ 得 $p/\rho = 1 + e \cos \varphi$. 将此式两边对时间求导, 得

$$-(p/\rho^2)\dot{\rho} = -e\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (4)$$

利用式(3)消去 $\dot{\varphi}$, 得

$$\dot{\rho} = (he/p) \sin \varphi. \quad (5)$$

再求导一次, 并再次利用式(3)消去 $\dot{\varphi}$, 有

$$\ddot{\rho} = \frac{he}{p} \dot{\varphi} \cos \varphi = \frac{h^2 e}{p \rho^2} \cos \varphi. \quad (6)$$

于是,
$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 = \frac{h^2 e}{p \rho^2} \cos \varphi - \frac{h^2}{\rho^3}. \quad (7)$$

以轨道方程代入式(7), 得

$$a_\rho = \frac{h^2}{p \rho^3} \left(\frac{p}{\rho} - 1 \right) - \frac{h^2}{\rho^3} = -\frac{h^2}{p} \frac{1}{\rho^2}. \quad (8)$$

由 $a_\varphi = 0$ 与式(8)可见, 质点的加速度指向椭圆焦点而大小反比于其与焦点距离的平方. 此质点所受的力, 当然也就是指向椭圆焦点而大小反比于其与焦点距离的平方.

本例从开普勒行星运动第一和第二定律出发, 证明了质点所受的力是平方反比引力. 本书中 § 15(1) 将补充指出, 考虑到开普勒行星运动第三定律 (此定律的文字表述见 § 15), 则可证明此引力又正比于行星的质量. 这就引出了万有引力定律.

(4) 柱坐标系

对于三维空间问题, 可以在平面极坐标系的基础上加一垂直于平面极坐标系所在平面的 z 轴, 构成柱坐标系 (图 1-3). 任一矢量 \mathbf{A} 可以表示为

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{i} + A_\varphi \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

其中 i 和 j 的意义跟平面极坐标中的相同, k 是 z 轴上的单位矢量, k 不同于 i 和 j , 它的指向不随地点而异.

这样, 在柱坐标系中, 质点的径矢、速度、加速度分别是:

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{i} + z \mathbf{k}, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{i} + \rho \dot{\varphi} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{i} + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k}. \quad (1.13)$$

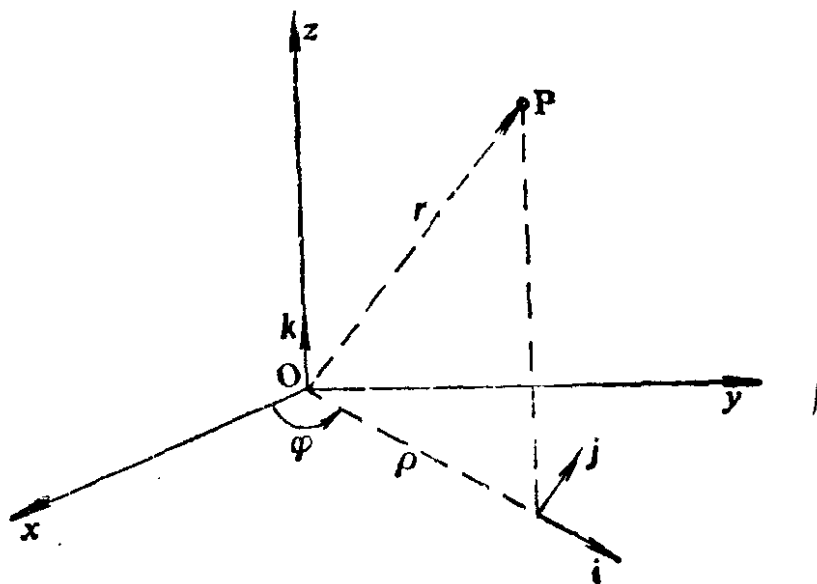


图 1-3

用分量形式, 则

$$v_{\rho} = \dot{\rho}, \quad v_{\varphi} = \rho \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}$$

$$a_{\rho} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad a_{\varphi} = \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

例 2 质点在一固定圆柱体上作螺旋运动, 已知它的直角坐标为 $x = R \sin \omega t$, $y = R \cos \omega t$, $z = ut$, 式中 R 、 ω 、 u 均为常数. 求它的轨道方程、速度和加速度(图 1-4).

解 1 应用前文所述的直角坐标系求解. 已知

$$\begin{cases} x = R \sin \omega t, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = R \cos \omega t, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = ut. & (3) \end{cases}$$

消去 t 得轨道方程