

吕沅熙 等 编

天津大学出版社

高等数学的 理论与方法

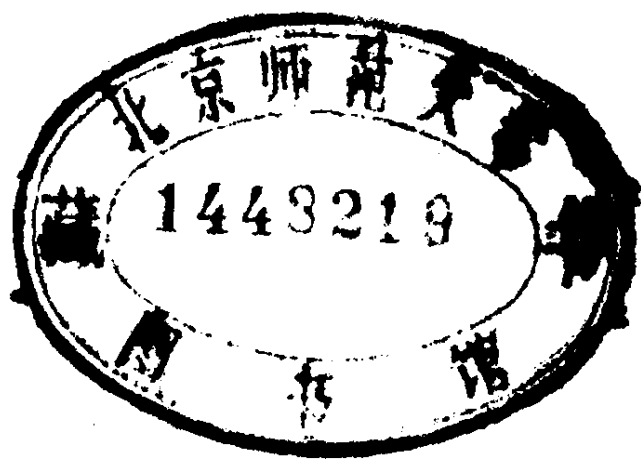
学习指导

2011-15/09

高等数学的理论与方法

——学习指导——

吕沅熙 等编



天津大学出版社

1987.6.

高等数学的理论与方法

—学习指导—

吕沅熙等编

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

天津大学出版社印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

开本：787×1092 毫米 $1\frac{1}{32}$ 印张：14 $\frac{3}{4}$ 字数：386 千字

1987 年 3 月第一版 1987 年 3 月第一次印刷

印数：1—15000

ISBN 7-5618-0008-8

统一书号：13401·8

定 价：2.40 元

内 容 提 要

本书依据国家教育委员会工科高等数学课程教学指导委员会1986年制定的教学基本要求，并参照1986年公布的工科硕士研究生入学考试高等数学考试大纲的要求编写。全书对高等数学的理论和方法作了比较系统的总结和概括，注重典型问题与例题的分析，以培养读者综合运用有关知识解决问题的能力。书中每节节首一般配有本节的内容提要，各章末安排有适量练习题，书末附有练习题的参考答案。

本书是高等数学教学的参考书和学习指导书，对理工院校学生学习和复习高等数学具有指导作用，对准备硕士研究生入学考试者尤为适宜。本书也可作为电视大学、夜大学、函授大学及自学高等数学等方面读者的参考书，还可供从事工科高等数学教学的教师参考。

前 言

高等数学是理工院校一门重要的基础理论课，内容丰富，应用广泛。初学者往往感到内容庞杂，不得要领。即使学完高等数学课程的一些学生，也常感到对某些内容体会不深，运用不活，在解决综合性问题时，尤感困难。为了比较系统深入地掌握高等数学的理论和方法，并能综合运用这些知识去分析和解决问题，除了学习教科书之外，适当阅读一些参考资料是有益的。

本书内容的选择，依据国家教育委员会工科高等数学课程教学指导委员会1986年制定的教学基本要求，对内容做了比较系统的总结和概括，并参照1986年公布的工科硕士研究生入学考试的高等数学考试大纲作了适当补充。内容的编排不拘泥于高等数学的传统体系，在阐述某一章节的问题时，往往涉及其它章节的内容，对一些基本概念做了横向和纵向的比较。对解题的基本方法，则按问题类型做了归纳和总结。本书强调理论与方法的综合运用。通过典型例题（其中许多例题是历届研究生的入学试题）的阐述和分析，启发思路，以便读者掌握更多的解题技巧和提高综合运用高等数学知识的能力。

本书可作为理工院校高等数学课程的教学参考书和学习指导书，也可供电视大学、夜大学、函授大学和自学高等数学等方面的读者参考，对准备硕士研究生入学考试者尤为适宜。

全书共分八章。第一章由吕沅熙编写，第二、三章由杨凤翔编写，第四章由蔡高厅编写，第五、六章由叶宗泽编写，第七、八章由杨万禄编写。

本书在编写过程中得到天津大学数学系和天津大学出版社的热情支持，对此表示深切的感谢。

本书的缺点和错误，恳望读者批评指正。

编 者

1986. 12.

目 录

第一章 函数、极限、连续.....	(1)
第一节 函数的概念.....	(2)
第二节 函数的类型.....	(8)
第三节 极限的概念.....	(14)
第四节 求极限的方法.....	(20)
第五节 函数的连续性及连续函数的性质.....	(36)
习题一	(40)
第二章 单元函数微分学.....	(45)
第一节 导数与微分的概念.....	(45)
第二节 微分法.....	(54)
第三节 微分中值定理.....	(72)
第四节 函数性态的研究.....	(82)
习题二	(103)
第三章 单元函数积分学.....	(108)
第一节 不定积分.....	(108)
第二节 定积分的概念和性质.....	(127)
第三节 定积分的计算.....	(139)
第四节 广义积分.....	(150)
第五节 定积分的应用.....	(157)
习题三	(161)
第四章 多元函数微分学.....	(167)
第一节 多元函数的基本概念.....	(167)
第二节 复合函数与隐函数的微分法.....	(181)
第三节 多元函数的极值及其应用.....	(196)
第四节 偏导数的几何应用.....	(205)
习题四	(210)

第五章 重积分	(215)
第一节 重积分的概念和性质	(215)
第二节 重积分的计算	(222)
第三节 重积分的应用	(248)
习题五	(261)
第六章 曲线积分与曲面积分	(267)
第一节 两类曲线积分的概念和计算	(268)
第二节 两类曲面积分的概念和计算	(287)
第三节 曲线(面)积分与曲线(面)无关的条件与应用	(300)
第四节 线、面积分的应用	(310)
习题六	(317)
第七章 级数	(323)
第一节 数项级数敛散性的判别方法	(324)
第二节 幂级数	(345)
第三节 函数展开为幂级数	(353)
第四节 级数求和	(363)
第五节 幂级数在近似计算上的应用举例	(372)
第六节 函数项级数的一致收敛性及其基本性质	(375)
第七节 富里叶级数	(382)
习题七	(398)
第八章 微分方程	(404)
第一节 一阶微分方程的类型及解法	(404)
第二节 几种可降阶的高阶微分方程	(419)
第三节 线性微分方程	(421)
第四节 常系数线性微分方程组的解法举例	(437)
第五节 微分方程的应用	(440)
习题八	(447)
习题答案	(451)

第一章 函数、极限、连续

高等数学是研究函数的数学，内容包括单元及多元函数的微积分学、无穷级数论和常微分方程。高等数学与初等数学不同，初等数学研究事物的静止状态，以常量为研究对象；高等数学研究事物的运动，以变量及函数为研究对象。由于研究对象不同，它们在研究方法上也有根本区别。初等数学用静止的观点研究问题，高等数学用运动的观点、辩证的观点研究问题。极限方法就是这种研究方法的具体表现。它是高等数学的基本分析方法。函数的连续性是函数的一个重要属性，这个概念需用极限来说明。连续函数具有许多特性，是高等数学主要的研究对象。因此，函数、极限、连续是高等数学理论的基础。

本章内容为单元函数的概念，单元函数的极限及连续。关于多元函数的概念、多元函数的极限及连续安排在第四章。本章的基本要求是理解函数的概念；了解函数的类型和性质；理解极限的概念；掌握求极限的方法；理解函数的连续及间断的概念；了解连续函数的性质。

本章主要讨论以下五个问题：

1. 函数的概念；
2. 函数的类型；
3. 极限的概念；
4. 求极限的方法；
5. 函数的连续性及连续函数的性质。

✱ ✱

1. **函数的概念** 若变量 x 在某一实数集合 X 中每取一个值, 变量 y 都有一个确定的值与它对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记为

x 称为自变量, y 称为因变量. 集合 X 称为函数的定义域. 确定 y 与 x 对应的规律称为函数的对应规律. 当 x 遍取 X 的所有实数时, 对应的函数值全体所组成的集合 Y 称为函数的值域.

(1) 表格法;
(2) 图形法;
(3) 解析式法。用解析式表示的函数有显函数、隐函数及参量函数几种形式。

(1) 有界性 若存在正数 M 使函数 $f(x)$ 在区间 I 内恒满足不等式 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界, 否则称为无界.

若当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称函数

式表示的函数定义域，一般是根据解析式所含的运算进行综合分析求得。在求函数定义域的同时也要注意函数的无定义之点，因为函数的某些特性，如函数的间断点、函数的无界性等往往在这些点处表现出来。对于函数的对应规律，特别是对其符号“ f ”要有正确的理解并能熟练运用。在做题中常常因为对符号“ f ”理解不正确而产生错误，在下面的例题中将得到说明。

例 1.1.1 设 $f(x) = \ln(3-x) + \frac{1}{\sqrt{49-x^2}}$ ，求

(1) $f(x)$ 的定义域；

(2) $f(x-a) + f(x+a)$ ($a > 0$) 的定义域。

解 (1) 当 x 满足不等式 $3-x > 0$ 及 $49-x^2 > 0$ 时，函数 $f(x)$ 有确定值。解此联立不等式得 $-7 < x < 3$ ，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-7, 3)$ 。

(2) 根据 (1) 的结果，当 x 满足不等式 $-7 < x-a < 3$ 及 $-7 < x+a < 3$ 时， $f(x-a) + f(x+a)$ 有确定值，因为 $a > 0$ ，解此联立不等式，当 $0 < a < 5$ 时有公共解 $-7+a < x < 3-a$ 。所以，当 $0 < a < 5$ 时， $f(x-a) + f(x+a)$ 的定义域为 $(-7+a, 3-a)$ 。

例 1.1.2 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ， $f_1(x) = f(x)$ ，

$f_2(x) = f[f_1(x)]$ ， $\dots$ ， $f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$ ，求 $f_n(x)$ 。

解 $f_1(x) = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ，

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f[f_1(x)] = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} / \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}, \end{aligned}$$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} / \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

应用数学归纳法, 设 $n = k$, $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, 则 $n = k+1$ 时有

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= f[f_k(x)] = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}} / \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}, \end{aligned}$$

所以

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

例 1.1.3 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{当 } |x| > 1; \end{cases}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2-x^2, & \text{当 } |x| \leq 2, \\ 2, & \text{当 } |x| > 2, \end{cases} \quad \text{求 } \varphi[\varphi(x)], f[\varphi(x)].$$

解 设 $u = \varphi(x)$, 则当 $|x| \leq 2$ 时, $|u| = |2-x^2| \leq 2$, 当 $|x| > 2$ 时, $|u| = 2$. 根据 $\varphi(x)$ 的定义域的分段情况得

$$\varphi[\varphi(x)] = \varphi[u] = \begin{cases} 2-(2-x^2)^2 = -2+4x^2-x^4, & \text{当 } |x| \leq 2, \\ 2-2^2 = -2, & \text{当 } |x| > 2. \end{cases}$$

计算 $f[\varphi(x)]$ 时, 根据 $f(x)$ 的定义域的分段情况, 需求解不等式 $|u| = |2-x^2| \leq 1$ ($|x| \leq 2$), 解此不等式得 $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$, 所以

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0, & \text{当 } |x| < 1, \\ 1, & \text{当 } 1 \leq |x| \leq \sqrt{3}, \\ 0, & \text{当 } |x| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

在函数问题中还有一类求未知函数的问题。简单的情形仅涉及未知函数的函数值, 如下面的例 1.1.4—例 1.1.7; 复杂的情形要涉及未知函数的导数和积分, 这就是微分方程和积分方程了

~~$x = \sin \frac{x'}{2}$~~
 ~~$2 \cos \sin x = \frac{x'}{2}$~~
 ~~$f(x) = \cos 2 \arcsin \cos x + 1$~~

(参看第八章)

例 1.1.4 设 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1$, 求 $f(x)$.

解 在这里应注意 $\cos x + 1$ 不是所求 $f(x)$, 它是函数 $f(x)$ 当自变量为 $\sin \frac{x}{2}$ 的对应值. 这类问题可用 变量替换法 求解:

设 $u = \sin \frac{x}{2}$, 则 $x = 2 \arcsin u$, 于是

$$\begin{aligned} f\left(\sin \frac{x}{2}\right) &= f(u) = \cos(2 \arcsin u) + 1 = 1 - 2 \sin^2(\arcsin u) + 1 \\ &= 2 - 2u^2, \end{aligned}$$

或写为 $f(x) = 2 - 2x^2$.

此题另一解法是将 $\cos x + 1$ 化为以 $\sin \frac{x}{2}$ 为变元的函数, 即

$$\begin{aligned} f\left(\sin \frac{x}{2}\right) &= \cos x + 1 = \cos\left(2 \frac{x}{2}\right) + 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1 = 2 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

所以得

$$f(x) = 2 - 2x^2.$$

例 1.1.5 设函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f^2(\ln x) - 2xf(\ln x) + x^2 \ln x = 0 \quad (0 < x \leq e),$$

且 $f(0) = 0$, 求 $f(x)$.

解 由所给关系式求出 $f(\ln x)$, 得

$$f(\ln x) = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4x^2 \ln x}}{2} = x(1 \pm \sqrt{1 - \ln x}),$$

因为 $f(0) = 0$, 在上式中令 $x = 1$, 则应有 $f(0) = 1 \pm \sqrt{1 - 0} = 0$, 所以上式右边应取减号, 即

$$f(\ln x) = x(1 - \sqrt{1 - \ln x}).$$

设 $u = \ln x$, 则 $x = e^u$, 于是得

$$f(\ln x) = f(u) = e^u (1 - \sqrt{1-u}),$$

或写为 $f(x) = e^x (1 - \sqrt{1-x})$.

例 1.1.6 设函数 $f(x)$ 满足关系式

$$af(u) + bf\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{c}{u}$$

其中 u 为任一不为零的实数, a 、 b 、 c 为常数, 且 $|a| \neq |b|$, 求 $f(x)$ ($x \neq 0$).

解 因为 u 可以取任一不为零的实数, 所以当 $x \neq 0$ 时, 令 $u = x$, 得

$$af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}, \quad (1)$$

再令 $u = \frac{1}{x}$ 得

$$af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx. \quad (2)$$

(1) $\times a -$ (2) $\times b$ 得

$$a^2 f(x) - b^2 f(x) = \frac{ac}{x} - bcx,$$

所以得

$$f(x) = \frac{ac - bcx^2}{(a^2 - b^2)x}.$$

例 1.1.7 设 $f(\sin^2 x) = \cos 2x + \cos^2 x$, 求 $\int f(x) dx$.

解 设 $u = \sin^2 x$, 则 $f(\sin^2 x) = f(u) = (1 - 2u) + (1 - u)$
 $= 2 - 3u$, 所以 $\int f(x) dx = \int (2 - 3x) dx = 2x - \frac{3}{2}x^2 + C$.

其他求未知函数的例题有

例 1.1.8 设 $f'(e^x) = 1 + x$, 且 $f(1) = 1$, 求 $f(x)$.
 (参看习题一第 3 题) ~~$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$~~

例 1.1.9 设函数 $f(x)$ 可微且满足关系式

求 $f(x)$. (参看例2.2.16)

第二节 函数的类型

[illegible]

1. **基本初等函数** 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数五种函数称为基本初等函数。

2. 初等函数 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤构成, 且用一个解析式表示的函数称为初等函数.

✕ ✕

不同类型的函数具有不同的特性，研究的方法也有区别，所以掌握函数的类型及其特性也是一种解决问题的分析方法，依据不同的标准，函数有各种分类方法，例如，以函数是否有界为标准可以分为有界函数与无界函数；以函数是否连续为标准可以分为连续函数与非连续函数；以函数的结构为标准可以分为初等函

数与非初等函数等。高等数学的主要内容，如极限的计算、函数连续性的讨论、微分法、积分法等都可以按初等函数与非初等函数的类型进行归纳总结，本书也试图以这种函数分类方法作为分析问题的思路，所以本节只讨论初等函数与非初等函数两种类型。初等函数又分为代数函数及超越函数两类。代数函数再分为有理函数（包括有理整函数及有理分式函数）及无理函数两类；超越函数包括指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数等。初等函数的一个重要性质是在其有定义的区间上是连续函数，从而具有连续函数的诸性质。初等函数一般是可微的，而且是可积的。在自然科学和工程技术科学中所研究的函数很多是初等函数，所以初等函数是一类重要的函数。非初等函数在实际问题和数学理论中也要出现。一般说，非初等函数不具有上述初等函数的性质，要对具体的函数作具体的分析。下面介绍几种常遇到的几类函数（其中大部分是非初等函数）及其性质，由于其中有些性质要涉及微分和积分等理论，所以当例题中涉及这些性质时，其解法就留待有关章节讨论了。

1. 幂指函数

幂指函数是形如 $f(x)^{\varphi(x)}$ ($f(x) > 0$) 的函数。它既不是幂函数也不是指数函数。对幂指函数 $f(x)^{\varphi(x)}$ 可以将其恒等变形化为 $e^{\varphi(x) \ln f(x)}$ 的形式，这样它也就是由 $y = e^u$ 及 $u = \varphi(x) \ln f(x)$ 构成的复合函数，就可以按初等函数进行研究。对幂指函数 $y = f(x)^{\varphi(x)}$ 也可以采用取对数法将其化成 $\ln y = \varphi(x) \ln f(x)$ 的形式进行研究。

例 1.2.1 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\lg x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\lg x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\lg x \ln \frac{1}{x}}$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \ln \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\csc^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \sin x$$

$$= 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \ln \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

例 1.2.2 求 $\frac{d}{dx} \left[\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \right]$. (参看例 2.2.13)

2. 分段函数

分段函数的一种典型形式是:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{当 } a \leq x \leq b, \\ \psi(x), & \text{当 } b < x \leq c. \end{cases}$$

分段函数属于非初等函数。如 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 是初等函数，那么在区间 $[a, b)$ 及 $(b, c]$ 上可按初等函数研究。但在分点 $x = b$ 处不能按初等函数研究，这是分段函数的主要特点。函数 $f(x)$ 在分点 $x = b$ 处的性质应分左右两侧分别按 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 进行讨论，然后综合得出结论。

例 1.2.3 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$$

的连续性，可微性及其导数的连续性。(参看例 2.2.5)

例 1.2.4 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$. (参看例 3.3.14)

例 1.2.5 设 $y'' + 4 = g(x)$

其中 $g(x) = \begin{cases} -3\sin x, & \text{当 } -\pi \leq x \leq 0, \\ 3\sin x, & \text{当 } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$