中国科学院研究生教学丛书

交换代数与同调代数

李克正 著

科学出版社

内 容 简 介

本书对读者的起点要求不高，是沿着一条非常简捷的途径，将读者带到本学科的前沿. 本书主要内容包括：环与模、整性、诺特环与阿廷环、诺特环与整性、准素分解、张量积、平坦性、代数集、分次环与形式完备化、维数理论、范畴、阿贝尔范畴、同调、深度、正规环与正则环、微分与光滑性、带算子的群，本书每章后都附有若干习题，这些都是作者在教学中积累的.

本书可供高校有关师生阅读，也可作为研究生教材.

图书在编目 (CIP) 数据

交换代数与同调代数 / 李克正著.
北京：科学出版社，1997
(中国科学院研究生教学丛书 / 路甬祥主编)
ISBN 7-03-005932-8

I. 交… II. 李… III. ①交换 - 代数②同调代数 IV. 015

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 02608 号

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1998 年 1 月第 一 版 开本：850 × 1168 1/32
1998 年 1 月第一次印刷 印张：6 3/8
印数：1—1 500 字数：163 000

定价：14.00 元

前　言

本书是由作者在中国科技大学研究生院讲授“近世代数 (Ⅱ)”课程的讲义以及在南开大学代数几何年等学术活动中的有关讲义修订而成. 写这本书的动因是学生对教科书一直有强烈的需求, 而在这方面又很难找到一本较为适合我国学生的外文教材. 本书油印讲义, 已使用过三年, 并给若干学校用作参考. 现在修订出版, 目的是提供一本较为适合我国硕士和博士研究生的基础课教科书, 其中包括了学习代数几何与代数数论 (例如 [7]) 所必需的多重线性代数、交换代数和同调代数基础 (但对于做交换代数方面的研究工作, 则是远远不够的).

基于上述目的, 在取材上只注意这些学科中最重要且实用的基本内容, 而不涉及很专门的课题. 在多重线性代数方面, 有不少教科书可供参考, 本书作了较系统的整理. 在交换代数方面, 尤其是所谓“硬交换代数”方面, 作者认为, 松村英之的书 [12] 无论在取材上还是处理上都堪称上乘. 本书在取材上很受该书的影响, 但在处理上则有较大的不同, 这一方面是因为要采取尽可能简明的处理方式 (读者不难看到这一点), 另一方面也是出于我国学生的具体情况. 例如, 国外有关交换代数教材 (即使像 [1] 这样较为初等的) 常假定读者已熟悉代数同调论, 这使我国很多学生感到困难. 因而本书前面有几章是“初等的”交换代数, 其中完全不用同调, 而把必须用同调的交换代数放在同调代数的后面. 此外这方面还受到 A. Ogus 教授的代数几何课程的影响 (特别是第 XVI 章). 至于在同调代数方面, 作者尚未见到一本像 [12] 这样既精炼又现代化的书可供参考, 在这方面主要是参考了 A. Ogus 教授的同调代数课程讲义, 而对于关键的“蛇形引理”采用了作者的处理方式, 这也是为了使这部分内容尽可能简明. (读者可能会发现一般的同调代数教科书

所包含的内容都远比本书多，但所多的往往都是较为专门的内容，而这是本书不拟涉及的.）

在教材的安排上，采取了“低起点，高坡度”的方式. 在预备知识方面，只假定读者学过群论和域论（包括伽罗华理论)，而从环的基本理论讲起. 前 5 章的内容基本上是一般抽象代数基础课程中的交换环论，已学过这方面内容的读者当然不必细读. 另一方面，在正文中一般都是“主干”内容，即最主要的且一般在后文中要用到的内容，而一些重要的但在后文中用不到的内容则常放在习题中.

每一章后面都有若干习题，这些习题是作者在教学中积累的. 其中有些是作者的研究工作，如习题 VI.5 的证明和习题 XVI.10. 标有星号的习题在附录 B 中有解答或提示.

本书中的数学用语均参照全国自然科学名词审定委员会 1993 年公布的《数学名词》，对《数学名词》中未收入的词语一般采用一些暂定译名，但对其中未收入的人名则保留英文原名.

作者希望借此机会感谢 A. Ogus 教授和不幸逝世的松村英之教授的教诲，他们的学术思想不仅影响了作者，也影响到本书的写作.

李克正

1996 年 9 月 5 日于北京

序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了. 相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用.

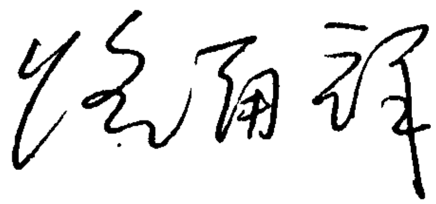
21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量. 世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争. 而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量. 我国要想在21世纪顺利地实施“科教兴国”和“可持续发展”战略，实现小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理，有能力参与国际竞争与合作的科技大军. 这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务.

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多，科研条件好，科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生；在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生. 当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好“三个基地”的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业

发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才.

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务. 研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作. 由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展. 为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作，同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版. 希望通过数年努力，出版一套面向 21 世纪科技发展，体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书. 本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿. 这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书.

“桃李不言，下自成蹊.”我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘，《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春雨，滋养莘莘学子的心田，把它们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.



目　　录

I. 环与模

1. 环与代数

一个 (结合) 环是一个具有两种运算 (加法和乘法) 的集合 R, 按加法为阿贝尔群, 满足如下条件 (其中 r, r', r'' 为 R 的任意元):

i) $(r'+r'')r = r'r + r''r$, $r(r'+r'') = rr' + rr''$ (分配律);

ii) $(rr')r'' = r(r'r'')$ (乘法结合律).

环 R 称作交换的, 如果它还满足交换律

iii) $rr' = r'r$;

称为有单位元的, 如果存在单位元 $1 \in R$, 使得

iv) $1r = r$

(显然此时单位元是唯一的).

例如, 体都是有单位元的环, 域都是交换环. 有理数域 $\mathbb{Q}$, 实数域 $\mathbb{R}$ 和复数域 $\mathbb{C}$ 之间有包含关系 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. 一般地, 若环 R 的子集 R' 在加法和乘法下封闭, 则 R' 称为 R 的一个子环, 而称 R' 为 R 的扩环; 此时对任意子集 $S \subset R'$ 可以定义 S 在 R 上生成的扩环 $R[S] \subset R'$, 即 R (在 R' 中) 的包含 S 的最小扩环 (参看习题 4).

例 1.1 i) 整数环 $\mathbb{Z}$ 的子环 $2\mathbb{Z}$ 没有单位元.

ii) 任一集合 S 上的所有实值函数全体按加法和乘法组成一个有单位元的交换环.

iii) 对两个环 R 与 R' 可以定义直积 $R \times R'$ (加法和乘法按分量).

iv) 对任一正整数 n, $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是一个有限的有单位元的交换环. 特别地, 对任意素数 p, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 为一个有限域. 若 n 非素数, 例如 $n = 18$. 则在 R 中有两个非零元 $\bar{2}$ 和 $\bar{9}$ 的积是 0, 此外有 $\bar{6}^2 = 0$.

两个环之间的一个映射 $f: R \to R'$ 称作 (环) 同态. 如果它与加法和乘法交换, 即 $f(r+r') = f(r)+f(r'), f(rr') = f(r)f(r')$ (若我们讨论有单位元的环, 则我们还要求 $f(1)=1$). 此时 R' 连同 f 称作一个 R-代数. 若 f 还是一一映射, 则说 f 是 (环) 同构. 与群论类似, 我们可以定义自同态、自同构、单同态、满同态等. 设 $g: R \to R''$ 是另一个环同态 (因而 R'' 也是 R-代数). 一个环同态 $\phi: R' \to R''$ 称作一个 R-代数同态, 如果 $\phi \circ f = g$.

例 1.2 i) 对任一环 R 可以定义 R 上的 $n \times n$ 矩阵代数 $M_n(R)$, 当 $R = \mathbb{R}, n > 1$ 时这是一个典型的非交换环.

ii) 对任一环 R 可以定义 R 上的多项式代数 $R[x]$, 它由所有以 R 的元为系数的多项式组成. 若 R 是交换的, 则 $R[x]$ 也是交换的. 还可以定义多个变元的多项式环. 次数、常数项、首一多项式、不可约多项式、零点等术语都可以用于 $R[x]$. 用归纳法我们可以在 R 上建立多个变元的多项式代数.

iii) 定义一个 (非交换) $\mathbb{R}$-代数 Q 如下: 作为 $\mathbb{R}$-线性空间, Q 具有基 $\{1, i, j, k\}$. 且 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Q 称作 $\mathbb{R}$ 上的四元数代数. 不难验证 Q 是一个体 (习题 2 中的 i)).

对任一 R-代数 R' 及任一元 $a \in R'$, 存在唯一的 R-代数同态 $f: R[x] \to R'$ 使得 $f(x) = a$. 这称作多项式代数的泛性.

例 1.3 在交换环 R 上可以 (用拉普拉斯展开式) 定义行列式. 设 $A = (a_{ij})$ 为 R 上的 $n \times n$ 矩阵 $(n > 1)$. A_{ij} 为 A 的 (i,j)-代数余子式, 则 $\det(A_{ij}) = (\det A)^{n-1}$. 证明很简单: 若 $R = \mathbb{Z}$ 而 $a_{ij} = x_{ij}$ 为独立变元, 这是线性代数中熟知的恒等式; 任意 R 都是 $\mathbb{Z}$-代数, 由多元多项式代数的泛性, 存在 $\mathbb{Z}$-代数同态 $f: \mathbb{Z}[x_{ij} | 1 \le i, j \le n] \to R$ 使得 $f(x_{ij}) = a_{ij}$ $(1 \le i, j \le n)$. 这就给出 R 中的等式 $\det(A_{ij}) = (\det A)^{n-1}$.

设 R 为有单位元的交换环, $a \in R$. 若存在 $b \in R$ 使得 $ab = 1$. 则称 a 为 R 的单位; 若 $a \neq 0$ 且存在非零元 $b \in R$ 使 $ab = 0$. 则称 a 为 R 的零因子; 特别地, 若 $a \neq 0$ 但存在正整数 n 使 $a^n = 0$. 则称 a 是幂零的. (参看例 1.1 中的 iv).) 若 R 中没有零因子且 $1 \neq 0$.

则称 R 为整环. 此时我们可以把 R 按如下方法嵌入一个域 K. 在集合 $R\times(R-\{0\})$ 中定义一个关系 $\sim$: $(r,s)\sim(r',s')$ 当且仅当 $rs'=sr'$, 易见 $\sim$ 是一个等价关系. 令 $K=R\times(R-\{0\})/\sim$, 则不难验证 R 的环结构诱导 K 的一个域结构, 而 $r\mapsto(r,1)$ 将 R 等同于 K 的一个子环, 使得 K 的元都是 R 中元的商. 我们称 K 为 R 的商域, 记为 $K=\mathrm{q.f.}(R)$.

2. 理　想

设 $f:R\to R'$ 为环同态, 则 f 的核 $I=\ker(f)=\{a\in R|f(a)=0\}$ 为 R 的加法子群, 且满足

(∗) 对任意 $r\in R, a\in I$ 都有 $ar, ra\in I$.

满足 (∗) 的加法子群 $I\subset R$ 称为 R 的理想. (更一般地, 若对任意 $r\in R, a\in I$ 都有 $ra\in I$. 则称 I 为左理想, 类似地可以定义右理想.)

设 I 为环 R 的理想, 则易见加法商群 R/I 具有诱导的环结构 ($a+I$ 与 $b+I$ 的积为 $ab+I$), 称作 R 模 I 的剩余类环. 投射 $p:R\to R/I$ ($p(r)=r+I$) 是环的满同态 (从而可以将 R/I 看作一个 R-代数), 且显然 $\ker(p)=I$. 若 I 是同态 $f:R\to R'$ 的核, 则 f 诱导一个单同态 $R/I\hookrightarrow R'$.

以下设 R 为有单位元的交换环. 若 I,J 为 R 的理想, 则 $I+J, IJ, I\cap J$ 和 $(I:J)=\{a\in R|aJ\subset I\}$ 都是 R 的理想. 包含一个子集 $S\subset R$ 的所有理想的交是一个理想, 称作 S 生成的理想, 记作 (S). 作为一个加法群, (S) 由所有 rs ($r\in R, s\in S$) 生成.

一个理想 $P\subsetneq R$ 称作素理想, 如果 R/P 是整环; 称作极大理想, 如果 R 中除 R 和 P 外没有包含 P 的理想. 易见一个理想 I 是极大的当且仅当 R/I 只有两个理想 R/I 与 0, 换言之 R/I 是域. 故极大理想都是素理想. 记 $\mathrm{Spec}(R)$ 为 R 中素理想全体的集合, 称为 R 的谱. 若 A 也是有单位元的交换环且 $f:R\to A$ 为同态, 则对任意理想 $I\subset A$, $f^{-1}(I)$ 为 R 的理想, 且 f 诱导单射同态 $R/f^{-1}(I)\hookrightarrow A/I$; 特别地, 若 I 为素理想, 则 $R/f^{-1}(I)$ 是整环

(因为它同构于整环 A/I 的子环), 即 $f^{-1}(I)$ 为素理想, 故 f 诱导映射

$$\hat{f}:\operatorname{Spec}(A)\to\operatorname{Spec}(R)$$

$$P\mapsto f^{-1}(P)$$

若 $a\in R$ 不是单位, 则由佐恩引理存在极大理想包含 a.

一个元 $a\in R$ 称为**素的**, 如果 (a) 是素理想. 若 R 为整环且每个非零非单位元都能分解成素元素的积, 则称 R 为**唯一因子分解整环** (简称 UFD). 若 R 是整环且每个理想都是由一个元素生成的, 则称 R 为**主理想环** (简称 PID), 例如 $\mathbb{Z}$ 和任一域 K 上的多项式环 $K[x]$ 都是主理想环. 任一 PID 都是 UFD (见习题 Ⅲ.1).

以下引理的一个直接推论是 $\mathbb{Z}$ 或任意域上任意多个变元的多项式代数为 UFD.

引理 2.1 (高斯定理) 若 R 为 UFD, 则 $R[x]$ 亦然.

证. 令 $K=\text{q.f.}(R)$, 则 $R[x]$ 可以看作 $K[x]$ 的子环. 我们先来证明, $R[x]$ 中的素元为所有 R 中的素元及所有在 $K[x]$ 中不可约的多项式, 其系数的最大公因子为 1.

若 $a\in R$, 则 $R[x]/aR[x]\cong R/aR[x]$, 故 a 在 $R[x]$ 中是素的当且仅当它在 R 中是素的. 设 $f\in R[x]$ 是素的且次数 >0. 易见 f 的系数不能有公共素因子; 若 f 在 $K[x]$ 中可分解, $f=gh$ ($g,h\in K[x]$, 且次数小于 f 的次数). 可取 $a,b\in R-\{0\}$ 使得 $ag,bh\in R[x]$, 从而在 $R[x]$ 中有 $abf=ag\cdot bh$, 而因 f 是素的, ag 或 bh 在 (f) 中, 这是不可能的. 反之, 若 f 在 $K[x]$ 中不可约且其系数的最大公因子为 1, 则对任意 $g,h\in R[x]$ 使得 $gh\in(f)$, g,h 中必有一个在 $K[x]$ 中能被 f 整除, 不妨设 (在 $K[x]$ 中) $f|g$. 于是存在 $a\in R-\{0\}$ 及 $g_1\in R[x]$ 使得 $ag=fg_1$. 由于 f 的系数的最大公因子为 1, a 的任一素因子必为 g_1 的系数的公因子, 故由归纳法可将 a 约化为 1, 即 $g\in(f)$. 因而 f 是素的.

对于 $R[x]$ 中的任一元 f, 先将它在 $K[x]$ 中分解成不可约多项式的积, 从而有 $af=bf_1\cdots f_r$, 其中 $a,b\in R-\{0\}$ 而 $f_1,\cdots,f_r\in$

$R[x]$ 为次数 >0 的素元. 不难得到 $a|b$, 从而 f 可以分解成素因子的积. 证毕.

3. 模

一个环 R 上的模 (或称为一个 R-模) 是一个阿贝尔加群 M, 带有一个 R 的作用, 即一个映射

$$R \times M \to M$$

$$(r, m) \mapsto rm$$

满足下述条件:

i) $(r+r')m = rm + r'm$, $r(m+m') = rm + rm'$ (分配律);

ii) $(rr')m = r(r'm)$;

若讨论有单位元的环, 则我们还要求

iii) $1m = m$.

可以将 R-模 M 看作一个带有算子区 R 的阿贝尔加法群*, 由此就不难定义 R-子模 (在没有疑问时简称子模) 和商模、 R-模的 R-同态 (在没有疑问时简称同态) 与同构、 R-模的直和与直积等, 并可应用群论的同构定理等. 任意多个 R (作为 R-模) 的拷贝的一个直和称为一个自由 R-模, n 个 R 的拷贝的直和记为 $R^{\oplus n}$.

注 3.1 若 R 不是交换环, 我们常把上面定义的模称为 *R-左模*, 而若在定义中将 ii) 改为 $(rr')m = r'(rm)$, 则所定义的模称为 *R-右模* (此时常将 rm 改记为 mr). 例如 R 中的左理想为左模而右理想为右模.

例 3.1 i) 任一理想 $I \subset R$ 可以看作 R-模.

ii) 任意 R-代数 A 具有 R-模结构, 而且任意 A-模也可以看作 R-模. 特别地, 对任意理想 $I \subset R$, R/I 为 R-模.

iii) 设 M, N 为 R-模, 记 $Hom_R(M,N)$ 为所有从 M 到 N 的 R-同态的集合, 则 $Hom_R(M,N)$ 具有阿贝尔加群结构; 而当 R 为交

---

* 不了解带算子的群的读者可参看附录 A.

换环时 $Hom_R(M,N)$ 具有 R-模结构 (对 $r \in R$. $f \in Hom_R(M,N)$, $m \in M$ 令 $(rf)(m) = rf(m)$). $End_R(M) = Hom_R(M,M)$ 具有 R-代数结构 (这是例 1.2.i) 的推广).

注意有限多个 R-模的直和与直积是同构的, 但无穷多个 R-模则不然, 例如可数多个 R-模 $M_1, M_2, \cdots$ 的直积为序列的集合 $M = \prod_i M_i = \{(a_1, a_2, \cdots) | a_i \in M_i \ \forall i\}$, 而它们的直和 $\bigoplus_i M_i$ 为 M 中所有只有有限多个非零分量的序列组成的子集. 像这样给出结构的定义称作 "内在的" 定义. 我们可以给直和与直积以 "外在的" (即通过与其他 R-模的关系) 定义如下. 设 $\mathfrak{M} = \{M_i | i \in I\}$ 为一族 R-模, 其中 I 为指标集. 则 $\mathfrak{M}$ 中模的直和是一个 R-模 M, 带有同态 $f_i : M_i \to M$ $(i \in I)$, 使得对任一 R-模 M' 及任意同态 $f'_i : M_i \to M'$ $(i \in I)$, 存在唯一的同态 $\phi : M \to M'$ 使得 $f'_i = \phi \circ f_i$ $(i \in I)$; 而 $\mathfrak{M}$ 中模的直积是一个 R-模 N, 带有同态 $g_i : N \to M_i$ $(i \in I)$, 使得对任一 R-模 N' 及任意同态 $g'_i : N' \to M_i$ $(i \in I)$, 存在唯一的同态 $\psi : N' \to N$ 使得 $g'_i = g_i \circ \psi$ $(i \in I)$. 这些分别是直和与直积的 "泛性".

设 $f : M \to N$ 为 R-模同态, 则其核 $K = \ker(f) = \{m \in M | f(m) = 0\}$ 也具有泛性: 令 $i : K \to M$ 为包含映射, 对任意 R-模 K' 及任意同态 $g : K' \to M$, 若 $f \circ g = 0$, 则存在唯一同态 $\phi : K' \to K$ 使得 $g = i \circ \phi$. 这也给出核的外在定义. 我们有一串同态

$$0 \to K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N$$

其中 i 是单射且 $\ker(f) = \mathrm{im}(i)$, 这样的一串同态称作一个左正合列. 类似地, 称 $C = N/f(M)$ 为 f 的余核. 我们有右正合列 $M \to N \to C \to 0$, 且余核也有泛性, 可用作外在定义.

更一般地, 一串 R-模同态

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

称作一个复形, 如果对所有 n 都有 $f_n \circ f_{n-1} = 0$; 称作一个正合列, 如果对所有 n 都有 $\ker(f_n) = \mathrm{im}(f_{n-1})$. 一个正合列 $0 \to M' \to$

$M \to M'' \to 0$ 称作一个短正合列, 它相当于 M' 是 M 的子模且 $M'' \cong M/M'$.

若

$$0 \to N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \tag{1}$$

是一个左正合列, 则对任一 R-模 M 有 (阿贝尔群的) 左正合列

$$0 \to Hom_R(M,N') \xrightarrow{f_*} Hom_R(M,N) \xrightarrow{g_*} Hom_R(M,N'') \tag{2}$$

其中 f_* 的定义为 $f_*(\phi) = f \circ \phi$, g_* 的定义类似. 理由很简单: 因为 f (或者说 M') 是 g 的核, 由核的泛性, 对任一 $\psi \in Hom_R(M,N)$, 若 $g \circ \psi = g_*(\psi) = 0$, 则存在唯一的 $\phi \in Hom_R(M,N')$ 使得 $\psi = f \circ \phi = f_*(\phi)$, 这 (由外在定义) 正好说明 f_* 是 g_* 的核, 或者说 (2) 是左正合的. 实际上我们说明了, (1) 是左正合当且仅当对任意 R-模 M, (2) 是 (阿贝尔加群的) 左正合列.

象这样的论证几乎是同义反复, 它只是把定义换个说法而已. 我们把这样的论证称作**抽象废话**. 最典型的抽象废话是外在定义的唯一性, 例如对 R-模的一个 R-同态 $f : M \to N$, 若 $i : K \to M$ 和 $i' : K' \to M$ 都是 f 的外在意义下的核 (即满足泛性), 则存在唯一的 R-同构 $\phi : K' \to K$ 使得 $i' = i' \circ \phi$.

类似地, 若

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \to 0 \tag{3}$$

是一列 R-模同态, 则由抽象废话, (3) 是右正合当且仅当对任一 R-模 M, 下列 (阿贝尔群的) 同态列为左正合

$$0 \to Hom_R(N'',M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N,M) \xrightarrow{f^*} Hom_R(N',M) \tag{4}$$

其中 $f^*(\phi) = \phi \circ f$, 等等. 总而言之, 我们有

引理 3.1 一个 R-模同态列 (1) 是左正合的当且仅当对任意 R-模 M, (2) 是 (阿贝尔群的) 左正合列. 类似地, 一个 R-模同态列 (3) 是右正合的当且仅当对任意 R-模 M, (4) 是 (阿贝尔群的) 左正合列.

注意即使在 (1) 中 g 是满射，(2) 中的 g_* 也未必是满射. 具体地说，一个 R-同态 $\phi: M \to N''$ 未必能提升成 M 到 N 的同态. 例如当 $R=\mathbb{Z}$, g 为投射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 时，$\phi = \mathrm{id}: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 就不能提升成 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的同态. 但如果 M 是自由模 (例如 $M = R^{\oplus n}$), 则当 g 为满射时 g_* 必为满射 (注意 $Hom_R(M, N) \cong N^{\oplus n}$, 在一般情形 g_* 等于一些 g 的拷贝的直积). 更一般地，一个 R-模 M 称为投射的, 如果对任意满同态 $g: N \to N''$, 诱导的 (阿贝尔群) 同态 $g_*: Hom_R(M,N) \to Hom_R(M,N'')$ 都是满射. 不难验证一个 R-模 M 是投射模当且仅当存在 R-模 M' 使得 $M \oplus M'$ 同构于一个自由模：若 $F = M \oplus M'$ 是自由模，则对任一满同态 $g: N \to N''$ 有 $Hom_R(F,N) \twoheadrightarrow Hom_R(F,N'')$, 故由

$$Hom_R(F,N) \cong Hom_R(M,N) \oplus Hom_R(M',N)$$

易见 $Hom_R(M,N) \twoheadrightarrow Hom_R(M,N'')$; 反之，若 M 是投射模，取自由模 F 使得存在满同态 $g: F \twoheadrightarrow M$, 则由投射模的定义存在同态 $h: M \to F$ 使得 $g \circ h = \mathrm{id}_M$, 由此可见 $F = h(M) + \ker(g) \cong M \oplus \ker(g)$. 我们将看到投射模不一定是自由的 (例 Ⅶ.1.2).

类似地，即使在 (3) 中 f 是单射，(4) 中的 f^* 也未必是满射. 具体地说，一个 R-同态 $\phi: M' \to N$ 未必能扩张成 M 到 N 的同态. 例如当 $R = \mathbb{Z}$, $f = 2\cdot: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, ϕ 为投射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 时，不存在 $\psi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 使得 $\phi = \psi \circ f$. 一个 R-模 M 称为内射的, 如果对任意单同态 $f: N' \hookrightarrow N$, 诱导的 (阿贝尔群) 同态 $f^*: Hom_R(N,M) \to Hom_R(N',M)$ 都是满射. 若 $R = \mathbb{Z}$, 不难验证 M 是单射模当且仅当 M 作为阿贝尔加群是可除的 (对充分性的证明需要用超限归纳法). 我们将看到对一般的 R 如何构造内射 R-模 (见例 Ⅵ.1.3).

一个 R-模同态的图 (箭头图)

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & B \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xrightarrow{h} & D \end{array} \qquad (5)$$

称为交换的, 如果 $g\circ e = h\circ f$. 更一般地, 一个箭头图称为交换的, 如果其中每个形如 (5) 的圈都是交换的.

引理 3.2 (蛇形引理) 设有 R-模的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & M' & \xrightarrow{g_1} & M & \xrightarrow{h_1} & M'' & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & \\ 0 \to & N' & \xrightarrow{g_2} & N & \xrightarrow{h_2} & N'' & \to 0 \end{array} \tag{6}$$

其中的行都是正合的, 则有长正合列

$$\begin{aligned} 0 \to \ker(f') \to \ker(f) \to \ker(f'') \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(f') \to \\ \to \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(f'') \to 0 \end{aligned} \tag{7}$$

证. 将 (6) 扩大成下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \ker(f') & \xrightarrow{g_0} & \ker(f) & \xrightarrow{h_0} & \ker(f'') & & \\ \downarrow{\scriptstyle i'} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i''} & & \\ 0 \to M' & \xrightarrow{g_1} & M & \xrightarrow{h_1} & M'' & \to 0 \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 \to N' & \xrightarrow{g_2} & N & \xrightarrow{h_2} & N'' & \to 0 \\ \downarrow{\scriptstyle j'} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle j''} & & \\ \operatorname{coker}(f') & \xrightarrow{g_3} & \operatorname{coker}(f) & \xrightarrow{h_3} & \operatorname{coker}(f'') & \to 0 \end{array} \tag{8}$$

其中 g_0 是这样定义的: 对任意 $m\in\ker(f')$, $f(g_1(m)) = g_2(f'(m)) = 0$, 故 $g_1(m)\in\ker(f)$. 这样 f 在 $\ker(f')$ 上的限制就诱导 $g_0 : \ker(f')\to\ker(f)$. h_0, g_3 和 h_3 的定义类似.

设 L 为任一 R-模而 $\phi : L\to\ker(f)$ 为 R-同态使得 $h_0\circ\phi = 0$, 则有 $h_1\circ i\circ\phi = 0$. 由于 $M' = \ker(h_1)$, 存在唯一的 $\psi' : L\to M'$ 使得 $g_1\circ\psi' = i\circ\phi$. 因为 $g_2\circ f'\circ\psi' = f\circ g_1\circ\psi' = f\circ i\circ\phi = 0$