应用数学

上 册

[redacted]

〔印〕B.D.GUPTA著
赵愉深 译

成都电讯工程学院出版社

应 用 数 学

上 册

【印】B. D. Gupta 著

赵愉深 译

林为干 审

成都电讯工程学院出版社

内 容 提 要

本书主要是为各类高等学校的学生、研究生撰写的教学参考书。它对大学理、工科的高年级学生、教师和科技工作者都有较大的参考价值，是一本有用的数学工具书。

全书共有十五章，详细讲述矢量、矩阵、张量、群论、复变函数、调和函数、特殊函数以及各种积分变换、数学物理方程、狭义相对论、统计概率等在物理学和工程技术中的数学理论和方法，各章均列有大量的例题、问题和详细的解法。

应 用 数 学

上 册

(印) B.D.Gupta 著

赵 愉 深 译

*

成都电讯工程学院出版社出版

成都电讯工程学院出版社印刷厂印刷

四川省新华书店发行

*

开本 787×1092 1/32　印张 18.31　字数 430 千字

版次 1986年3月 第一版　印次 1986年3月第一次印刷

印数 1—5000册

统一书号 13452·1　定价 3.20元

译 者 序

本书根据印度作者古普塔（B.D.Gupta）所著《数学物理》一书翻译。

这是一本内容十分丰富、新颖、分析方法独特、实用的好书，每章列有大量问题、例题、附加杂题和详细的解题方法。本书强调应用，既重视理论的论述和证明，更注意用简单的概念代替某些繁琐的严格内容。本书包括了几乎所有在物理学和工程技术中经常遇到的数学问题。全书有矢量、矩阵、张量、群论、复变函数、Γ 函数、B 函数和误差函数、微分方程理论和方法、调和函数、傅立叶变换、拉普拉斯变换、汉格尔变换、数学物理方程、麦克斯韦方程、狭义相对论、统计概率等十五章。

本书的部分内容曾在成都电讯工程学院作为研究生教材使用，收到了良好的效果。实践证明，本书是各类高等学校理、工科高年级学生和研究生的一本理想参考书。它对广大的教师、工程技术人员和科学工作者也是一本很有价值的工具书。

本书主要讲述在物理学和工程技术中的数学理论和方法，所以我们把它译成《应用数学》。为了便于读者阅读，我们把它分成上、中、下三册出版，上册（1—3章）由赵愉深翻译，中册（4—8章）由刘志旺翻译，林炎武校，下册由杨淑雯翻译12—15章，刘志旺翻译9—11章，林炎武校9—11章。全书由林为干主审。

原文书中有大量排印错误，某些地方符号不大统一，我们在翻译过程中已经作了订正。由于订正之处很多，不能一一注出，若有不妥，概由译者负责。鉴于译者水平所限，错误和缺点在所难免，请读者批评指正。

译　者

1985年2月

前　　言

一九六五年，我和同事B.S.Rajput为了满足优等生、研究生和印度各类大学工科学生的需要，合写了题为《数学物理》的书。以后，该书曾由原来的出版人再版了六次，但由于多种原因，我们没有能够把这种合作继续下去。

在此，谨向过去的合作者和出版人致以诚挚的感谢，感谢他们同意由我单独进行修订和出版本书。

鉴于各类大学教学大纲变化和知识变化的需要，这种知识变化大约每十年就要增加一倍，我在五年前就根据新的观点单独致力于本著作，由于某些不可避免的原因，本书未能更早地出版。所以我又对其中的某些部分作了进一步的修改，使它能反映最新的知识而变得更加有用。

现在这本书的内容和使用价值已经明显地增加了，这是因为：第一、在我和其他作者所写的书中，我写的若干部分已经用更清楚的阐述风格加以改写；第二，更多部分重新写过了。整个内容作了新的安排并加入了很多新的课题，每节增加了大量的习题和一组附加杂题。

我并不认为本书有什么重要的独创性，最多不过是一部阐述新颖的编撰而已，安排的主要内容使得那怕是外行也能懂得如何把数学运算应用到物理问题中。在本书的写作过程中，我广泛地参考了外国和印度作者撰写的数学、物理书籍，由于篇幅所限，不能对他们一一表示感谢。

在改写本书时，把我写的“矢量分析”、“矢量计算”

和“力学原理”扩编为第一章“矢量”；把《数学物理》中我写的内容扩编为第二章“矩阵”；把我写的“相对论力学”和取自《数学物理》中张量的若干节扩编为第三章“张量”；第四章“群论“(新写)；把我在《数学物理》中写的内容扩编为第五至第十章“复变函数”、“B 函数、Γ 函数和误差函数”、“微分方程”、“调和函数”、“傅立叶级数”、“积分和变换”及“拉普拉斯变换”；第十一章至第十四章“汉格尔变换”、“扩散、波动和拉普拉斯方程”、“麦克斯韦方程”及“狭义相对论”已经完全重写。把我写的“数理统计”扩编为第十五章“统计概率”。为了提高本书的使用价值，书后增添了附录A、B、C：“在基础数学中的某些公式结果”、“误差函数的渐近展开”、“群论中的特征表”和纠正若干严重错误的“勘误表”。

附录C主要根据A.W.Joshi著的《群论原理》，仅此对该书的作者和出版人致谢。感谢过去和现在的所有合作者，特别是我的同事 O.P.Gupta、H.C.Sharma、J.P.Agrawal、Satya Prakash等先生和出版人Kedar Nath Ram Nath、Meerut。

对我的同事A.W.Joshi和Naresh Kumer在本书写作过程中提出的建议表示感谢，如果不对我的同事P.C.Jain、M.P.Tyagi、B.Singh和V.P.Arora表示深切的谢意，那将是我的失职，因为他们不仅给我们提供了最好的帮助，而且鼓励和支持我单独完成本书的写作。

无论从什么角度对本书提出的改进意见，作者都将愉快地采纳。

B.D.Gupta

目　　录

第一章　矢　　量

第一章 矢 量

1.1 引 言

在应用数学、物理和力学中通常观察到有两种形式的物理量：一种是只含数量而在三维空间里没有方向的量，例如体积，质量，长度，速度，温度，势，电荷等；另一种是含与数量相联系的在空间里有确定方向的量，例如速度，加速度，动量，力，电场强度或磁场强度等。前者称为数性量或简称数量；后者则称为矢性量或简称为矢量。

稍加考虑就会发现，数性量的完整表征需要长度和支承(support)，即规定的单位和表明该量是那种单位好多倍的数目，而矢量的完整表征则需要长度、支承和指向(sence)，即规定的单位，该量是那种单位的好多倍和方向的描述。

用准确方法叙述矢量意为“一定向的线段”，即：矢量是具有方向和数量的量。在天文学里，矢量意为将绕中心(通常是椭圆轨道的焦点)运动的行星与该中心连成的虚线。

1.2 矢量表示法

因为矢量是抽象概念的产物，所以它的大小和方向可以用一条从始点O到终点P的定向线段表示，记为$\overrightarrow{OP}$。这里，将用$|\overrightarrow{OP}|=OP$来表示矢量$\overrightarrow{OP}$的长度，称为该矢量的大小或模，而把在空间里的方向用直线上的箭头表示，在图1.1

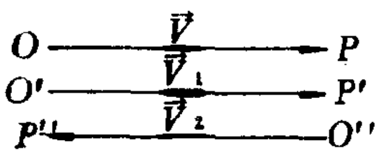

图 1.1

中，矢量$\overrightarrow{OP}$已表示为$\vec{V}$，而其数量值表示为V。因此，OP是矢量的长度，而仅为不定长直线一部分的定向线段$\overrightarrow{OP}$是$\vec{V}$的支承，指向是从O到P。

应该指出，用矢量表示的物理定律的叙述与参考轴选择无关，即矢量表示法具有不参考任何坐标系的物理内容。

1.3 矢量的分类

等矢量 两给定矢量只有在它们的大小和方向都相同的时候才可能相等，即当且仅当两给定矢量有相同或平行支承和相同指向时才是相等的。例如在图 1.1 里，我们有

$$\vec{V}(=\overrightarrow{OP})=\vec{V}_1(=\overrightarrow{O'P'})=-\vec{V}_2(=\overrightarrow{O''P''})$$

其中$\vec{V}_1$和$\vec{V}_2$与$\vec{V}$具有相同的数量，$\vec{V}_1$与$\vec{V}$有相同的指向，而$\vec{V}_2$与$\vec{V}$有相反的指向。

零矢量 始点和终点重合的矢量称为零矢量，因此零矢量的模等于零。

单位矢量 模等于 1 的矢量称为单位矢量。

若$\vec{a}$是矢量，a是它的模，则$\vec{a}$的单位矢量用$\hat{a}$表示（读作“帽”或“脱字号”），定义为

$$\hat{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}}{a}$$

极矢量 表示如力、速度等量的线性矢量称为极矢量，它们只涉及沿特定方向的线性作用。

轴矢量 表示如角速度、角加速度等量的线矢量称为轴矢量，它们包含绕轴的某些旋转作用，并且假定它平行于旋转轴，其大小由矢量之模确定，而方向按右手螺旋法则（即

旋转看成是顺时针方向）确定。

自由矢量 显然，矢量可以表示成无限多个具有平行支承的相等矢量。可从一处平移到使之具有相同大小和保持相同方向处的矢量称为自由矢量。事实上，自由矢量是不考虑它的空间位置而假设经过平移仍保持相同的矢量。

局限矢量或线矢量 我们已经定义了只决定矢量长度和方向的自由矢量值，然而若矢量也决定于它的空间位置，即若矢量被限制在通过一给定的原点，则它被称为局限矢量。

共线矢量 平行于同一直线而不管它的长度和方向指向的矢量称为共线矢量。换句话说，就是具有相同或平行支承的矢量。这样的矢量相互平行，并且在特殊情况下它们可能重合。因此，任何两个共线矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 之间存在一个如下面形式的数性比例因子 λ，即

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}$$

由此得到，两共线矢量之一可表为另一矢量的数性倍数。

非共线矢量 方向既不平行也不重合的矢量称为非共线矢量。

同类矢量或同向矢量 共线而且具有相同指向的矢量，即沿相同指向取向而不管其大小的矢量称为同类矢量。

非同类矢量 共线而指向彼此相反的矢量称为非同类矢量。

共面矢量 位于平行平面或可以使其位于同一平面的矢量系称为共面矢量。显然，任何两个矢量一定是共面的。

非共面矢量 不能使其位于同一平面的三个或更多个矢量组成的矢量系称为非共面矢量。

倒易矢量 与一给定矢量 $\vec{a}$ 方向相同而大小互为倒数的任何矢量称为矢量 $\vec{a}$ 的倒易矢量或互反矢量，记为 $\vec{a}^{-1}$ 或

$1/\vec{a}$。因此

$$\vec{a}^{-1}=\frac{1}{a}\hat{a}=\frac{a}{a^2}\hat{a}=\frac{\vec{a}}{a^2} \qquad \text{（由单位矢量定义）}$$

值得注意，单位矢量大小的倒数仍然是一个单位，因此单位矢量与其本身是倒易的，并称为自倒易。

负矢量 与矢量 $\vec{a}$ 大小相同而方向相反的矢量称为 $\vec{a}$ 的负值并记为 $-\vec{a}$。

位置矢量 若矢量 $\overrightarrow{OP}$ 规定了点 P 相对于任选点 O 的位置，则 $\overrightarrow{OP}$ 称为 P 相对于 O 的位置矢量。

问题 1 若 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ 是右手集，试问下列哪些集是右手集？

(a) $\vec{a},\vec{c},\vec{b}$； (b) $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$； (c) $\vec{b},\vec{a},\vec{c}$；

(d) $\vec{c},\vec{a},\vec{b}$； (e) $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$。

解 显然，集(b)和(d)，即 $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$ 和 $\vec{c},\vec{a},\vec{b}$ 是右手的。

问题 2 试讨论 $a\vec{A}+b\vec{B}=0$ 的几何意义。

解 我们有

$$a\vec{A}+b\vec{B}=0$$

其中 a、b 是数量，上式可写成

$$\vec{A}=-\frac{b}{a}\vec{B}$$

令

$$\lambda=-\frac{b}{a}$$

于是

$$\vec{A}=\lambda\vec{B}$$

即 $\vec{A}$ 可表示为 $\vec{B}$ 的数性倍数，因此矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 是平行或共线的。

1.4 矢量的加法

求和过程的表征来源于一个点的两个或多个位移的合

成。如图1.2所示，假设有两个作用于点O的矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$，令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$。

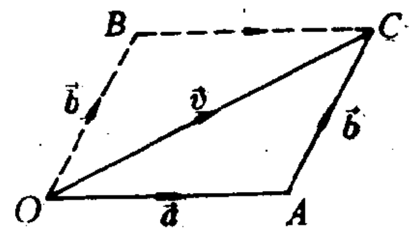

图 1.2

显然，矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$的合成作用与它们的矢量和$\vec{v}$的作用相同，该矢量和$\vec{v}$是将矢量$\vec{b}$从$\vec{a}$的终端作出并将$\vec{a}$的始点连到$\vec{b}$的终点得出的矢量。这种求两个矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$和的几何作图法称为矢量加法的平行四边形定律。因此

$$\vec{v}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b} \tag{1}$$

利用$\vec{b}$并从$\vec{b}$作出矢量$\vec{a}$可以得到相同的结果，即

$$\vec{v}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{a} \tag{2}$$

毫无疑问，两共始点矢量相加的结果是用该二矢量为邻边的平行四边形对角线表示的矢量。

由(1)和(2)得 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

即两矢量服从加法的交换律，因此各矢量的矢量和与它们的次序无关。

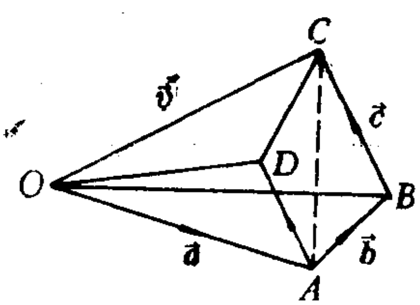

图 1.3

现在，我们求三个矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$之和，令$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$，如图1.3所示。则

$$\vec{v}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \tag{3}$$

又
$$\vec{v}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \tag{4}$$

类似地

$$\vec{v}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \tag{5}$$

$$\vec{v}=(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b} \tag{6}$$

由(3)、(4)、(5)和(6)得

$$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}$$

即三矢量服从加法的结合律，因此三矢量的矢量和与分矢量的各种组合方式无关。

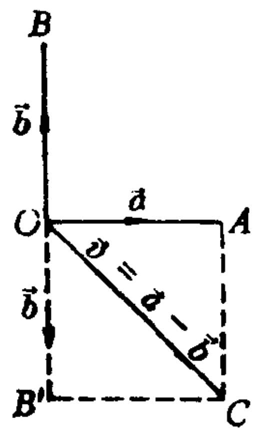

图 1.4

一般说来，若有 n 个矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots,\vec{n}$，则矢量和 $\vec{v}$ 为

$$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\cdots+\vec{n}$$

1.5 矢量的减法

若有二矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，则

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

即 $\vec{a}$ 减 $\vec{b}$ 可以看成是 $-\vec{b}$ 加 $\vec{a}$，因此 $\vec{a}$ 减 $\vec{b}$ 是颠倒 $\vec{b}$ 的方向后再加 $\vec{a}$(图 1.4)。

1.6 矢量与数量的乘法

若 $\vec{a}$ 是任一给定的矢量，s 是给定的数量，则 $s\vec{a}$ 或 $\vec{a}s$ 定义为这样的一个矢量，它的大小是矢量 $\vec{a}$ 的 $|s|$ 倍(即 $\vec{a}$ 长度的 $|s|$ 倍)、支承与 $\vec{a}$ 相同或相平行、而方向根据 s 是正或负而相同或相反。于是我们有

(i) $s(-\vec{a})=(-s)\vec{a}=-s\vec{a}$

(ii) $(-s)(-\vec{a})=s\vec{a}$

(iii) $(s+t)\vec{a}=s\vec{a}+t\vec{a}$

其中 t 是另一数量。

(iv) $(st)\vec{a}=s(t\vec{a})=t(s\vec{a})$

(v) $0\,\vec{a}=\mathbf{0}$

其中 $\mathbf{0}$ 是零矢量。

(vi) 若二非零矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线，则存在一非零数量 m，