模糊数学

赵德齐 编著

MO HU SHU XUE

中央民族大学出版社

模 糊 数 学

中央民族大学出版社

(京)新登字 184 号
责任编辑：戴苏芽
封面设计：吕莉娜
责任印制：陈立彬

模糊数学
赵德齐　编著
※
中央民族大学出版社出版
(北京西郊白石桥路 27 号)
(邮政编码：100081 电话 8472817)
新华书店北京发行所发行
中央民族大学印刷厂印刷

787×1092 毫米　32 开　8.125 印张　172 千字
1995 年 5 月第 1 版　　1995 年 5 月第 1 次印刷
印数 01-2000 册

ISBN 7—81001——775—6/G・326
定价：8.50 元

目　录

附录

第一章　模糊集合的基本知识

§1　引言

模糊数学是研究和处理模糊性现象的学科。

近 20 年来，电子计算机技术发展很快，其计算速度，贮存能力已达到了惊人的程度，在一些发达国家里，计算机已经不只用于尖端科学领域，而且已经广泛地应用于生产和生活的许多领域。机器人已经显示了它们的才能。

另一方面，计算机的智能又是很低下的，不如几岁的孩子。幼儿园的小孩就可以调电视图象，几个月的小孩就认识自己的母亲。但计算机的这种识别能力却很差。原因是计算机只执行机械运算，没有灵活性。所谓“不灵活”，就是指不能适应复杂多变的情况，不具备模糊性。电视图象清晰与不清晰是一种模糊概念。一个人声音、相貌特征的描述也具有模糊性。人脑具有特殊识别能力，这是计算机所不及的。日常生活和自然语言中，模糊性是大量存在的。人的胖、瘦、高、低、轻、重都是模糊概念。在气象预报上、地质分析上、历史分期上都有模糊现象。汽车方向盘上没有刻度而司机能控制方向也显示了模糊性。可见，模糊性是大量存在的。

糊确性与复杂性的对立，是当前科学发展面临的一个十分突出的矛盾。所谓互克性原理就是指的这个矛盾。当系统的复杂性日趋增长时，我们作出系统特征的精确而又有意义的描述能力相应降低，直到达到这样一个阈值，一旦超过它，精确性和

有意义性变成两个互相排斥的特征。

过去人们是回避模糊性而应用传统数学，而今天日益发展的科学技术中，回避是不可能的了，必须寻找研究和处理模糊性现象的数学方法，以适应新技术的发展需要。

1965年，模糊集合理论应运而生了。它是由美国控制论专家L. A. Zadeh （扎德）提出来的。他的思想回旋于人、机之间。考虑人脑与传统数学在哪里分界？最后发现问题出在集合论上。普通集合论只承认非此即彼，不承认亦此亦彼，舍去了模糊性，绝对化为普通集合。在许多情况下，为了问题简化，这也是允许的。如高寒补贴，以长江为界，长江以北有，长江以南没有。调工资划几条“杠杠”等等都是这样处理问题的。但在大量的问题上不好这样处理。如在气象预报上、地质分析上，还有医疗诊断上，特别是在人文科学，如心理学，都不是那么简单，而是必须在恰当的地方承认模糊性。

所谓模糊集合是指边界不清的集合（有人把它比着滴在浸纸上的一滴墨水）。这种边界不清是由客观差异的中介过渡性所引起的划分上的不确定性所决定的。概念总是在对比中形成的。从数学上来抽象，概念的形成乃是一个划分过程：把差异的一方与另一方区别开来，形成一定的范畴，符合概念的全体对象所构成的集合叫做这个概念的处延，凡此集合中的全体对象所共有而在其外都不具有的那些性质的全体，叫做这个集合的内涵。这些性质也就是集合中所有元素所共有的本质属性。

划分是一种最简单、最基本的判决过程。

水到0℃以下要结冰，象这样具有突变性质的差异，具有比较明显的界面，造就出确定的划分，形成确定的概念和变量。这样确定的集合就叫普通集合。

但是“辩证法不知道什么绝对分明和固定不变的界限，不知

道什么是无条件的'非此即彼'。它使固定的形而上学的差异互相过渡，除了'非此即波'，又在适当的地方承认亦此亦彼，并且使对立互为中介"。"一切差异都在中间阶段融合，一切对立都经过中间环节而互相过渡"(恩格斯)。"秃"与"不秃"是不能以头发根数来分界的；"稳定"与"不稳定"，"健康"与"不健康"，"年轻"与"不年轻"，都没有明确的界面。从差异的一方到差异的另一方，中间经历了一个从量变到质变的连续过渡的过程。这种现象，就叫做差异的中介过渡性。由这中介过渡性造就出划分上的不确定性，就叫做模糊性。这样所确定的集合就叫模糊集合。

模糊集合论于 1965 年提出，70 年代开始受到重视并得到迅速发展。我国有关专家学者是从 70 年代后期才开始把模糊集合论的思想介绍到中国，并且很快得到响应。不到 10 年的时间，在我国已经形成了一支庞大的从事模糊数学工作与研究的队伍。国内外有关模糊数学的论文十分广泛，包括图象识别，自动机理论，形式语言和自然语言研究，控制论和系统论，逻辑推理理论，最优化和决策理论，信息论，信号处理，工程及人事管理，生物学，心理学，医学乃至犯罪审查等方面；在数学方面则涉及代数、拓扑、测度、图论等。许多论著闪烁着新思想的火花，颇能激发人们的想象力。由于这些作品的影响，使"模糊"这个词已经在人们中普通化和概念化了，使人们广泛地有意识地使用"模糊"这个词。

模糊集合论企图寻求一种严谨的方法来处理世界上不能精确地描述的问题。它除了"非此即彼"以外，在特定条件下承认"亦此亦彼"性。

恩格斯说过："只是在数学中，才有抽象的同一性及其与差异的对立，而且甚至在这里也不断地被扬弃。"模糊集合论的提出也许是在数学中扬弃同一性的一个重要尝试。因为模糊集合

论产生的思想基础是符合辩证法的，而“辩证法是唯一的、最高度地适合自然观的这一发展阶段的思维方法。”由此增加了我们对模糊集合论这个新学科的前途的信心。使我们深信，模糊集合论必将成为独立的数学分支，或巧妙地渗透到数学的各个分支而迅速地得到发展。

§2 一般集合论简介

集合论是现代数学的基础，也是现代数学最重要的工具。数学的每一个分支都可以看作是对一种或多种事物的集合的研究。例如，几何是对点集的研究。代数是对数的集合及在这些集合中的运算的研究，数学分析是对函数集合的研究。数理逻辑是对命题函数真值集合的研究，复变函数是对解析函数集合的研究。概率论是研究事件的集合等等。集合论起始于19世纪后半叶，是德国数学家康托尔(G. candor)创立的。集合论的符号、术语、定义等，充实和影响了数学的所有分支。

被讨论的对象的全体，称为论域；以U、V、X、Y表示；论域中的每一个对象称为元素，以相应的小写字母u、v、x、y表示。

一、集合的概念

集合是一个不加定义的概念，只有说明。给定论域U中某一部分元素组成U中的一个集合，称为U的子集合常用大写字母A、B、……表示，以a、b表示子集A、B中的元素。

当我们讨论一个具体问题的时候，总是把自己的论题限制在一定的范围内。

例如，要计论“男子”这个概念，可以把自己的论题限制在“人”这个范围内，从一切人(U)中挑选出所有男子，构成U的一个子集A，A便是“男子”这个概念的外延，即为“男子”这个概念的集合表现。

概念常用字母 a 表示。给定论域 U 中的一个子集 A，对于 U 中的任意一个元素 u，要么 u 属于 A，要么 u 不属于 A，二者必居其一且仅居其一。A 对 U 作了一个划分。分成两部分，非此即彼，就是说给定论域 U，设 α 为 U 上一个概念，它的外延是 U 的一个子集 A，对于 U 中的元素 u。

$$u \text{ 符合概念 } \alpha \Leftrightarrow u \in A$$

一个集合 A 还可以用它的特征函数来表示：

$$\mathscr{X}_A(u)=\begin{cases}1, u\in A\\ 0, u\notin A\end{cases}$$

用图象表示，为图 1-1

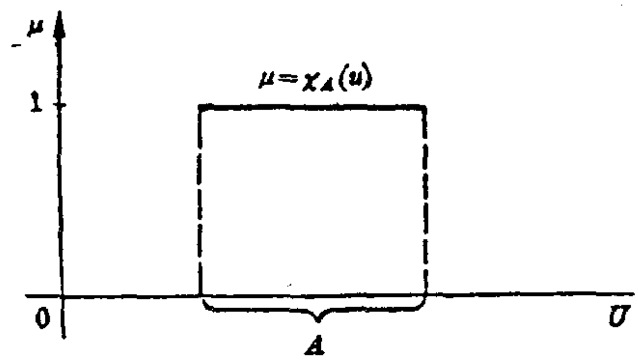

图 1-1 特征函数图

一个集合与其特征函数是互相确定的，即它们之间有 1-1 对应关系：

$$A\leftrightarrow \mathscr{X}_A(u)=\begin{cases}0, u\notin A\\ 1, u\in A\end{cases}$$

二、集合的表示法

1. 枚举法：$A=\{u_1,u_2,\cdots u_n\}$，通常适用于有限集。

2. 描述法：$A=\{u\,|\,p(u)\text{真}\}$，适用于无法枚举的情形。

$p(u)$是一句话（命题）或一个式子，它表示了 A 中的元素所必须具有的特征，通过花括号的描述就明确了集合的内容。

例如，取

$$U=\{R^+,(0,\infty)\}$$

$$A_1=\{u\,|\,u\in U,u\text{ 是偶数}\}$$

$$A_2=\{u\,|\,u\in U,u\text{ 能被 2 整除}\}$$

$$A_2=\{u\,|\,\text{存在自然 }k,\text{使 }u=2k\}$$

A_1,A_2,A_3 的描述方法不同，但表示的是同一个集合。

又如 $B=\left\{x\,|\,x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}=0\right\}$。对于不同的 U，则表示不同的集合，取 U 为 z（整数集），则 $B=\varnothing$，取 $U=R^+$，则 $B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，取 $U=R$，则 $B=\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\}$，说明同一种表示法，论域不同所表示的集合也不同。

3. 特征函数法

$$\mathscr{X}_A(u)=\begin{cases}1,u\in A\\0,u\notin A\end{cases}$$

1.0 称 u 对 A 的特征函数值。

三、关于集合的包含与相等

设 A,B 是两个集合，如果对任意的 $u\in A$，必有 $u\in B$，则称 B 包含 A，记 $B\supseteq A$，或称 A 含于 B，称 A 是 B 的子集。

如果对任意的 $u\in A$，必有 $u\in B$，而且存在 $u_0\in B$，但 $u_0\notin A$，则称 B 真包含 A，记作 $B\supset A$。

如果 $B\supseteq A$ 且 $A\supseteq B$，则称 A 与 B 相等。记作 $A=B$。

$B\supseteq A$，A 叫 B 的子集，$B\supseteq A$，但 $B\neq A$，则 A 叫 B 的真子集。

不包含 U 中任何元素的集合叫空集，记作 $\varnothing$。如

$$\varnothing=\{x\,|\,x-1=x+2,x\text{ 实数}\}$$

$$\varnothing=\{x\,|\,x^2+1=0,x\text{ 实数}\}$$

显然，任意一个集合 A，均有 $\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$，因此 $\varnothing$，A 称为

A 的当然子集。

若用特征函数表示集合之间的包含与相等关系，$A \supseteq B$ 可表成 $\mathscr{X}_A(u) \geq \mathscr{X}_B(u)$，$A=B$ 可表为 $\mathscr{X}_A(u)=\mathscr{X}_B(u)$，$A \subset B$ 可表成 $\mathscr{X}_A(u) \leq \mathscr{X}_B(u)$ 且 $\mathscr{X}_A(u) \neq \mathscr{X}_B(u)$，即存在 u_0，使 $\mathscr{X}_A(u_0) < \mathscr{X}_B(u_0)$，空集 $\varnothing$ 可表成 $\mathscr{X}_{\varnothing}=0$。

注意：元素与集合不同层次的东西，如 u 与单点集 $\{u\}$ 不同，$\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$ 不同，$u \subseteq U$ 或 $\{u\} \in U$ 的记法是错误的。

把 U 的子集看成为元素，U 的一些子集又构成集合，这种集合的集合叫集合类。U 的一切子集所构成的集合叫做集合 U 的幂集。记作 $\mathscr{P}(U)$。

例如 $U=\{黑,白\}$，则 $\mathscr{P}(U)=\{\{黑,白\},\{黑\},\{白\},\{\Phi\}\}$。

这样一来，U 的子集 A 有两种记法，$A \subseteq U$ 或 $A \in \mathscr{P}(U)$。

四、集合的运算

相应于逻辑的或、与、非运算，我们来定义集合的运算。

定义 1：设 $A.B \in \mathscr{P}(U)$，分别称

$$A \cup B \triangleq \{u \mid u \in A \text{ 或 } u \in B\}。$$

$$A \cap B \triangleq \{u \mid u \in A \text{ 且 } u \in B\}。$$

$$A^c \triangleq \{u \mid u \notin A\}$$

为 A 和 B 的并集和交集及 A 的余集，显然它们的特征函数满足

$$\mathscr{X}_{A \cup B}(u)=\mathscr{X}_A(u) \vee \mathscr{X}_B(u)$$

$$\mathscr{X}_{A \cap B}(u) \mathscr{X}_A(u) \wedge \mathscr{X}_B(u)$$

$$\mathscr{X}_{A^c}(u)=1-\mathscr{X}_A(u)$$

因此，集合运算实际上是逐个元素地对其特征函数值进行运算。此处 $\vee$ 表示上确界 *sup* 即表示取最大值，$\wedge$ 表示下确界 *inf* 即表示取最小值。

集合的运算还可以用文氏图形象地表示如下：

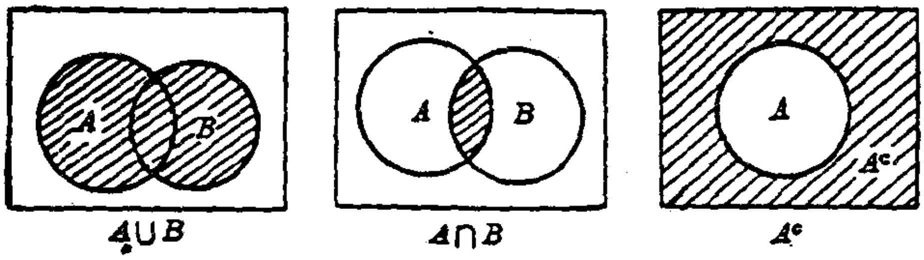

图 1-2 集运算的图示

为了运算上的需要，我们对混合运算作如下的规定：$\cup$，$\cap$，C 在一起时，先取余，后取并，交。

集合运算具有如下的性质：

(1)幂等律：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$

(2)交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

(3)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(4)吸收律：$(A\cup B)\cap A=A$

$(A\cap B)\cup A=A$

(5)分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$　$A\cap(B\cup C)$
$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(6)U 和$\varnothing$满足：

$A\cap U=A$，$A\cup\varnothing=A$

$A\cup U=U$，$A\cap\varnothing=\varnothing$。

(7)复原律：$(A^c)^c=A$

(8)补余律：$A\cup A^c=U$，$A\cap A^c=\varnothing$

(9)对偶律(或称 D$_e$morgan 律)：

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

这些性质都可以直接由并、交、余的定义予以证明。尤其用文氏

图更直观。下面给出 D. Morgun 律的两种证法

证法 1　$\forall u\in(A\cup B)^c\Leftrightarrow u\notin(A\cup B)\Leftrightarrow u\notin A$ 且 $u\notin B\Leftrightarrow u\in A^c$ 且 $u\in B^c\Leftrightarrow u\in(A^c\cap B^c)$。于是得$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

证法 2：
$$\begin{aligned}\mathscr{X}_{(A\cup B)^c}(u)&=1-\mathscr{X}_{A\cup B}(u)\\&=1-(\mathscr{X}_A(u)\vee\mathscr{X}_B(u))\\&=(1-\mathscr{X}_A(u))\wedge(1-\mathscr{X}_B(u))\\&=\mathscr{X}_{A^c}(u)\wedge\mathscr{X}_{B^c}(u)\\&=\mathscr{X}_{A^c\cap B^c}(u)\end{aligned}$$

于是得$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

交、并、余运算可以推广到任意多个集合上去。

定义 2：$\bigcup\limits_{t\in T}A_t\triangleq\{u\mid u\in U,\exists\ t_0\in T,$使 $u\in A_{t0}\}$.

$$\bigcap_{t\in T}A_t\triangleq\{u\mid u\in U,\forall\ t\in T,\text{均有 }u\in A_t\}$$

分别称为集合族$\{A_t,\mid t\in T\}$的并集与交集，这里的 T 是指标集，$\exists$ 是表示“存在”的符号。$\forall$ 是表示“任意”符号。若 $T=\{1,2\}$，那么定义 2 就是定义 1；若 $T=\{1,2,\cdots,n\}$，则定义 2 表示 n 个集合的并集合；若 $T=\{1,2,\cdots,n\cdots\}$，则定义 2 表示可数个集合的并集和交集。

定义 3：对应的特征函数为

$$\mathscr{X}_{\bigcup\limits_{t\in T}A_t}(u)=\bigvee_{t\in T}\mathscr{X}_{A_t}(u)$$

$$\mathscr{X}_{\bigcap\limits_{t\in T}A_t}(u)=\bigwedge_{t\in T}\mathscr{X}_{A_t}(u)$$

用定义易证
$$A\cap(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}(A\cap A_t)$$
$$A\cup(\bigcap_{t\in T}A_t)=\bigcap_{t\in T}(A\cup A_t)$$
$$(\bigcup_{t\in T}A_t)^c=\bigcap_{t\in T}A_t^c,\ (\bigcap_{t\in T}A_t)^c=\bigcup_{t\in T}A_t^c$$

称集合序列$\{A_n\mid n\geqslant1\}$为单调增(降)序列，如果 $A_{n+1}\supseteq A_n$ $(A_{n+1}\subseteq A_n)$，$n\geqslant1$ 此时，记

$$\lim_{u\to\infty} A_n \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ,\ (\lim_{n\to\infty} A_n \triangleq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)。$$

叫做集序列$\{A_n\}$的极限，也可记作

$$A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ,\ (A_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)。$$

定义 4　记 $A-B \triangleq \{u \mid u \in A$ 且 $u \notin B\}$称为 B 对 A 的差集，简称 A 减 B。差运算和余运算可以互相表示：

$$A-B=A\cap B^c$$

$$A^c=U-A$$

定义 5：记 $A \ominus B \triangleq (A-B)\cup(B-A)$

$=\{u \mid u\in A$ 与 $u\in B$ 二者有且仅有一成立$\}$，称为 A 与 B 的对称差。

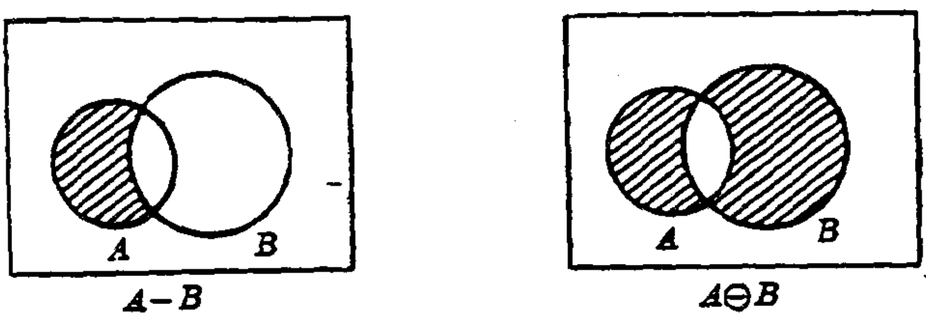

图　1-3　集合的差与对称差

§3. 格、布尔代数、软代数

——$(\mathscr{P}(U),\cup,\cap,C)$，$([0,1],\vee,\wedge,C)$的代数结构

一、格

1. 偏序集与全序集

给定集合 L，如果对它的元素定义一种二元关系$\leqslant$，满足

P_1)自反性：$\alpha\leqslant\alpha$，(对$\forall\ \alpha\in L$)

$P2$)反对称性：若 $\alpha\leqslant\beta$，$\beta\leqslant\alpha$，则 $\alpha=\beta$。

$P3$)传递性：若 $\alpha\leqslant\beta$，$\beta\leqslant\gamma$，则 $\alpha\leqslant\gamma$，那么称$\leqslant$是 L 中一个

偏序，$(L,\leqslant)$叫做一个偏序集。

一个偏序集，若具有可比较性：$\forall\ \alpha,\beta\in L$，$\alpha\leqslant\beta$ 与 $\beta\leqslant\alpha$ 必有一成立，则称$(L,\leqslant)$是一个全序集。

易见，$(\mathscr{P}(U),\subseteq)$是偏序集，但不是全序集。

设$(L,\leqslant)$是一个偏序集，$A\subseteq L$，对$\forall\ \alpha\in A$，均有 $\alpha\leqslant\gamma$（$\gamma\leqslant\alpha$）则称 γ 是 A 的一个上（下）界，如果 γ_0 是 A 的上（下）界中最小（大）者，则称 γ_0 为 A 的上（下）确界。记为

$$\gamma_0=sup\{\alpha\mid\alpha\in A\}(\gamma_0=inf\{\alpha\mid\alpha\in A\})$$

2. 格

定义 1：设$(L,\leqslant)$为一个偏序集，且满足

$P4$）$\forall\ \alpha,B\in L$，$\{\alpha,\beta\}$的上下确界均存在，则称$(L,\leqslant)$为一个格。

格还有一种等价定义。

定义 2：一个集合 L，如果其中定义了两种运算 $\vee$ 与 $\wedge$，满足下列性质：

$(L,1)$幂等律：$\alpha\vee\alpha=\alpha$，$\alpha\wedge\alpha=\alpha$

$(L,2)$交换律：$\alpha\vee\beta=\beta\vee\alpha$，$\alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha$

$(L,3)$结合律：$(\alpha\vee\beta)\vee\gamma=\alpha\vee(I\beta\vee\gamma)$

$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$

$(L,4)$吸收律：$(\alpha\vee\beta)\wedge\alpha=\alpha$

$(\alpha\wedge\beta)\vee\alpha=\alpha$

则称 L 是一个格，记作$(L,\vee,\wedge)$。

下面证明格的两种定义是等价的。

为了说话方便，不妨称定义 1 中定义的格$(L,\leqslant)$为偏序格，而称定义 2 中定义的格$(L,\vee,\wedge)$为代数格。

证明："⇒"设$(L,\leqslant)$是一个偏序格，

令 $\alpha\wedge\beta=\inf(\alpha,\beta)$，$\alpha\vee\beta=\sup(\alpha,\beta)$