

前 言

现代科学技术，特别是近代航空科学技术的发展，在结构强度领域内不仅提出了很多复杂的静力强度问题而且提出了很多有关动力强度的问题。因此，振动理论就成为从事航空工程的技术人员必备的基础知识。

本书是根据1978年航空高等院校教材会议制订的“振动学基础”教学大纲编写的。重点阐述振动学的一些基本理论。结合航空结构的特点介绍振动理论在航空结构分析中的一些应用。书中的一些基本内容取自我们1964年编写的“结构振动”一书。考虑到有限元素法在结构动力学中的飞速发展以及电子计算机在工程技术中的广泛应用，这次编写时增加了有限元素法求解结构固有振动特性及求解动力响应问题的内容，此外增加了随机振动一章。按照教学大纲的要求，书中的内容仍然只涉及线性系统的振动。

全书共九章。第一章是单自由度系统的振动，包括无阻尼与有阻尼的自由振动，以及受和谐干扰与一般干扰时的响应。第二章是变分原理与拉格朗日运动方程，包括广义坐标，拘束的种类与性质，变分原理与拉格朗日运动方程，哈密尔顿原理等一些分析力学的基础知识。第三章是二自由度系统的振动，包括二自由度系统的振动特性，弹性与惯性耦合的概念，主坐标的概念等。第四章是多自由度系统振动的一般理论，包括保守与非保守系统特征矢量（自然振型）的正交特性以及利用主坐标求解受迫振动。第五章是弹性系统的振动，包括杆及梁的振动特性以及瑞莱——李兹近似解法，伽辽尔金近似解法。第六章是矩阵初参数法解飞行器结构的自然频率与自然振型。第七章是柔度影响系数法解梁式飞机的自然频率与自然振型。第八章有限元素法在振动问题中的运用。这一章扼要地介绍有限元素法在求解固有振动特性及动力响应问题中的应用。第九章随机振动概论。包括随机振动的特征量的表述以及系统对随机干扰的响应，并扼要地介绍目前广泛地应用于随机信息处理的快速付里叶变换。

本书一至七章及第八章的第十一节由张世基编写，第八章由诸德超编写，第八章及第五章的第八节由章思骥编写。

教材原稿经赵令诚同志认真审阅，对改进原稿提出了十分宝贵的意见。对此深表谢意。书中的插图是张丽华同志帮助描绘的，谨此致谢。

由于我们的业务水平的限制，教材中不妥之处望读者批评指正。

编者1979年4月

振 动 学 基 础

北京航空学院张世基等编

国防工业出版社出版

北京市书刊出版业营业许可证出字第 074 号

北京航空学院印装 内部发行

787×1092 1/16 437千字

1982年2月第一版1982年2月第一次印刷 印数：0,001—0,700册

统一书号：N15034（三教）39 定价：1.80 元

目 录

第一章 单自由度系统的振动

§ 1 无阻尼自由振动	(1)
§ 1.1 求系统运动方程	(1)
§ 1.2 解运动方程	(2)
§ 2 具有粘性阻尼时的自由振动	(4)
§ 2.1 微小阻尼的情况	(5)
§ 2.2 阻尼很大的情况	(7)
§ 2.3 临界阻尼的情况	(7)
§ 2.4 利用振动的衰减曲线确定阻尼系数	(7)
§ 3 系统受和谐干扰力作用时的强迫振动	(8)
§ 4 系统受和谐干扰力作用时的稳态响应	(10)
§ 5 击迫现象	(12)
§ 6 机械阻抗和导纳的概念	(13)
§ 7 系统受周期干扰力作用时的稳态响应	(17)
§ 8 系统受一般干扰力作用时的响应	(18)
§ 8.1 无阻尼系统的响应	(19)
§ 8.2 有阻尼系统的影响	(20)
§ 8.3 无阻尼系统对谐波干扰力的响应	(21)
§ 8.4 无阻尼系统对锯齿形干扰力的响应	(22)
§ 9 系统受一般干扰力作用时响应的数值解法	(26)
§ 9.1 分段常值杜阿麦积分法	(26)
§ 9.2 分段线性插值的杜阿麦积分法	(27)
§ 9.3 逐步数值积分法	(32)
§ 10 系统对基础扰动的响应	(34)
§ 11 振动隔离的概念	(36)

第二章 变分原理与拉格朗日运动方程

§ 1 引言	(39)
§ 2 广义坐标与拘束的种类及性质	(39)
§ 2.1 广义坐标	(39)
§ 2.2 拘束的种类及性质	(42)
§ 3 广义力与功函数	(43)

§ 4 变分原理与拉格朗日运动方程	(47)
§ 4.1 虚功原理 (虚位移原理)	(47)
§ 4.2 达朗培原理	(48)
§ 4.3 机械能守恒定律	(49)
§ 4.4 哈密尔顿原理	(50)
§ 4.5 完整的保守系统的拉格朗日运动方程	(51)
§ 4.6 完整的非保守系统的拉格朗日运动方程	(52)

第三章 二自由度系统的振动

§ 1 无阻尼系统自由振动的运动方程	(55)
§ 1.1 用达朗培原理求运动方程	(55)
§ 1.2 用影响系数法求运动方程	(56)
§ 1.3 用拉格朗日方程求运动方程	(57)
§ 2 二自由度无阻尼系统自由振动的特性	(58)
§ 3 惯性及弹性耦合与广义坐标的关系	(61)
§ 4 主坐标的概念	(63)
§ 5 二自由度无阻尼系统对和谐干扰力作用时的响应	(64)
§ 6 二自由度有阻尼系统自由振动的特性	(69)
§ 7 二自由度有阻尼系统对和谐干扰力作用时的稳态响应	(71)

第四章 多自由度系统微幅振动的一般理论

§ 1 引言	(73)
§ 2 无阻尼系统的自然频率与自然振型 (主振型)	(73)
§ 3 自然振型 (主振型) 的正交特性	(77)
§ 4 特征根 (或自然频率) 的不变性	(78)
§ 5 主坐标与多自由度系统受外加干扰作用时响应的振型迭加解法	(79)
§ 6 非保守系统的振动	(84)
§ 6.1 非保守系统的运动方程	(84)
§ 6.2 特征根与特征矢量	(85)
§ 6.3 特征矢量的正交特性	(88)
§ 6.4 复主坐标 (相空间) 与受迫振动的主振型迭加解法	(88)
§ 6.5 非自伴随系统的正交条件及受迫振动	(91)

第五章 弹性连续系统的振动

§ 1 引言	(94)
§ 2 杆的纵向自由振动	(94)
§ 3 梁的扭转自由振动	(101)
§ 4 梁的弯曲自由振动	(104)
§ 5 自然振型的正交特性	(109)

§ 6	主坐标与受迫振动	(112)
× § 7	弹性连续系统自然频率的近似解法	(114)
§ 7.1	瑞莱商式——瑞莱原理	(114)
§ 7.2	瑞莱——李兹近似解法	(115)
× § 7.3	伽辽尔金近似解法	(119)
§ 8	分枝模态法简介	(121)

第六章 梁式结构飞机的自然频率与自然振型——矩阵初参数法（传递矩阵法）

§ 1	引言	(130)
§ 2	梁的弯曲自由振动	(130)
§ 3	梁的扭转自由振动	(139)
§ 4	梁的弯曲——扭转自由振动	(140)
§ 5	全机自由振动	(143)
§ 5.1	机翼（尾翼）自由振动	(144)
§ 5.2	机身弯曲振动	(144)
§ 5.3	连接点处机翼（尾翼）影响的处理	(145)

× 第七章 梁式结构飞机的自然频率与自然振型——柔度（影响）系数法

§ 1	引言	(148)
§ 2	机身扭转的柔度矩阵	(151)
§ 3	机身弯曲的柔度矩阵	(152)
§ 4	机翼（尾翼）柔度矩阵	(154)
§ 5	全机对称受载时的柔度矩阵	(156)
§ 6	全机反对称受载时的柔度矩阵	(158)
§ 7	自由——自由飞机结构的自然频率与自然振型	(159)
§ 7.1	自由——自由梁的对称弯曲振动	(159)
§ 7.2	自由——自由梁的反对称弯曲振动	(161)
§ 7.3	自由——自由飞机的振动	(162)
§ 8	振动方程的迭代解法	(167)
§ 8.1	基音频率和振型的迭代解法	(167)
§ 8.2	扫模法求高阶频率及自然振型	(170)
§ 8.3	加速收敛速度的措施——移位法	(172)

第八章 有限元素法

§ 1	引言	(176)
§ 2	梁元素的弯曲刚度矩阵与质量矩阵	(176)
§ 3	梁元素的扭转刚度矩阵与质量矩阵	(180)
§ 4	机翼元素的刚度矩阵与质量矩阵	(182)
§ 5	机翼机身联接点处元素刚度及质量矩阵的处理	(184)
§ 6	刚度矩阵的奇异性及其处理	(185)

§ 7	一致的与不一致的质量矩阵	(187)
§ 8	具有内结点的梁的弯曲元素	(190)
§ 9	自由度的静力缩聚法	(197)
§ 10	载荷矩阵	(198)
§ 11	时间域的有限元素法——伽辽尔金法及加权函数法	(200)
§ 11.1	单自由度动力响应问题的伽辽尔金解法	(200)
§ 11.2	单自由度动力响应问题的加权函数法	(203)
§ 11.3	多自由度系统动力响应的有限元素法	(206)
§ 11.4	阻尼的特性	(208)

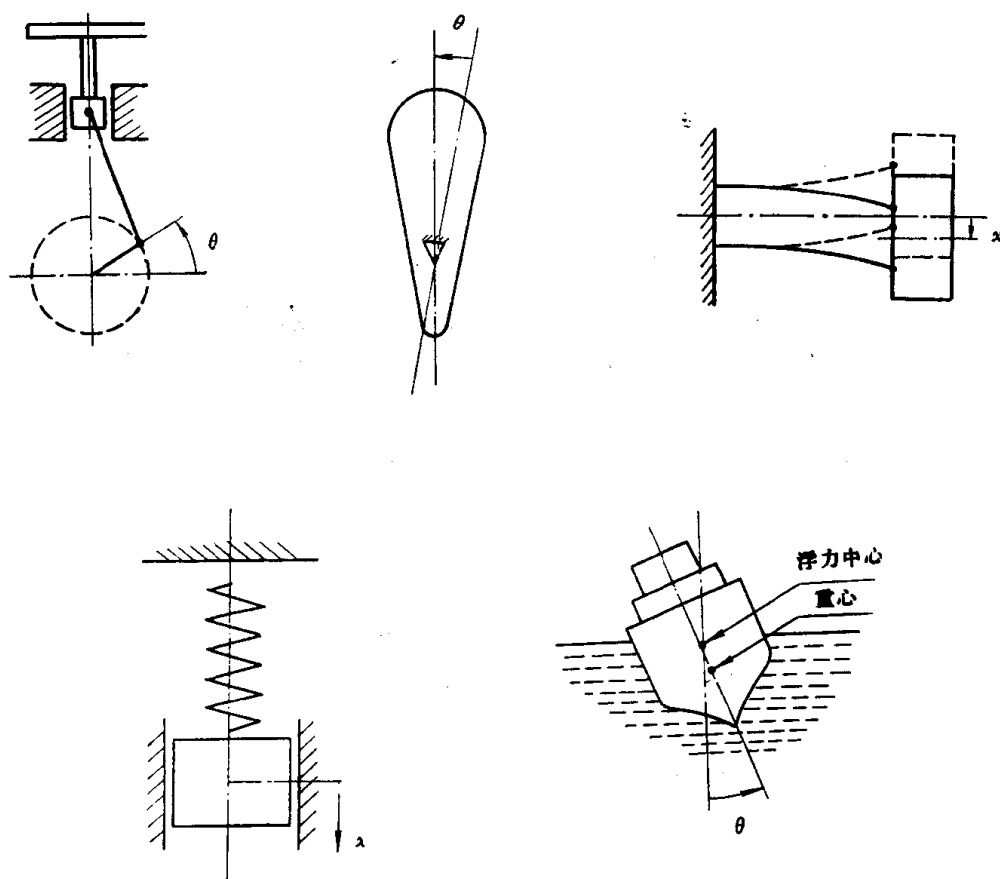
第九章 随机振动概论

§ 1	振动数据的描述及分类	(211)
§ 1.1	正弦周期数据	(211)
§ 1.2	复杂周期数据	(212)
§ 1.3	准周期数据	(213)
§ 1.4	瞬变非周期数据	(214)
§ 2	随机过程及分类	(215)
§ 2.1	平稳随机过程	(216)
§ 2.2	各态历经随机过程	(218)
§ 2.3	非平稳随机过程	(219)
§ 2.4	平稳的样本记录	(219)
§ 3	随机数据的基本特征	(220)
§ 3.1	平均值	(220)
§ 3.2	均方值和方差	(220)
§ 3.3	概率密度函数	(221)
§ 3.4	自相关函数	(224)
§ 3.5	功率谱密度	(227)
§ 3.6	自相关函数 $R_x(\tau)$ 与功率谱密度 $S_x(f)$ 的关系	(232)
§ 3.7	联合概率密度函数	(234)
§ 3.8	互相关函数和互谱密度	(237)
§ 3.9	导数过程的谱密度	(240)
§ 4	线性系统对随机振动的响应	(242)
§ 4.1	复频响应、复频响应与脉冲响应的关系	(243)
§ 4.2	响应的平均值、自相关函数、功率谱密度及均方值	(244)
§ 4.3	激励和响应间的互相关函数和互(协)功率谱密度	(247)
§ 4.4	单自由度线性系统的响应	(250)
§ 5	离散的付里叶变换和快速付里叶变换	(253)
§ 5.1	离散的付里叶变换	(254)
§ 5.2	用离散的付里叶变换计算功率谱密度	(256)
§ 5.3	快速付里叶变换	(258)

第一章 单自由度系统的振动

§1 无阻尼自由振动

所谓单自由度系统，是指其在空间的位形以可用一个变量（参数或者者坐标）来加以确定的系统，例如图（1.1）所示的各种系统。



图（1.1）

我们现在来考查一下图（1.2）所示的一个悬挂在很轻的弹簧（即其质量可忽略不计）上处于静止状态的重块。当重块受外加干扰作用时将偏离平衡位置，一旦干扰消除后重块将发生振动。现在的问题是要研究重块的运动规律，即要求出重块位置随时间的变化规律。为此，可按下列步骤来处理。

§1.1 求系统运动方程

我们用变量 x 来表示重块在任一时刻的位置，那么 x 将是时间 t 的函数， $x = x(t)$ 。假设 x 的坐标原点取在平衡位置处，并取向向下为正，如图（1.2）所示。重块运动中所受的力只考虑弹簧力 $-kx$ （其中 k 代表弹簧常数，重力 W 已被静伸长中弹簧力所平衡）。根据牛

顿第二定律就可以求出重块的运动方程。

我们知道牛顿第二定律表述为：“作用在质点上的力等于质点质量与其加速度的乘积”。已知重块偏离平衡位置 x 后，作用在重块（质点）上的弹簧力是

$$F_s = -kx(t) \quad (1)$$

根据牛顿第二定律有：

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \quad (2)$$

或

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \textcircled{1} \quad (3)$$

式中 m 代表质点质量。

方程式（3）就是图（1.2）所示单自由度无阻尼系统自由振动时的运动微分方程。

引用达朗培（*D'Alembert*）原理同样可以导出系统的运动方程。如所周知，达朗培原理说：“引入惯性力的概念，并把惯性力加到质点上，则质点在任何瞬时都可看作是平衡的”。即可将质点运动问题当作相当的静力平衡问题来处理。因为质点的惯性力

$$F_{i_n} = -m\ddot{x}(t) \quad (4)$$

按照达朗培原理，就得到

$$F_s + F_{i_n} = 0 \quad (5)$$

将（1）式及（4）式代入（5）式中，得到质点运动方程为：

$$-kx(t) - m\ddot{x}(t) = 0 \quad (6a)$$

或

可见所得结果与（3）式完全相同。它是一个线性齐次的二阶微分方程。通常，在研究重块运动状况时，还有初始条件，即 $t=0$ 时，重块偏离平衡位置的初始位移与初始条件：

$$x(0) = x_0; \quad \ddot{x}(0) = \ddot{x}_0 \quad (7)$$

（3）式与（7）式合在一起就是本节所叙述问题的数学提法。

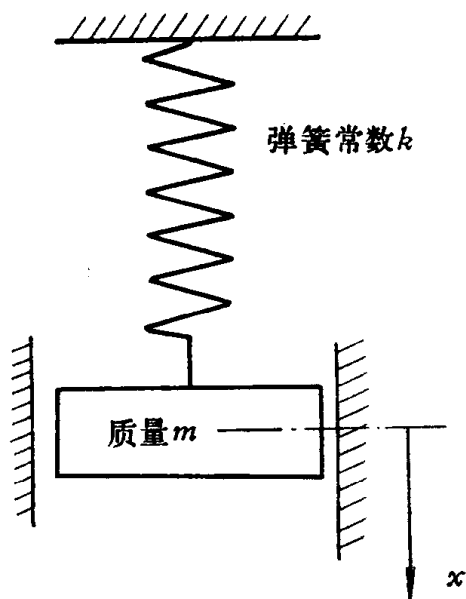
§1.2 解运动方程

为求解齐次微分方程（3）式的通解，只要设特解为：

$$x(t) = Ce^{\lambda t} \quad (8)$$

注① 符号上的“ $\cdot$ ”代表对时间 t 的导数，即

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}; \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$



图（1.2）

其中 C 与 λ 是常数。

将(8)式代入(3)式中,得到

$$(m\lambda^2 + k)Ce^{\lambda t} = 0 \quad (9)$$

对于有意义的解应有:

$$(m\lambda^2 + k) = 0 \quad (10)$$

方程式(10)称为(3)式的特征方程,它的根为:

$$\lambda_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm j\omega \quad (11)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

因此,(3)式的通解是:

$$x(t) = C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} \quad (12)$$

其中 C_1 与 C_2 是任意常数。

由于

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (13)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

所以

$$C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} = C_1 (\cos \omega t + j \sin \omega t) + C_2 (\cos \omega t - j \sin \omega t)$$

因而

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cos \omega t + j(C_1 - C_2) \sin \omega t \quad (14)$$

重块的运动(位移) $x(t)$ 是一个真实的物理量。因此,上式右边两项只能是实数,即 C_1 与 C_2 必须是一对共轭复数,由此得到:

$$x(t) = \bar{A} \cos \omega t + \bar{B} \sin \omega t \quad (15a)$$

或

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (15b)$$

其中 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ (或 A 与 φ)是任意常数。(15)式指出,重块围绕平衡位置的振动将是一个和谐运动。式中 A 表示位移 x 能达到的最大值,称为振幅, φ 是一个角度,称为相位(角)。

(15)式揭示了无阻尼自由振动系统的和谐特性。由于这种情况下系统所持有的总能量既不消散也不增加。因此,运动一经开始就延续不断地保持下去。

和谐运动可以用一个旋转矢量的投影来表示,如图(1.3)所示。旋转矢量的模为 A ,而旋转矢量的角速度为 ω ,称为系统的自然圆周频率(弧度/秒)或固有圆周频率。显然,从(15)式可知,无阻尼自由振动是周期运动,振动重复一周所需的时间 T 称为自然周期,它与自然圆周频率之间的关系是:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (16)$$

反之，每单位时间内振动的次数

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (17)$$

称为自然频率（周/秒或赫兹(Hz)）。由（11）式可知，它只与系统的弹性性能及质量特性有关。因此，它是系统的固有特性。

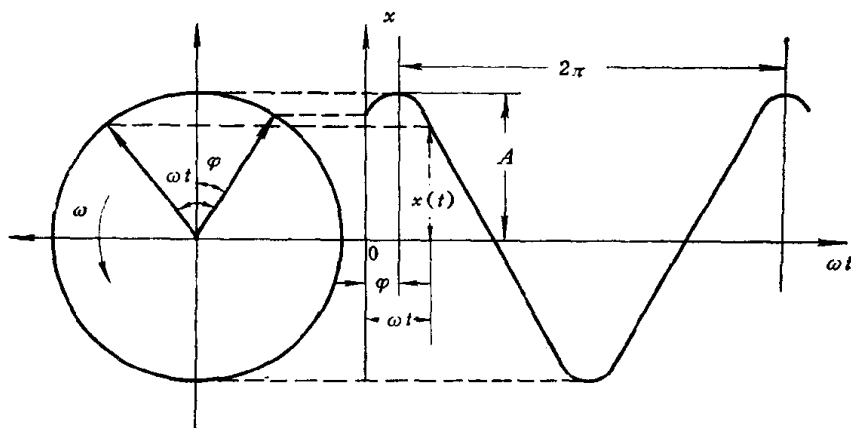


图 (1.3)

至于振幅 A 与相角 φ 则取决于初始条件（7）式。将（15b）式代入（7）式，得到：

$$\begin{aligned} x(0) &= A \cos \varphi = x_0 \\ \dot{x}(0) &= A \omega \sin \varphi = \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (18)$$

由此解得：

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \quad (19)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0} \right)$$

如果将（15a）式代入（17）式，则得

$$\begin{aligned} \bar{A} &= x_0 \\ \bar{B} &= \dot{x}_0 / \omega \end{aligned} \quad (20)$$

将 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 代回（15a）式，则有

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (21)$$

§2 具有粘性阻尼时的自由振动

在实际系统中多少总是具有阻尼的，而且阻尼力的性质是很复杂的，它可能是位移、速度以及其它因素的函数。工程结构中常常采用粘性阻尼的假设，这类阻尼力与速度成正比，

方向相反。即

$$F_D = -c\dot{x} \quad (1)$$

其中 c 是常数，称为粘性阻尼系数，单位是（公斤—秒/厘米）。

图（1.4）表示一个具有粘性阻尼 c 的系统。现在来研究这个系统的运动规律。

根据达朗培原理，可求得系统的运动方程为：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2)$$

它是线性的齐次微分方程，设特解为：

$$x = Ae^{\lambda t} \quad (3)$$

代入（2）式，得到：

$$\left(\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m}\right)Ae^{\lambda t} = 0$$

对于有意义的解应有：

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad (4)$$

（4）式即是所谓的特征方程。求解（4）式，得到：

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (5)$$

引入符号：

$$\frac{k}{m} = \omega^2 ; \quad \frac{c}{2m} = \epsilon \omega$$

则（5）式可写成：

$$\lambda_{1,2} = (-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1})\omega \quad (6)$$

其中 ϵ 称为阻尼因子。

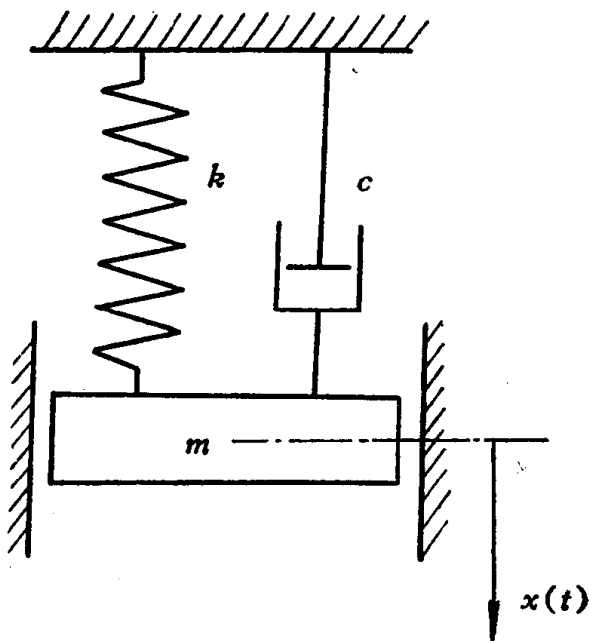
§ 2.1 微小阻尼的情况

当阻尼不大时，即 $\epsilon < 1.0$ ，则（6）式根号内的数值是负实数，所以 λ 是一对共轭复数：

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= (-\epsilon \pm j\sqrt{1-\epsilon^2})\omega \\ &= -\epsilon\omega \pm j\omega_d \end{aligned}$$

其中

$$\omega_d = \sqrt{1-\epsilon^2}\omega$$



图（1.4）

于是，方程式（2）的通解为：

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\epsilon \omega t} (A_1 e^{j \omega_d t} + A_2 e^{-j \omega_d t}) \quad (7a)$$

或者写成：

$$x(t) = e^{-\epsilon \omega t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \quad (7b)$$

也可写成：

$$x(t) = e^{-\epsilon \omega t} D \cos(\omega_d t - \varphi) \quad (7c)$$

其中 A 与 B （或 D 与 φ ）是任意常数，它们由初始条件决定。

设已知 $t=0$ 时，初始位移与初始速度为：

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (8)$$

将（7b）式代入（8）式，得到：

$$\begin{aligned} x_0 &= A \\ \dot{x}_0 &= -\epsilon \omega A + \omega_d B \end{aligned} \quad (9)$$

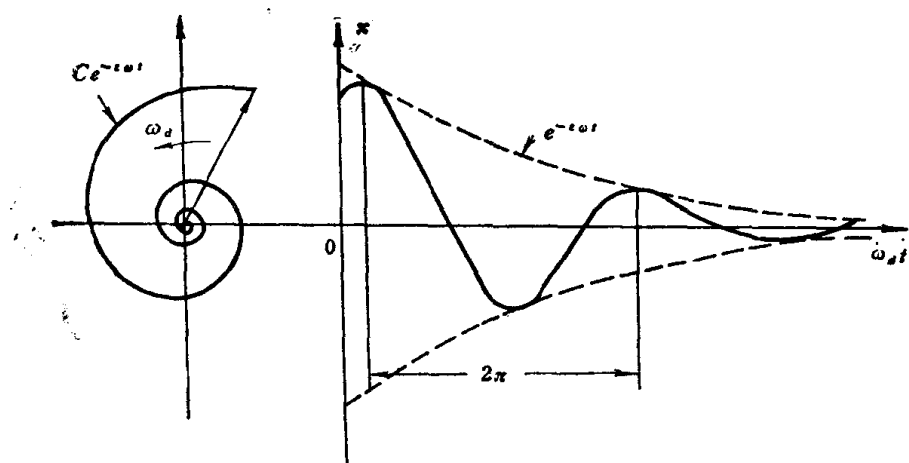
由此解得：

$$\begin{aligned} A &= x_0 \\ B &= \frac{\dot{x}_0 + \epsilon \omega x_0}{\omega_d} \end{aligned}$$

将 A 与 B 代入（7b）式，得到：

$$x(t) = e^{-\epsilon \omega t} \left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \epsilon \omega x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (10)$$

方程式（7）代表的是衰减性振荡运动，这种运动可以用一个模按指数函数 $e^{-\epsilon \omega t}$ 减小的旋转矢量的投影来代表，如图（1.5）所示。矢量旋转的角速度为 ω_d 。所以这种振动的周



图（1.5）

期为 $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ ，其倒数（也就是频率）记为 $f = \frac{\omega_d}{2\pi}$ 。 ω_d 称为有阻尼系统的自然圆周频率。

$$\omega_d = \sqrt{1 - \epsilon^2} \omega \quad (11)$$

当阻尼很小时 (即 $\epsilon \ll 1.0$) 则

$$\omega_d \approx \omega$$

通常铆接结构的飞机, 其当量粘性阻尼因子 ϵ 大约是 $0.01 \sim 0.04$ 。因此, 计算结构的自然频率时, 可不考虑阻尼的影响。

§ 2.2 阻尼很大的情况

当阻尼很大时, 即 $\epsilon > 1.0$, 公式 (6) 式根号内的数值是实数, 所以 λ 的根是二个不相等的负实数。于是, 系统的运动变成二个按指数函数衰减的运动之和:

$$x(t) = A_1 e^{(-\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - 1}) \omega t} + A_2 e^{(-\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 1}) \omega t} \quad (12a)$$

或者写成:

$$x(t) = e^{-\epsilon \omega t} (C \sinh \omega \sqrt{\epsilon^2 - 1} t + D \cosh \omega \sqrt{\epsilon^2 - 1} t) \quad (12b)$$

其中 A_1 与 A_2 (或 C 与 D) 是取决于初始条件的常数。方程式 (12) 代表过渡阻尼的情况。这时运动不再具有振荡的性质了。

§ 2.3 临界阻尼的情况

从上面的讨论中知道, 当阻尼系数逐渐增大时, 系统的运动特性就有可能从振荡性过渡到非振荡性的。临界情况相当于:

$$c = 2m\omega = c_c \quad (13)$$

其中 c_c 称为临界阻尼系数, 它代表使运动变成非振荡性运动的最小阻尼值。这时 $\epsilon = 1.0$, 特征方程的根是一对重根:

$$\lambda_{1,2} = -\epsilon \omega \quad (14)$$

于是, 方程式 (2) 的通解具有如下的形式:

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\epsilon \omega t} \quad (15)$$

§ 2.4 利用振动的衰减曲线确定阻尼系数

实际结构系统的阻尼特性往往是十分复杂和难于确定的。工程实践中常将实际结构简化成具有当量粘性阻尼因子 ϵ 的系统来处理。我们知道, 在阻尼振动中, 振幅的衰减率是随阻尼的大小而变的。因此, 可以用振幅衰减率来表示系统的阻尼的大小。对于具有粘性阻尼的系统, 振幅是按指数的函数递减的, 由 (10) 式可以看出, 相隔周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ 的两个瞬时位移之比是一常数。

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\epsilon \omega T} \quad (16)$$

换言之。在时间间隔 $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ 时，位移是按几何级数递减的。因此，位移的对数递减率是：

$$\begin{aligned}\delta &= \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln \frac{e^{-\epsilon \omega t}}{e^{-\epsilon \omega (t+T)}} = \epsilon \omega T \\ &= \frac{\epsilon \omega 2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\end{aligned}\quad (17)$$

图 (1.6) 表示了 δ 与 ϵ 之间的关系，当 ϵ 很小时，可以略去上式分母中的高阶量 ϵ^2 ，于是 (17) 式可写成：

$$\delta = 2\pi\epsilon \quad (18)$$

另一方面 (17) 式可近似地表为：

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \left(\frac{x_2 + \Delta x_2}{x_2} \right) = \ln \left(1 + \frac{\Delta x_2}{x_2} \right) \quad (19)$$

其中 x_1 与 x_2 是相差一个周期时的二个最大振幅，如图 (1.7) 所示。当阻尼很小时，振幅的衰减速度也是很慢的。因此如将 (19) 式按幂级数展开并略去高阶小量，则得：

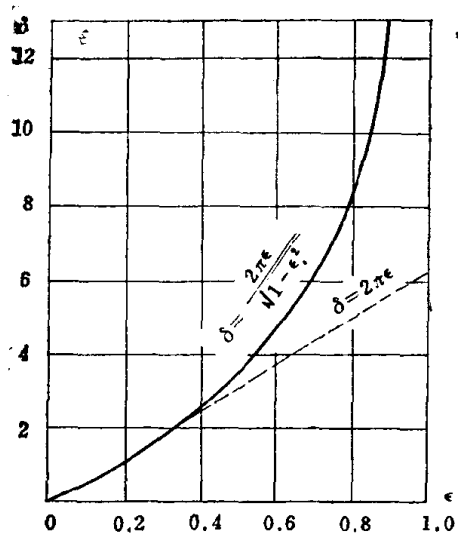


图 (1.6)

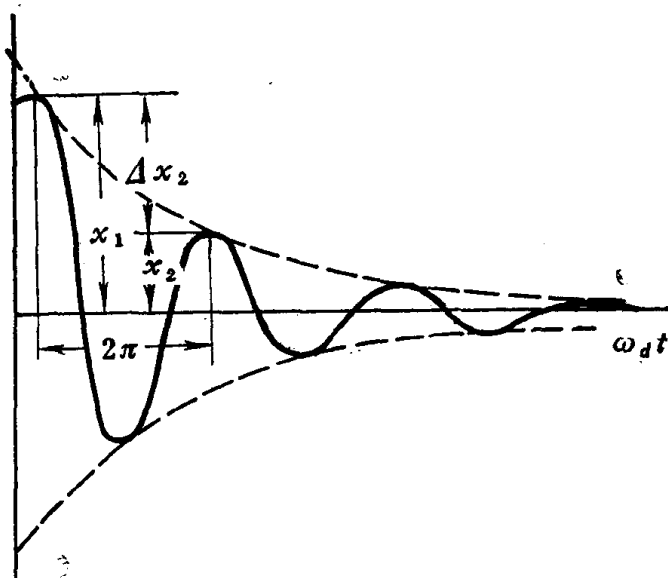


图 (1.7)

$$\delta \approx \frac{\Delta x_2}{x_2} \quad (20)$$

于是，利用 (18) 及 (20) 式，可以根据实验的振动衰减曲线定出系统的阻尼值。

§3 系统受和谐干扰力作用时的强迫振动

假定图 (1.8) 所示系统受和谐干扰力作用时，其运动方程可写成：

~ 8 ~

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{jpt} \quad (1)$$

其中 F 与 p 分别代表干扰力的幅值与频率。方程式(1)是线性的非齐次微分方程。一般说来,求解非齐次方程(1)的步骤是:先求出它的余函数,也就是齐次方程的通解,再求出非齐次方程的一个特解,然后将它们加起来就得到(1)式的通解。齐次方程的解代表了一个已经讨论过的自由振动的情况,所以下面讨论非齐次方程的特解部分。

设方程式(1)的特解为:

$$x = x_0 e^{jpt} \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式中,得到:

$$-p^2 m x_0 + jcp x_0 + kx_0 = F$$

由此解得:

$$x_0 = \frac{F}{k - mp^2 + jcp} \quad (3)$$

利用上一节中引用的符号:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad ; \quad c = 2m\omega\epsilon$$

以及

$$\Omega = \frac{p}{\omega} \quad ; \quad x_{st} = \frac{F}{k} = \frac{F}{m\omega^2} \quad (4)$$

其中 Ω 代表干扰力的频率与系统自然频率之比,而 x_{st} 代表重块在静载荷 F 作用下产生的位移。于是,(3)式可写成:

$$x_0 = \frac{F}{k\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\epsilon^2\Omega^2}} e^{-ja} \quad (5)$$

其中

$$a = \tan^{-1} \frac{2\epsilon\Omega}{1-\Omega^2}$$

因此,方程式(1)的特解是:

$$x(t) = \frac{x_{st}}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\epsilon^2\Omega^2}} e^{j(pt-a)} \quad (6a)$$

注① 因为

$$Fe^{jpt} = F\cos pt + jF\sin pt$$

所以,用复数 Fe^{jpt} 表示和谐运动时,通常是指其实部代表和谐运动。

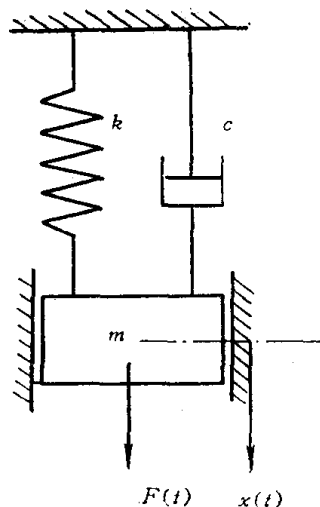


图 (1.8)

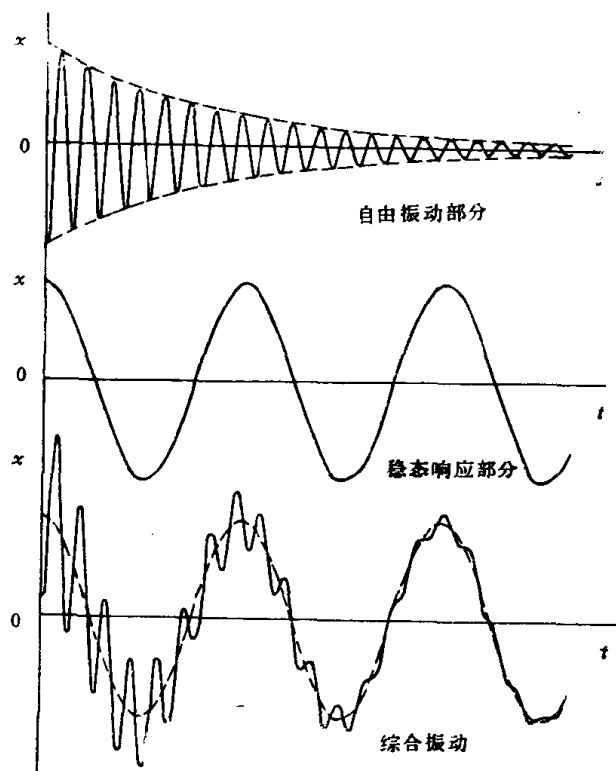
其实部是：

$$x(t) = \frac{x_{st}}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\epsilon^2\Omega^2}} \cos(pt - \alpha) \quad (6b)$$

这样，方程（1）的通解具有如下形式：

$$x(t) = e^{-\epsilon\omega t} D \cos(\omega_d t - \varphi) + \frac{x_{st}}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\epsilon^2\Omega^2}} \cos(pt - \alpha) \quad (7)$$

在图（1.9）中绘出了当 $\sqrt{1-\epsilon^2}\omega \gg p$ 时，通解（7）式两个组成部分及其综合结果的示意图。可以看出，非齐次方程（1）式的通解（7）式中的第一项（即代表自由振动情况的齐次方程的通解）经过相当长时间后就变得很小而可略去不计。因此，包含自由振动影响的过程就被称为瞬态过程。而通解（7）式的第二项（即代表强迫振动情况的特解）却始终维持恒定振幅作和谐振动，它被称为系统对外加干扰力的稳态响应，简称稳态响应。



图（1.9）

§4 系统受和谐干扰力作用时的稳态响应

我们现在专门研究稳态响应的特征。这时稳态响应：

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_{st}}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\epsilon^2\Omega^2}} \cos(pt - \alpha) \\ &= \beta x_{st} \cos(pt - \alpha) \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\epsilon^2\Omega^2}} \quad (2)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{2\epsilon\Omega}{1-\Omega^2}$$

β 称为放大因子，它代表了动载荷效应对位移的影响。 α 称为相位角，它代表和谐干扰产生的位移滞后于干扰力的相位角。它们都是频率比 Ω 与阻尼因子 ϵ 的函数，图 (1.10) 上的曲线表示了它们之间的函数关系。研究一下这些曲线，就可得出结论：

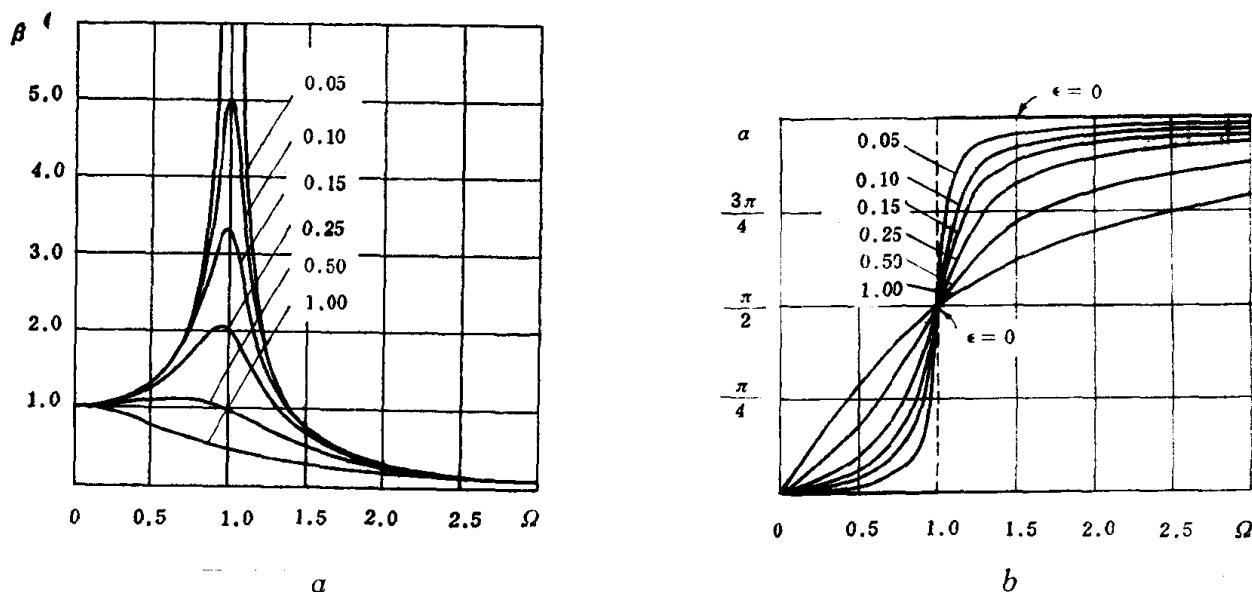


图 (1.10)

(1) 当干扰力的频率 p 接近系统的固有(自然)频率 ω 时，即当 $\Omega = p/\omega \rightarrow 1.0$ 时，振幅急剧增大，当 $\Omega = 1.0$ 时（也就是干扰力的频率 p 等于系统的自然频率 ω 时），振幅响应几乎达到最大值。当振幅响应达到最大时称为共振（振幅共振）。

(2) 阻尼为零（即 $\epsilon = 0$ ）时，相位角 α 只可能是零（当 $p < \omega$ 时）或 180° （当 $p > \omega$ 时）。由于阻尼的作用，相位角随频率而变化。当 $\Omega = 1.0$ 时，相位角总是 90° 。这种相位角响应总是 90° 的现象称为相位共振。

相位共振的频率与振幅共振的频率是有些差别的，当阻尼不大时两者相差甚微。从分析振幅响应或相位响应所引出的所谓共振（振幅共振或相位共振）现象，是工程中用共振实验的方法来测定系统固有特性的理论根据。

为了进一步认识共振现象的本质，还需要研究一下和谐干扰时响应的一般解。在共振时， $\Omega = 1.0$ ， $\alpha = 90^\circ$ 因此，§3 中的方程式 (7) 变成：

$$x(t) = e^{-\epsilon\omega t} D \cos(\omega_d t - \varphi) + \frac{x_{st}}{2\epsilon} \sin \omega t \quad (3)$$

假定起始时刻，系统是静止的，即

$$\begin{aligned} t = 0 \text{ 时,} \quad x &= 0 \\ \dot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

利用上述初始条件。可求得 (3) 式的积分常数。为此，将 (3) 式对 t 微分，得到：

$$\dot{x}(t) = D e^{-\epsilon\omega t} [-\epsilon\omega \cos(\omega_d t - \varphi) - \omega_d \sin(\omega_d t - \varphi)] + \frac{x_{st}}{2\epsilon} \omega \cos \omega t$$