高 等 学 校 教 材

模型实验的基本理论与方法

屠 兴 编著

西 北 工 业 大 学 出 版 社

1989年8月 西安

内 容 简 介

本书论述模型实验的基本理论和方法：包括量纲分析、相似理论、现象相似与模型实验、实验误差分析和实验数据处理等。书中介绍了模型实验在流体力学领域中的应用情况，但其基本理论和方法对力学领域中的模型实验都是适用的。本书可作为有关专业的大学生、研究生和科技工作者的教材或参考书。

高 等 学 校 教 材

模型实验的基本理论与方法

编　著　屠　兴

责任编辑　王俊轩

责任校对　耿明丽

*

西北工业大学出版社出版

（西安市友谊西路127号）

陕 西 省 新 华 书 店 发 行

西北工业大学出版社印刷厂印装

ISBN 7-5612-0178-8/V·3（课）

*

开本 787×1092毫米　1/16　9.5印张　223千字

1989年8月第1版　　1989年8月第1次印刷

印数 1—2000册　　定价：1.97元

序　言

长期以来，在实验流体力学教学中遇到的一个主要问题是缺乏合适的教材。在研究生的教学中，这更是一个突出的问题。实验流体力学方面现有的国内、外专著绝大部分是关于专门的实验技术或测量技术方面的，在实验的基本理论和方法方面往往只作很简单的介绍。例如，在绝大多数这方面的著作中，对于相似理论的论述往往仅直接指出相似正定理、逆定理和Π定理，而不作证明。对于现象相似问题，大多数书本也仅是从几何相似、运动相似和动力相似来论述的。这样的论述对于深入地理解现象相似和模型实验问题是不够的。

作者认为，实验教学不仅要告诉人们如何完成某项实验或在实验中如何测定某个参量，更重要的是应告诉人们模型实验应遵循的一些基本理论和方法。只有遵循这些基本理论和方法来安排实验，合理地分析和处理实验结果，才能使模型实验得到预计的结果。

基于这样的认识，作者在长期从事流体力学实验研究的基础上编写了这本教材。1984年以后正式为研究生开设了这门课程。课程的主要内容是：量纲和量纲分析、相似理论及其应用、现象相似与模型实验、实验误差分析和实验数据处理等。由于作者是为实验流体力学方向的研究生讲授该课程的，故书中的应用例子均是选择流体力学方面的问题。但是，书中讲述的基本理论和方法对于力学领域中的模型实验是完全适用的。

本书除了可作为实验流体力学方向学生的教材外，对从事力学实验的科技工作者也可作为参考用书。

由于作者水平所限，错误、缺点在所难免，敬希读者指正。

屠　兴

1989年1月于西安

目　录

第一章 量纲和量纲分析

§1.1 引言

在研究力学现象时，经常应用一些能表示出所研究现象特征的物理概念，如能量、速度、应力等。它们都用数字来确定其数值。

自然界所有的运动和平衡问题都可以归结为对表示现象特征的量确定其数值或某种函数关系。自然规律往往是以特征量间的函数方程，通常是微分方程表示出来的。

纯理论来研究这些问题是用数学方法来表示运动的特征并得出所要求的函数关系。但是，在解力学问题的很多场合，会遇到不可克服的数学困难。经常会遇到这样一些力学问题，其现象是如此复杂，以致至今还没有建立起合适的物理模型，更没有建立起运动方程。这种问题在空气动力学、结构力学、宇航工程及其它工程中会经常遇到。在这种场合，实验研究方法便占有主导地位。通常这类实验研究常常是进行能基本上模拟所研究现象的实验，测定实验数据，然后把它们写成某种数学关系式来加以应用。

为了正确地提出并进行实验，并能把其结果用于难于进行实验或甚至不能进行实验的场合，必须对所研究的问题进行分析。实验应在理论的指导下进行。实验结果应按一定关系正确地应用到实物上去。一般说来，实验模拟是以相似理论为基础的。通常是用方程分析法或量纲分析法对所研究的现象进行必要的理论分析，并导出相似准则。实验内容是以建立能推广到实物的准则关系式为其目的的。

模拟，是指对真实事物（实物）的形态、工作规律或信息传递规律在特定的（一般是简化的）条件下的一种相似再现。模拟一般是用模型来实现的，通常是在专门的试验设备或电子计算机上进行。

定量研究用的模拟可分为

1．物理模拟　模型的工作规律与实物相似，区别仅在于物理量的大小比例不同，但现象的物理本质不变。

物理模拟与真实情况的物理特性一般是同类的，也可以是异类的，如用电场来研究温度场、流场等。他们都被同样的微分方程式所描述。

2．数学模拟　在这种模拟中保持信息传递规律与实物相似。数学模拟与实物所进行的物理过程本质上是不同的，但信息传递按同一微分方程式进行。

数学模拟只有在建立了微分方程式后才能实现，而物理模拟只要知道了参与的物理量时就能实现。

数学模拟可以很方便地研究各物理量变化时对工作过程的影响，故它可着重研究某系统在改变输入信息后工作过程的变化。数学模拟一般在电子计算机上进行。

随着计算机技术的发展，数学模拟的应用范围在不断地扩大。但是，物理模拟仍然具有十分重要的作用。到目前为止，绝大部分科研成果主要是依靠物理模拟来取得的。特别是对于尖端的近代科学成就，仍然依靠物理模拟来加以研究。由于物理模拟能最大限度地反映出现象的物理本质，并且直观性强。因此，即使在应用数学模拟时，一般也要同时进行物理模拟，二者相辅相成。特别是对于复杂的现象，二者配合起来会更有成效。也就是说把物理模

拟的结果与数学模拟的结果进行对照，使数学模型渐趋完善，然后再应用被物理模拟验证过的数学模型在电子计算机上分析研究实物中的现象。这样的过程应该是今后研究工作的方向。

物理模拟一般是在按相似原理建立的与实物保持相似的模型上通过试验来求出相似准则之间的函数关系。此函数关系适用于一切相似现象，故可推广到实物上去。具体来说，物理模拟可应用于下面几个方面。

1． 用少量试验，配合方程分析或量纲分析，来获得参量间的全面关系。这样可大大减轻试验工作量，并使试验易于进行。

2． 在实物设计阶段，可通过模型试验来了解实物的未来性能。

3． 对产品极限性能的了解往往伴随着产品的毁坏。因而用模型试验来进行研究最为合理。

4． 探索未研究过的现象的基本规律。

在进行物理模拟时，应正确地选择无量纲参数。它们的数目应最少，并且所有参数应在最大程度上反映出被研究对象的主要物理现象，以大大减轻试验工作量。这方面的工作是应用量纲分析和相似理论得出的。因此，要有成效地提出并进行实验，不考虑相似和量纲问题是不可想象的。有时，在研究的开始阶段，量纲理论是唯一可能的方法，量纲理论的正确应用往往可以得出极为重要的结论。但是，也不能过高地估计量纲理论的能力。它得到的结果在大多数情况下是比较一般的。但是，只要把量纲理论的结果与实验得到的或运动方程数学解得到的结果联合起来，常常可以导致十分重要的结果。应该注意的是，把量纲和相似理论应用到新的问题时，需要研究工作者熟悉实验，并能把它渗透到被研究现象的本质中去。

§1.2 量纲量和无量纲量

测量任何一个量，就是将此量与被选作测量单位的同类量相比较，并且用数字来表示所得到的比例。

凡数值取决于所取测量单位的量称为量纲量或有名的量。

凡数值与所取测量单位无关的量称为无量纲量或轴象的量。

长度、时间、力、能、动量是量纲量的例子。角度、两长度之比、长度平方和面积之比、能量和动量之比是无量纲量的例子。

把量区分为量纲和无量纲量在一定意义上是有条件的。例如，通常认为角度是无量纲量。但是，角度又可以用弧度（Rad.）、度（Deg.）、和直角的百分数（Grad.），即用不同的单位来表示。这时，角度的数值便取决于所选取的测量单位。因而角度可以认为是量纲量。但若把角度确定为所对应的圆周弧段的长度和半径之比，这就确定了单一的角度测量单位。角度便可以认为是无量纲量。若在所有测量单位制中对长度都取统一的、固定的测量单位，那么这样做以后，长度也可以认为是无量纲量。但是，取固定的测量单位对角度是很方便的，而对长度则不方便。这可以这样解释，对于几何相似的图形，对应的角度相同，而对应的长度不同。因此在不同问题中对长度选取不同的测量单位比较方便。

加速度通常认为是量纲量，其量纲是长度除以时间的平方。在很多问题中，重力加速度（它等于物体在真空中下落的加速度）g 可以认为是常量（$9.81 m/s^2$）。这个常数的加速度 g 可以选作加速度的固定的测量单位，也即在所有测量单位制中都采用它作为测量单位。这

样，任一加速度都可以用它和重力加速度 g 的比值来确定。此比值称为过载。在测量单位制变化时，它的数值不变。因此过载是无量纲量。但是，过载也可以看作是量纲量，它的加速度是以重力加速度作为测量单位来量度的。这时，假定对于过载（加速度）的测量单位也可以取不等于重力加速度的加速度量。

从另一方面看，无量纲是从一般概念上来说，也可以用不同的方法来表示。实际上，两长度之比不仅可以表示成算术分数，也可以用百分比或其它方法来表示。

因此，量纲量和无量纲量的概念是相对的概念。如果引入某些辅助的测量单位，当对所有测量单位制采用这些辅助的测量单位时，若某些量的数值不变，这些量便可以认为是无量纲量。

由此可知，某些量在一种场合可以认为是量纲量，而在另一种场合则可以认为是无量纲量。

§1.3 基本和导出测量单位，常用的测量单位制

在自然界中，不同的物理量之间往往以一定的关系互相联系着。因此，若把这些物理量中的某些取作基本量，并对它们建立起某种测量单位，则所有其它物理量的测量单位可以通过物理规律，用基本量的测量单位来表示。基本量的测量单位称为基本的或第一位的，而所有其它量的测量单位称为导出的或第二位的。

实践表明，对三个量建立起基本测量单位已是足够的了。在不同的问题中可以选取不同量的测量单位作为基本测量单位。在物理学研究中，取长度、时间和质量的单位作为基本测量单位比较方便。而在工程技术中，则广泛采用长度、时间和力的单位作为基本测量单位。

长度单位 1 米，质量单位 1 千克和时间单位 1 秒是国际上以明确的协议形式建立起来的。在法国巴黎的国际度量衡标准局保存着铂制的米和千克原器。1 秒则取平均太阳日的 1/(24×3600)（1960年第11届国际计量大会规定 1 米等于氪 -86 原子的 $2p_{10}$ 和 $5d_5$ 能级之间跃迁所对应的辐射在真空中的 1650763.73 个波长的长度。1967 年第 13 届国际计量大会规定 1 秒是铯 -133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的 9192631770 个周期的持续时间）。

在这样建立起基本测量单位后，其它物理量如力、能、速度、加速度等的测量单位可以直接由它们的定义或通过物理规律得到。

用基本测量单位来表示导出测量单位称为量纲。量纲可以用公式的形式象征性地写出。通常长度单位用符号L，质量单位用M，时间单位用T。（在工程单位制中力的单位F）。

以后，将用符号[a]来表示某个量 a 的量纲。这是马克斯威尔（J.C.Maxwell)在 1894 年建议采用的。例如，在物理学中，力 F 的量纲可写为

$$[F]=\frac{ML}{T^2}$$

应用量纲公式，可以在测量单位变化时换算出量纲量的数值。例如，对重力加速度 $g=981\text{cm/s}^2$。如需把测量单位转换至公里和小时，则因

$$1\text{cm}=\frac{1}{10^5}\text{km} \qquad 1\text{s}=\frac{1}{3600}\text{h}$$

便有

$$g = 981\text{cm/s}^2 = 981\frac{1/10^5\text{km}}{(1/3600)^2\text{h}^2} = 1.27\times10^5\text{km/h}^2$$

一般说来，若在新的测量单位制中长度单位比老的小α倍，质量单位小β倍，时间单位小γ倍，则具有量纲$[a]=L^lM^mT^n$的物理量 a 的数值在新的单位制中要大$\alpha^l\beta^m\gamma^n$倍。

基本测量单位数并非必须等于 3 。通常还可以取大于 3 的更多个基本测量单位。例如，可以用实验的方法建立起相互独立的四个量：长度、时间、质量和力的测量单位作为基本测量单位。这时，牛顿第二定律便具有下面的形式

$$F = cma \tag{1.1}$$

式中F是力，m是质量，a是加速度，而c是具有下列量纲的常数

$$[c]=\frac{FT^2}{ML} \tag{1.2}$$

在这样选取基本测量单位后，物理量的量纲公式中在一般情况下可包含四个基本测量单位。在(1.1)式中的系数c是物理量。它类似于重力加速度g或万有引力定律中的引力常数γ

$$F = \gamma\frac{m_1m_2}{r^2} \tag{1.3}$$

式中m_1和m_2是两个质点的质量，r是它们之间的距离。

如把常数c认为是无量纲量（因而c在所有测量单位制中具有相同的数值），等于或不等于1 。力的量纲便可通过质量、长度和时间来确定，同时力的测量单位取决于质量、长度和时间的测量单位。

一般情况下，籍助于引入辅助物理常数的方法，可以通过实验途径对n个量（$n>3$）选取互相独立的测量单位，但同时应引入（$n-3$）个有量纲的辅助物理常数，在这种情况下，导出量的量纲公式一般将包含n个基本测量单位。

在研究力学现象时，仅需对长度、质量（或力）和时间建立三个基本测量单位已是足够的了。这些单位也可以满足热和电现象的研究需要。从物理学中可以知道，热和电量的量纲也可以通过L，M，T来表示。例如，热量和温度具有机械能的量纲。但是在实践中，在很多热力学和气体力学问题中，常常把热量和温度选取与机械能测量单位无关的测量单位，即温度的测量单位是开尔文（K），热量的单位是卡（Cal.）。这些测量单位是通过与力学量的测量单位无关的实验方法建立的。

在研究物理现象时，有时要把机械能转换成热量。对这种情况，只要引入两个有量纲的物理常数就可以了。其中一个是热功当量$J=427\text{kg}\cdot\text{m/cal}$，另一个是气体常数$R(\text{m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{K}))$。如果仅用力学的测量单位来测量热量和温度，那么热功当量和气体常数将仅仅以绝对的无量纲常数引入。这类似于单位换算时的换算系数，如米到英尺，尔格到千克力·米等等。

基本测量单位数也可以少于 3 个。实际上，若把所有的力和引力作比较（这在天文学中是很方便的，但在引力不起作用的问题中是不方便的，也是违背常规的）时，则由于在物理单位制中，力一般可由下面的等式确定

$$F = ma$$

而引力为

$$F' = \gamma\frac{m_1m_2}{r^2}$$

式中γ是引力常数，具有量纲

$$[\gamma] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

与用无量纲的常数来代替有量纲的热功当量常数一样，若把引力常数认为是绝对的无量纲量，则由此可得出质量的量纲取决于L，T量纲的关系

$$[m] = M = L^3T^{-2}$$

也就是说，当把长度和时间选作基本测量单位时，质量的测量单位作为这两个基本测量单位的导出测量单位，便可以完全确定下来。这时将只有两个独立的测量单位。这种测量单位制常在天文学中应用，故可称为天文制。

若长度单作为厘米(cm)，质量单位为克(g)，时间单位为秒(s)时，引力常数γ为

$$\gamma = 6.7\times10^{-8}\left[\frac{cm^3}{g\cdot s^2}\right]$$

在天文制中，通常取长度单位为公里(km)，$1cm = 10^{-5}km$。时间单位仍为秒。引力常数γ认为是等于1的无量纲量。若天文制的质量单位为[asm]，并设$1g = x\ asm$，则

$$\begin{aligned}\gamma &= 6.7\times10^{-8}\left[\frac{cm^3}{g\cdot s^2}\right]\\ &= 6.7\times10^{-8}\left[\frac{(10^{-5})^3km^3}{x\ asm\cdot s^2}\right] = 1\left[\frac{km^3}{asm\cdot s^2}\right]\end{aligned}$$

便有

$$\frac{6.7\times10^{-23}}{x} = 1$$

$$x = 6.7\times10^{-23}$$

即

$$1g = 6.7\times10^{-23}asm$$

或

$$1asm = 1\left[\frac{km^3}{s^2}\right] = 1.49\times10^{22}g$$

独立的测量单位数还可以缩减到1个，只要再把一个有量纲的物理常数，例如水的运动粘性系数或光在真空中传播的速度看作是绝对的无量纲常数就可以了。

最后，也可以把全部物理量都看作是无量纲量，只要把相应的物理常数认为是绝对的无纲量常数。在这种情况下，排除了使用不同测量单位制的可能性，便得到了基于所选物理常数（如引力常数，光速和水的运动粘性系数）的单一的通用测量单位制。这些物理常数的数值用作绝对的通用常数。

引入这样一种通用测量单位制（因而取消了所有别的测量单位制）等于完全消除了量纲的概念。在这种通用测量单位制中，所有表示现象特征的数值可以表示出各物理量。

在某些方面，例如使用单一的量度，计时方法等（特别在天文学中），这种通用测量单位制确实是很方便的。

但是，在很多现象中，这种专门的常数如引力常数，光在真空中传播的速度和水的运动

粘性系数是完全无关紧要的。因而和引力定律，光的传播和水的粘性或者任何别的物理过程相联系的通用测量单位制在很多情况下是人为的特性，并且在实践中是不方便的。

与此相反，在实践中，在不同的物理学分支采用不同的基本测量单位要来得方便。这些不同的基本测量适用于所研究的现象，并和比较有意义的物理概念相关连。

在物理学中，基本量的选择应该满足独立性，确切性，普遍性和实用性的要求。对这些基本量确定基本测量单位时，应尽量具有稳定性和可复性。即基本测量单位应能保证长期不变，并且它确定后，应能保证可以准确地复现。只有这样才能使得各计量单位能以基本测量单位为基准，进行校准或定标。

在实践中，各国曾对不同的基本量或相同的基本量选取不同的基本测量单位。如ＣＧＳ制，ＭＫＳ制，ＭＫＧＦＳ制，英制等。各种单位制的并存带来了很大不便，也对各国的科技、文化交流产生了十分不利的影响。因此，多年来各国科技工作者一直在寻求建立并完善一个统一的计量单位制。1960年第十一届国际计量大会正式讨论通过了这样一个统一的计量单位制，即“国际单位制”（System International），代号为ＳＩ。

国际单位制明确规定了基本量及基本测量单位，导出量及导出测量单位和基本测量单位、导出测量单位以外的辅助测量单位。

1971年第十四届国际计量大会决定，以长度、质量、时间、电流、温度、物质的量和光强度等七个物理量作为基本量。它们的测量单位称为国际制基本测量单位。

长度的测量单位为米(m)。1米等于氪-86原子的$2p_{10}$和$5d_5$能级之间跃迁所对应的辐射在真空中的1650763.73个波长的长度。

质量的单位为千克(kg)。1千克等于国际1千克原器的质量。

时间的单位为秒(s)。1秒是铯-133原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的9192631770个周期的持续时间。

电流的单位为安培(A)。1安培是一恒定的电流，当此电流保持在真空中距1米的两无限长平行直导线（导线的圆截面可忽略）内时，在此两导线之间产生的力在每米长度上等于2×10^{-7}牛顿。

热力学温度的单位为开尔文(K)。1开尔文是水三相点热力学温度的1/273.16。

物质的量的单位是摩尔(mol)。1摩尔是一系统的物质的量，该系统中所包含的基本单元数与0.012千克碳-12的原子数目相等。这个数目称为阿佛伽德罗常数N_A。

$$N_A=(6.022045\pm0.000031)\times10^{23}mol^{-1}$$

光强度单位为坎德拉(cd)。1坎德拉是在101325帕斯卡压力下，处于铂凝固温度的黑体的1/600000平方米表面垂直方向上的光强度。

国际制的辅助测量单位是几何学单位，由平面角和立体角组成。

平面角的单位为弧度(rad)。1弧度是一个圆内两条半径之间的平面角，这两条半径在圆周上截取的弧长与半径相等。

立体角的单位为球面度(sr)。一球面度是一个立体角，其顶点位于球心，而它在球面上所截取的面积等于以球半径为边长的正方形的面积。

国际制的基本测量单位确定以后，各导出量的导出测量单位便可完全用基本测量单位来表示。国际单位制对常用的物理量的导出测量单位名称，代号都有明确的规定。

在力学物理量的计量中，由于历史的原因以及选取的基本量和基本测量单位不同，曾经

建立有多种测量单位制。常用的单位制有

1． 国际单位制（S I）

力学量的S I制单位，是在米·千克·秒制（M K S制）的基础上发展起来的。它选取的基本量和基本测量单位为

长度	质量	时间
米（m）	千克（kg）	秒（s）

其余物理量的导出测量单位全部可由基本测量单位表示出来。例如

力的单位——牛顿（N）。1牛顿是使1千克质量得到1米/秒^{2}加速度的作用力。

$$1\text{牛顿}(N)=1\text{千克}\cdot\text{米}/\text{秒}^2(kg\cdot m/s^2)$$

压强单位——帕斯卡（Pa）。1帕斯卡是在1米^{2}平面上垂直作用有1牛顿力时的压强（压力）。

$$1\text{帕斯卡}(Pa)=1\text{牛顿}/\text{米}^2(N/m^2)=1\text{千克}/(\text{米}\cdot\text{秒}^2)\quad(kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-2})$$

功（或能）的单位——焦耳（J）。1焦耳是物体在1牛顿力作用下移动1米时所作的功。

$$1\text{焦耳}(J)=1\text{牛顿}\cdot\text{米}(N\cdot m)=1\text{千克}\cdot\text{米}^2/\text{秒}^2\quad(kg\cdot m^2\cdot s^{-2})$$

功率的单位——瓦特（W）。1瓦特是在单位时间（1秒）内物体所作的功。

$$1\text{瓦特}(W)=1\text{焦耳}/\text{秒}(J/s)=1\text{千克}\cdot\text{米}^2/\text{秒}^3\quad(kg\cdot m^2\cdot s^{-3})$$

2． 厘米·克·秒制（C G S制）

厘米·克·秒制是19世纪出现的主要用于物理学的单位制。由此单位制的基本量和基本测量单位，不仅可以表示全部力学量，并且也可以表示电磁学量。但是，由于许多物理量在该单位制中的计量单位过小，因此在实用中会造成不便。

厘米·克·秒制的基本量仍然选取长度、质量、时间三个量。其基本测量单位为

长度	质量	时间
厘米（cm）	克（g）	秒（s）

厘米·克·秒制的基本测量单位和国际单位制的基本测量单位之间的关系为

$$1\text{千克}=1000\text{克}\ (1kg=10^3g)$$

$$1\text{米}=100\text{厘米}\ (1m=10^2cm)$$

$$1\text{秒}=1\text{秒}$$

力的单位可由牛顿第二定律得出。使1克质量得到1厘米/秒^{2}加速度的力为1达因（dyne）。由于重力加速度的标准值为$g=980.665cm/s^2$。1克质量的重力约为981达因。

由于1牛顿＝1千克·米·秒$^{-2}$，故

$$1\text{达因}=10^{-5}\text{牛顿}$$

压强单位——达因/厘米^2。

$$1\text{达因}/\text{厘米}^2=0.1\text{帕斯卡}$$

功（或能）的单位——尔格（erg）。1尔格是物体在1达因作用下移动1厘米所作的功。

$$1\text{尔格}=10^{-7}\text{焦耳}(J)$$

功率的单位——尔格/秒（erg/s）。

$$1\text{尔格}/\text{秒}=10^{-7}\text{瓦特}(W)$$

3． 工程（重力）制（M K G F S制）

工程（重力）制的基本量为长度、力和时间三个物理量。其基本测量单位为

长度	力	时间
米(m)	千克力(kgf)	秒(s)

1千克力是使质量1千克的物体产生9.80665米/秒^{2}加速度的力。或者说，1千克力是1千克质量在标准重力加速度时的重力。

$$1\text{千克力}=9.80665\text{牛顿}=980.665\text{达因}$$

在工程（重力）单位制中的质量单位——质量工程单位的定义是，当物体上的作用力为1千克力时，使物体具有1米/秒^{2}加速度时该物体的质量。

$$1\text{质量工程单位(T.U.M.)}=1\ \mathrm{kgf\cdot s^2\cdot m^{-1}}$$
$$=9.80665\text{千克}\simeq 9.8\text{千克}$$

压强单位——千克力/米^2（$\mathrm{kgf\cdot m^{-2}}$）

$$1\text{千克力/米}^2=9.8\text{帕斯卡}$$

功（或能）的单位——千克力·米（$\mathrm{kgf\cdot m}$）

$$1\text{千克力·米}=9.8\text{焦耳}$$

功率的单位——千克力·米/秒（$\mathrm{kgf\cdot m\cdot s^{-1}}$）

$$1\text{千克力·米/秒}=9.8\text{瓦特}$$

4. 英质量制

英质量制的基本量和基本测量单位为

长度	质量	时间
英尺(ft)	磅(lb)	秒(s)

长度和质量的单位与国际单位制相应单位间的关系为

$$1\text{英尺}=0.30479\text{ 米}$$
$$1\text{ 磅 }=0.45359\text{千克}$$

力的单位同样可由牛顿第二定律得出。使1磅质量的物体得到1英尺/秒^{2}加速度的力为1磅达(pdl)。即$1\mathrm{pdl}=1\mathrm{lb\cdot ft\cdot s^{-2}}$。

$$1\text{磅达}=0.13825\text{牛顿}$$

由于标准重力加速度$g=32.1741\mathrm{ft\cdot s^{-2}}$，故1磅质量的物体在地面的重力为32.1741磅达。

5. 英工程制

英工程制的基本量和基本测量单位为：

长度	力	时间
英尺(ft)	磅力(lbf)	秒(s)

1磅力是质量为1磅的物体在重力加速度$g=32.1741$英尺/秒^{2}时的重力。

$$1\text{磅力}=32.1741\text{磅达}=4.4482\text{牛顿}$$

英工程制的质量单位为斯拉格（slug）。质量为1斯拉格的物体是当它受到1磅力作用时，会产生1英尺/秒^{2}加速度。

$$1\text{斯拉格}=1\mathrm{lbf\cdot s^2\cdot ft^{-1}}=14.5939\text{千克}$$

在热力学中，过去由于对热的本质认识不清楚，曾经把热量作为一种特殊的量，并广泛应用卡路里（简称卡，符号为cal）作为热量的测量单位。它的原始定义是：1卡等于1克

纯水在温度升高（或降低）1摄氏度时吸收（或放出）的热量。1千卡（或1大卡）=1000卡。这个定义是不完备的，因为1克纯水在不同温度范围内同样升高1摄氏度时所需热量是不同的。1克纯水在1大气压下，温度从14.5℃升到15.5℃时所需的热量称为1标准卡（卡$_{标}$，卡$_{15}$）。

$$1\ 卡_{标}=4.1855焦耳$$

目前常用的测量单位制及常用物理量的名称、符号见本章附录。

§1.4 量纲公式

导出量的测量单位和基本量的测量单位之间的关系可以用公式的形式来表示。这些公式称为量纲公式。

只有在采用了确定的测量单位制时，才能谈到量纲的概念。对于同一物理量的量纲公式在不同的单位制中可以包含不同的元素，并具有不同的形式。然而，所有物理量的量纲公式均具有指数单项式的形式，即：$L^lM^mT^t$（或$L^lF^fT^t$）。现在来证明这一点。

众所周知，两个同一类的导出量数值之比与所选取的测量单位无关。例如，可以用平方米或平方厘米来测量面积。但是，两面积之比则不论用平方米或平方厘米来测量都是一样的。对于基本量，这个条件是确定测量单位的组成部分，是自动满足的。

设有一有量纲的任意导出量y。为了简单起见，认为y是几何量，因此它仅取决于长度。

$$y=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$$

式中$x_1,x_2,\cdots,x_n$是某些距离。用y'来表示量y在各元素的数值为$x_1',x_2',\cdots,x_n'$时的数值。显然，y及y'的数值取决于距离$x_1,x_2,\cdots,x_n$所用的测量单位。若把测量单位减小α倍，则对于上面的情况，有

$$\frac{y'}{y}=\frac{f(x_1',x_2',\cdots,x_n')}{f(x_1,x_2,\cdots x_n)}=\frac{f(x_1'\alpha,x_2'\alpha,\cdots,x_n'\alpha)}{f(x_1\alpha,x_2\alpha,\cdots,x_n\alpha)} \tag{1.1}$$

即对于任意的α值，比值y'/y不变。

由(1.1)式，

$$\frac{f(x_1\alpha,x_2\alpha,\cdots,x_n\alpha)}{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\frac{f(x_1'\alpha,x_2'\alpha,\cdots,x_n'\alpha)}{f(x_1',x_2',\cdots,x_n')}$$

或

$$\frac{y(\alpha)}{y(1)}=\frac{y'(\alpha)}{y'(1)}=\varphi(\alpha) \tag{1.2}$$

即用不同缩比来测量的导出几何量数值之比只取决缩比α。

由(1.2)式，有

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(1)}=\varphi(\alpha_1),\qquad \frac{y(\alpha_2)}{y(1)}=\varphi(\alpha_2)$$

当$x_1'=x_1\alpha_2$，$x_2'=x_2\alpha_2,\cdots$，$x_n'=x_n\alpha_2$时，

$$x_1=x_1'/\alpha_2,\ x_2=x_2'/\alpha_2,\ \cdots,\ x_n=x_n'/\alpha_2$$

便有

$$\varphi(\alpha_1)=\frac{y(\alpha_1)}{y(1)}=\frac{y'\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{y(1)}$$

$$\varphi(\alpha_2)=\frac{y(\alpha_2)}{y(1)}=\frac{y'(1)}{y(1)}$$

由此

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)}=\frac{y(\alpha_1)}{y(\alpha_2)}=\frac{y'\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{y'(1)}=\varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \tag{1.3}$$

对 α_1 微分(1.3)式

$$\frac{1}{\varphi(\alpha_2)}\ \frac{d\varphi(\alpha_1)}{d\alpha_1}=\frac{1}{\alpha_2}\ \frac{d\varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{d\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}$$

使 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$，便得

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)}\ \frac{d\varphi}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=1}=\frac{l}{\alpha}$$

积分，便可得到

$$\varphi=c\alpha^l$$

当 $\alpha=1$ 时有 $\varphi=1$，故常数 $c=1$。因此

$$\varphi=\alpha^l \tag{1.4}$$

上述结果对于任意一个取决于 n 个基本量的有量纲量都是正确的。不难看到，如果三个基本量的尺度变化 α，β，γ 倍，函数 φ 具有下列形式

$$\varphi=\alpha^l\beta^m\gamma^t \tag{1.5}$$

这就证明了物理量的量纲公式是指数单项式。

§1.5　量纲的齐次性

若一方程式是量纲齐次的，则此方程式的形式在基本测量单位变化时不变。例如，对于一数学摆的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$，当长度 L 用米或厘米，时间用秒或分为单位来进行测量时，此公式都是正确的。因此，此公式是量纲齐次的。若把 $g=9.81$ 米/秒^2 代入，则 $T=2.01\sqrt{L}$。此公式对海平面上的数学摆是正确的。但它已不是量纲齐次的了，因为乘数2.01仅在长度用米来测量，时间用秒来测量时才正确。可以证明，乘数2.01具有量纲 $[L^{-1/2}T]$。当把量纲同时用到一些常数上时，任何方程都可认为是量纲齐次的。

下面可以证明，若一方程具有下列形式时，

$$x=a+b+c+\cdots$$

则仅在方程中所有变量 $x,a,b,c,\cdots$ 都具有相同的量纲时，此方程才是量纲齐次的。当一个方程中的不同项具有不同的量纲时，必然是发生了错误。这个原理也可以用到微分方程和积分方程。当然，对于经验公式，不一定必须是量纲齐次的，因为对于经验公式，必须确定出它们的适用情况。

下面来讨论从上述量纲齐次的概念引出的一些结论。

若 y 是 n 个变量的函数，即

$$y = f(x_1, x_2, \cdots x_n) \tag{1.6}$$

符号 f 可以认为是作用于变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的特定的运算符，用来得到变量 y 的值。如果基本测量单位有了变化，这些变量将取新的值 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n, \bar{y}$。由上面关于量纲齐次的定义，仅当

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n) \tag{1.7}$$

成立，且 f 是(1.6)式引用的相同运算符时，此方程才是量纲齐次的。

在力学问题中，常取质量、长度和时间作为基本量。当它们的测量单位变化 A, B, C 倍时，由(1.5)式，任意力学量在测量单位前、后的关系为

$$\bar{x} = x A^a B^b C^c \tag{1.8}$$

在测量单位变化前，若所有变量的量纲矩阵可写为

$$\left.\begin{array}{c|cccc} & y & x_1 & x_2 & \cdots\cdots\cdots x_n \\ \hline M & a & a_1 & a_2 & \cdots\cdots\cdots a_n \\ L & b & b_1 & b_2 & \cdots\cdots\cdots b_n \\ T & c & c_1 & c_2 & \cdots\cdots\cdots c_n \end{array}\right\} \tag{1.9}$$

则在测量单位变化后，所有变量所取的值可由(1.8)式确定

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y} = y A^a B^b C^c = y K \\ \bar{x}_1 = x_1 A^{a1} B^{b1} C^{c1} = x_1 K_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}_n = x_n A^{an} B^{bn} C^{cn} = x_n K_n \end{array}\right\} \tag{1.10}$$

式中各个 K 为

$$\left.\begin{array}{l} K = A^a B^b C^c \\ K_i = A^{ai} B^{bi} C^{ci} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{array}\right\} \tag{1.11}$$

把(1.10)式代入到(1.7)式，得到

$$K f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(K_1 x_1, K_2 x_2, \cdots, K_n x_n) \tag{1.12}$$

由此可得结论，函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在测量单位变化时，只有满足(1.12)式，才是量纲齐次的。

例如，对于不可压缩流体绕球体的流动，其阻力系数可用下面的公式给出

$$F = f(V, D, \rho, \mu) \tag{1.13}$$

按照方程是量纲齐次的定义(1.12)式

$$KF = f(K_1 V, K_2 D, K_3 \rho, K_4 \mu) \tag{1.14}$$

当函数 f 具有下面的形式时，恒等式(1.14)自动满足

$$F = \rho V^2 D^2 f\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) \tag{1.15}$$

按照量纲齐次的定义，还可得出结论，当一方程是由很多项组成时．只有在每一项都具有相同的量纲时，此方程才是量纲齐次的。

若有一方程

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1+x_2+\cdots x_n \tag{1.16}$$

(1.12)式便可写为

$$K(x_1+x_2+\cdots+x_n)=K_1x_1+K_2x_2+\cdots+K_nx_n \tag{1.17}$$

由此可得

$$K=K_1=K_2=\cdots=K_n \tag{1.18}$$

而由(1.11)式，有

$$\left.\begin{array}{l}a=a_1=a_2=\cdots=a_n\\ b=b_1=b_2=\cdots=b_n\\ c=c_1=c_2=\cdots=c_n\end{array}\right\} \tag{1.19}$$

(1.19)式表明，所有变量 $y,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均具有相同的量纲。这是方程(1.16)量纲齐次的必要和充分条件。

现在考虑一函数，它是很多变量的指数乘积

$$y=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n} \tag{1.20}$$

式中变量 $y,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的量纲可以用量纲矩阵(1.9)式来表示。

只有在满足恒等式(1.12)时，方程(1.20)才是量纲齐次的。即

$$Kx_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}=K_1^{k_1}x_1^{k_1}\cdot K_2^{k_2}x_2^{k_2}\cdots K_n^{k_n}x_n^{k_n} \tag{1.21}$$

由(1.21)式可得

$$K=K_1^{k_1}K_2^{k_2}\cdots K_n^{k_n} \tag{1.22}$$

由(1.11)式，可以得到

$$\left.\begin{array}{l}a_1k_1+a_2k_2+\cdots+a_nk_n=a\\ b_1k_1+b_2k_2+\cdots+b_nk_n=b\\ c_1k_1+c_2k_2+\cdots+c_nk_n=c\end{array}\right\} \tag{1.23}$$

由此可得结论，由变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的指数乘积组成的函数 y 若是量纲齐次的，则指数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 必定是线性方程组(1.23)的一组解。

§1.6 物理量之间函数关系的结构——Π定理

Π定理是白金汉(E.Buckingham)在1914年提出的。它可以表述为：一个反映物理过程的量纲齐次的物理量方程可以转换成由这些物理量组成的各无量纲参数间的函数关系。

理论或实验研究的目的是建立所研究现象的物理规律性。这种自然现象的规律性通常表现为各物理量之间的函数关系。在这些关系中，各有量纲的物理量的数值取决于所选用的测量单位制。然而，自然规律本身是 观的，它与人为地建立的测量单位制无关。因此，表示自然规律的各物理量之间的函数关系应具有某种与测量单位制无关的特殊的结构。

设有一量纲量 a，它是互相独立的量纲量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的函数。

$$a=f(a_1,a_2,\cdots a_k,a_{k+1},\cdots,a_n) \tag{1.24}$$

按照所研究问题的特点，这些参量中的一些是变量，而另一些是常量。

现在来阐明 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$函数结构的特点。这个函数结构应表示出某种与测量单位制的选择无关的自然规律。

设在量纲量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中，开头 k 个量($k\leqslant n$)具有独立的量纲(基本测量单位数