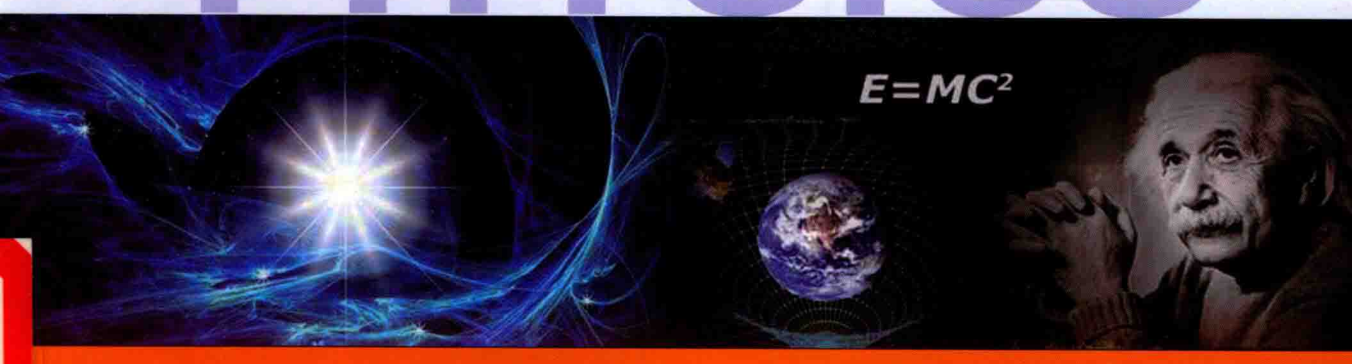
浙大优学

配合《新编高中物理竞赛教程》（上下册）》使用

新编
高中物理竞赛教程
习题全解

◎ 钟小平 主编

PHYSICS



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

新编高中物理竞赛教程
习题全解

主编　钟小平

编写　钟小平　倪国富　曹海奇
　　　于　强　孙国标　厉守清
　　　徐　刚

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编高中物理竞赛教程习题全解 / 钟小平主编. —
杭州：浙江大学出版社，2019.10
ISBN 978-7-308-17890-7

Ⅰ.①新… Ⅱ.①钟… Ⅲ.①中学物理课—高中—题
解 Ⅳ.①G634.75

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 011482 号

新编高中物理竞赛教程习题全解
主编 钟小平

责任编辑 王同裕
责任校对 沈国明 沈炜玲
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司
印 刷 杭州杭新印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 29.75
字 数 825 千
版 印 次 2019 年 10 月第 1 版 2019 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-17890-7
定 价 69.80 元

浙江大学出版社市场运营中心联系方式：0571—88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

编者的话

本书为《新编高中物理竞赛教程》(上下册)配套用书,对教程中的全部习题作了详尽解答。

《新编高中物理竞赛教程》(上下册)已于 2017 年出版,它根据全国中学生物理竞赛委员会最新颁布的《全国中学生物理竞赛内容提要》编写,其中最大的亮点在于思维引导、方法总结和能力培养上,题目难易搭配,新颖灵活,风格各异,以便跟踪进展,开阔视野,增加适应性,既为学生的学习,也为教师的引导提供资料。在方法处理上,恰当地运用类比、联想的思维方法,一举突破;改变提问角度,逆向思维,化难为易;把复杂的问题适当地分解,又非常自然地衔接起来。我们根据以往辅导学生的经验,有意识地选取暴露学生种种缺点和毛病的问题,故意设置"陷阱",引"敌"上钩,使学生在"失足"之余,痛改前非,走上正途,大有裨益。为了富于时代性,我们在注重相关基础知识的同时,又突出近年来复赛风格新的发展趋势,体现了与时俱进的新内涵。

参与本书编写工作的有杭州二中的钟小平、曹海奇,柯桥中学的倪国富、孙国标,萧山中学的徐刚,湖州中学的厉守清,余杭高级中学的于强,最后由钟小平统稿、审定。由于编者水平有限,错误和不足之处在所难免,恳请读者批评指正。

编者

2019 年 9 月

目 录

第一章 运动学

第一节 质点运动的基本概念

1. 摄制电影时，为了拍摄下落物体的特写镜头，做了一个线度为实物的$\frac{1}{49}$的模型. 放电影时，走片速度为每秒24张，为了使画面逼真，拍摄时走片速度应为多大？模型的运动速度应为实物运动速度的多少倍？

2. 一固定的直线轨道上A、B两点间距s，将s作n等分，令质点从A点出发由静止开始以加速度a(常量)向B点运动，当质点到达每一等分段末端时它的加速度增加$\frac{a}{n}$，试求质点到达B点时的速度v_B.

3. 如图1-1-8所示，当杆的A端以恒定速度v_0沿水平方向运动时，接触点M则向B端移动，当$AM = 2h$时，接触点M向B端移动的v为多少？

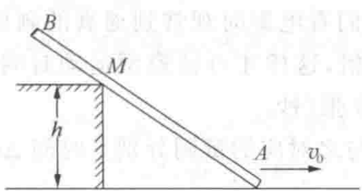


图 1-1-8

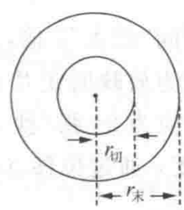


图 1-1-9

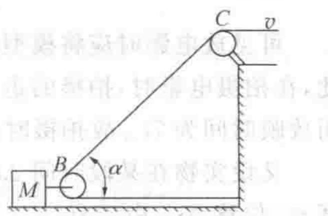


图 1-1-10

4. 磁带录音机的空带轴以恒定角速度转动，重新绕上磁带. 绕好后带卷的末半径$r_末$是当初半径$r_初$的3倍，如图1-1-9所示. 绕带的时间为t_1. 要在相同的带轴上重新绕上厚度为原磁带一半的薄磁带，需要多少时间t_2？

5. 在听磁带录音机的录音时发觉，经过时间$t_1 = 20\text{min}$，带轴上带卷的半径减小一半. 问：此后半径又减小一半需要多少时间t_2？

6. 小球从高$h_0 = 120\text{m}$处自由落下，着地后跳起，又落下，每与地面相碰一次，速度减少$\frac{1}{n}$($n = 2$).

(1) 作出小球的v-t图像(向上为正)；

(2) 求小球从下落到停止的总时间和总路程(g取10m/s^2).

7. 如图1-1-10所示装置，在绳的C端以速率v匀速收绳，从而拉动低处的物体M水平前进，当绳BC段与水平恰成α角时，求物体M的速度.

8. 在以速度v_0行驶的小汽车正前方L处有一辆载重卡车. 由于大雾，公路上能见度很低，当小车司机发现这一情况时，卡车正以加速度a由静止开始做匀加速运动，其方向与小车运动方向一致，于是小车司机立即以加速度$2a$做减速运动，那么小车速度v_0必须满足什么条件，小车才不至于和卡车相撞？

图 1-1-11

9. 如图1-1-11所示，A和B两物体位于同一竖直直线上，距地面高度分别为$h_A = 20\text{m}$，$h_B = 40\text{m}$. 当A物体以$v_0 = 10\text{m/s}$的初速度竖直上抛时，B物体恰好同时开始做自由落体运动. 问：A和B将在距地面多高的地方相遇？($g = 10\text{m/s}^2$)

10. 一质点在平面上做匀变速运动，在时刻 $t=1\text{s},3\text{s},5\text{s}$ 时，质点分别位于平面上的 A,B,C 三点，已知 $AB=8\text{m}$，$BC=6\text{m}$，且 $AB\perp BC$. 此质点运动的加速度是多少？

11. 在一条笔直的公路上依次设置三盏交通信号灯 L_1、L_2 和 L_3，L_2 与 L_1 相距为 80m，L_3 与 L_1 相距为 120m. 每盏信号灯显示绿色的时间间隔都是 20s，显示红色的时间间隔都是 40s，L_1 和 L_3 同时显示绿色，L_2 则在 L_1 显示红色经过 10s 时开始显示绿色. 规定车辆通过三盏信号灯经历的时间不得超过 150s. 若有一辆匀速向前行驶的汽车通过 L_1 的时刻正好是 L_1 刚开始显示绿色的时刻，则此汽车能不停顿地通过三盏信号灯的最大速率是________m/s. 若一辆匀速向前行驶的自行车通过 L_1 的时刻是 L_1 显示绿色经过了 10s 的时刻，则此自行车能不停顿地通过三盏信号灯的最小速率是________m/s.

参考答案

1. 分析与解 设实物在时间 t 秒内下落的高度为 h，而模型用时间 t_0 下落了对应的高度 h_0，则由自由落体公式应有

$$h=\frac{1}{2}gt^2,\ h_0=\frac{1}{2}gt_0^2.$$

由于
$$\frac{h_0}{h}=\frac{1}{49},$$

故得
$$t_0=\frac{1}{7}t.$$

可见放电影时应将模型运动的时间"放大"7 倍，才能使人们看电影时观赏到逼真的画面. 为此，在拍摄电影时，拍摄的走片速度应为放映时走片速度的 7 倍，这样才可使模型运动时间为 t_0 而放映时间为 $7t_0$. 故拍摄时走片速度应为 24 张/秒 $\times 7=168$ 张/秒.

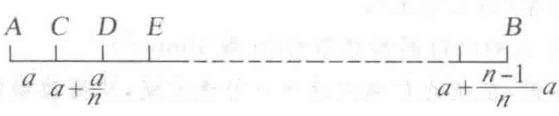
又设实物在某段时间 Δt 内以速度 v 通过位移 Δs，而模型与之对应的量则分别是时间 Δt_0、速度 v_0、位移 Δs_0，由于有

$$\Delta t_0=\frac{1}{7}\Delta t,\ \Delta s_0=\frac{1}{49}\Delta s,$$

故得模型运动速度 v_0 与实物运动速度 v 之比为 $\dfrac{v_0}{v}=\dfrac{\frac{\Delta s_0}{\Delta t_0}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}}=\dfrac{1}{7}$，

即模型运动速度应为实物运动速度的 $\dfrac{1}{7}$.

2. 分析与解 按题意画出示意图，如下图所示.



质点通过 C 点时的速度

$$v_C=\sqrt{\frac{2as}{n}}.$$

同理，质点通过 D 点、E 点时的速度分别为

$$v_D=\sqrt{2a\frac{s}{n}+2\left(a+\frac{a}{n}\right)\frac{s}{n}}=\sqrt{2a\frac{s}{n}+2a\frac{s}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)},$$

$$v_E=\sqrt{2a\frac{s}{n}+2a\frac{s}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)+2\left(a+\frac{2a}{n}\right)\frac{s}{n}}$$

$$= \sqrt{2a\,\frac{s}{n} + 2a\,\frac{s}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) + 2a\,\frac{s}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}.$$

以此类推，质点通过 B 点时的速度

$$v_B = \sqrt{2a\,\frac{s}{n} + 2a\,\frac{s}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \cdots + 2a\,\frac{s}{n}\left(1+\frac{n-1}{n}\right)}$$

$$= \sqrt{2a\,\frac{s}{n}\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]}$$

$$= \sqrt{a\,\frac{s}{n}(3n-1)}.$$

3. 分析与解 将速度 v_0 沿杆子方向和垂直于杆子方向进行分解，接触点 M 向 B 端移动的速度即等于 v_0 沿杆子方向的分速度，故

$$v = \frac{\sqrt{(2h)^2 - h^2}}{2h}v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0.$$

4. 分析与解 绕好厚磁带后，磁带占据带轴部分的截面积

$$S_1 = \pi(r_{末}^2 - r_{初}^2) = 8\pi r_{初}^2. \qquad ①$$

于是这部带的长度

$$l = \frac{S_1}{d} = 8\pi\,\frac{r_{初}^2}{d}, \qquad ②$$

式中 d 是磁带的厚度.

当绕好薄磁带后，磁带占据带轴部分的截面积

$$S_2 = \pi(r'^2_{末} - r_{初}^2), \qquad ③$$

式中 $r'_{末}$ 是第二种情况下带卷的末半径.

因为带长相同，而第二种情况中磁带的厚度为第一种情况的一半，由此可以列出

$$l = 2\pi \cdot \frac{r'^2_{末} - r_{初}^2}{d}. \qquad ④$$

由 ②④ 式得 $$r'^2_{末} - r_{初}^2 = 4r_{初}^2.$$

因而，在第二种情况中带卷的末半径

$$r'_{末} = \sqrt{5}\,r_{初}.$$

在第一和第二种情况中所绕带卷的匝数 N_1 和 N_2 可以列出 $N_1 = \dfrac{2r_{初}}{d}$，$N_2 = \dfrac{(\sqrt{5}-1)r_{初}}{d/2}$，由此得到 $t_2 = (\sqrt{5}-1)t_1$.

5. 分析与解 设带卷的初半径为 $4r$，经 t_1 时间半径减为 $2r$，则相应的面积减少为 $S = \pi(16r^2 - 4r^2) = 12\pi r^2$，这等于所绕带的长度 l_1 与带的厚度 d 之乘积.

因带速恒定，故 $$12\pi r^2 = vt_1 d.$$

同理有 $$\pi(4r^2 - r^2) = vt_2 d.$$

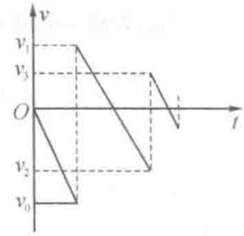
得 $$t_2 = \frac{t_1}{4} = 5\text{min}.$$

6. 分析与解 (1) 小球运动的 v-t 图象如图所示.

(2) 小球从 h_0 高处落地时，速率 $v_0 = \sqrt{2gh_0} = 60\text{m/s}$，第一次跳起时和又落地时速率 $v_1 = \dfrac{v_0}{2}$，第二次跳起时和又落地时速率 $v_2 = \dfrac{v_0}{2^2}$，…，第 m 次跳起时和又落地时速率 $v_m = \dfrac{v_0}{2^m}$，每次跳起的高度依次为

$$h_1=\frac{v_1^2}{2g}=\frac{h_0}{n^2},\ h_2=\frac{v_2^2}{2g}=\frac{h_0}{n^4},\ \cdots$$

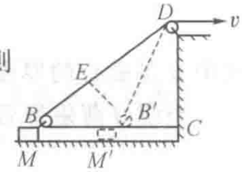
总路程为



$$\begin{aligned}\sum s&=h_0+2h_1+2h_2+\cdots+2h_m+\cdots\\&=h_0+\frac{2h_0}{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\cdots+\frac{1}{n^{2m-2}}\right)+\cdots\\&=h_0+\frac{2h_0}{n^2-1}=h_0\cdot\frac{n^2+1}{n^2-1}=\frac{5}{3}h_0\\&=200\text{m}.\end{aligned}$$

总时间为

$$\begin{aligned}\sum t&=t_0+t_1+t_2+\cdots+t_m+\cdots\\&=\frac{v_0}{g}+\frac{2v_1}{g}+\cdots+\frac{2v_m}{g}+\cdots\\&=\frac{v_0}{g}\left[1+2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+2\left(\frac{1}{n}\right)^m+\cdots\right]\\&=\frac{v_0}{g}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\frac{3v_0}{g}\\&=18\text{s}.\end{aligned}$$



7. 分析与解 设经 Δt 时间物体 M 运动到 M'，如图所示，使 $DE=DB'$，则绳子的自由端运动的距离为

$$s=\overline{BE}+\overline{BB'}.$$

取 $\Delta t\to 0$，则可以认为 $B'E\perp BD$，这样

$$s=\overline{BB'}\cos\alpha+\overline{BB'}=\overline{BB'}(1+\cos\alpha).$$

而
$$v_A=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{BB'}}{\Delta t},\ v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s}{\Delta t},$$

故可得
$$v=v_A(1+\cos\alpha).$$

所以，物体 A 的运动速度为 $v_A=\dfrac{v}{1+\cos\alpha}$.

8. 分析与解 以卡车为参照物，小车做初速为 v_0、加速度为 $3a$ 的匀减速运动，要使小车不至于和卡车相碰，须满足 $0-v_0^2\geqslant -2(3a)L$，即 $v_0\leqslant\sqrt{6aL}$.

9. 分析与解 以 B 物体为参照物，A 物体做速度为 $v_0=10\text{m/s}$ 的匀速直线运动，则 A 物体与 B 物体相遇经历时间

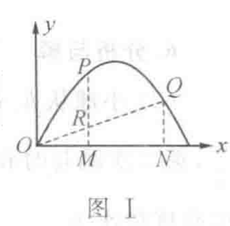
$$t=\frac{h_B-h_A}{v_0}=2\text{s}.$$

这段时间内，B 物体下落

$$\Delta h=\frac{1}{2}gt^2=20\text{m}.$$

则 A 和 B 将在距地面 $h_x=h_B-\Delta h=20\text{m}$ 的地方相遇.

10. 分析与解 设想一质点做匀变速曲线运动，其轨迹如图Ⅰ曲线所示，轨迹上有 O、P、Q 三点，它由 O 到 P 所用的时间为 Δt_1，由 P 到 Q 所用时间为 Δt_2，质点运动的加速度方向为 y 轴的负方向，则质点沿 x 方向的运动为匀速运动，又作出图中的 PM、QN 均与 y 轴平行，则应有

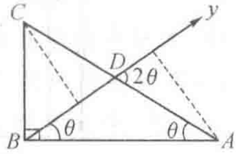


图Ⅰ

$$\frac{OR}{RQ}=\frac{OM}{MN}=\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}.$$

可见，在加速度方向未知的情况下，只要根据$\frac{OR}{RQ}=\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$，在$OQ$上找出$R$点，然后连接$PR$，则$PR$所指示的方向就是此质点运动的加速度方向. 据此，可以确定此类问题中质点运动的加速度的方向.

如图Ⅱ所示，作直角三角形ABC，使$\overline{AB}=8\text{m}$，$\overline{BC}=6\text{m}$. 由于质点由A至B和由B至C所用时间相等(均为2s)，故取AC中点D，连接BD，射线BD所指方向即为质点运动的加速度方向. 取射线BD为y轴，则质点在y轴方向的分运动为加速度为a的匀变速直线运动，设此运动初速度为v_0(此即质点在A处时的速度在y轴方向分量). 取$T=2\text{s}$，则质点由A运动到B，其在y轴方向分运动位移为



图Ⅱ

$$v_0T+\frac{1}{2}aT^2=-\overline{AB}\cos\theta.$$

质点由A运动到C，其y轴方向的分运动位移为

$$2v_0T+\frac{1}{2}a(2T)^2=-\overline{AC}\cos2\theta.$$

由题设条件有$\overline{AB}=10\text{m}$，$\cos\theta=0.8$，

即
$$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=0.28.$$

将其代入以上两式，联立可解得$a=2.5\text{m/s}^2$.

质点运动加速度方向与BA方向夹角为$\theta=37°$.

11. 分析与解　首先，车辆通过三盏灯的时间不得超过150s，所以速度不应小于$\frac{120\text{m}}{150\text{s}}=0.8\text{m/s}$.

(1)L_1显示绿色(20s＋10s＝)30s后，L_2显示绿色，(30s＋20s＝)50s后L_2显示红灯，所以车速应在$\frac{80}{50}$m/s至$\frac{80}{30}$m/s之间，即$1.8\sim3$m/s.

而L_3显示绿色在汽车通过L_1后的60s～80s，所以车速应在$\frac{120}{80}$m/s至$\frac{120}{60}$m/s之间，即1.5～2m/s，所以汽车能不停顿地通过三盏信号灯的最大速率是2m/s.

(2)自行车通过L_1(20s－10s＋10s＝)20s后，L_2显示绿色，(20s＋20s＝)40s后L_2显示红灯，(40s＋40s＝)80s后L_2再次显示绿灯，(80s＋20s＝)100s后L_2显示红灯，所以车速应在$\frac{80}{40}$m/s至$\frac{80}{20}$m/s或$\frac{80}{100}$m/s至$\frac{80}{80}$m/s之间，即2～4m/s或0.8～1m/s.

而L_3显示绿色是在自行车通过L_1后50s～70s和110s～130s之间，所以车速应在$\frac{120}{70}$m/s至$\frac{120}{50}$m/s或$\frac{120}{130}$m/s至$\frac{120}{110}$m/s之间，即$\frac{12}{7}\sim2.4$m/s或$\frac{12}{13}\sim\frac{12}{11}$m/s，而$\frac{12}{13}>0.8$符合要求.

所以此自行车能不停顿地通过三盏信号灯的最小速率是$\frac{12}{13}$m/s.

画一个各灯显示的时间线段图比较容易理解一些.

第二节　运动的合成

1. 下雨时，雨点竖直下落到地面，其速度为10m/s. 若在地面上放一横截面积为80cm²、高为

10cm 的圆柱形量筒，则经 30min 筒内接得雨水水面的高度为 1cm，现因风的影响，雨水下落时偏斜 30°，若用同样的量筒接得与无风时相同的雨水量，则所需时间为多少？

2. 如图 1-2-12 所示，岸高为 h，人用绳经滑轮拉船靠岸，若当绳与水平方向夹角为 θ 时，收绳速率为 v，则该位置船的速率为多大？

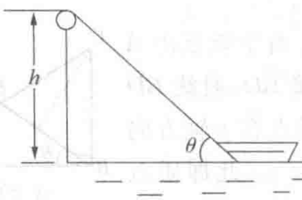


图 1-2-12

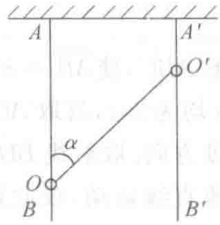


图 1-2-13

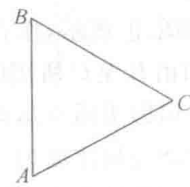


图 1-2-14

3. 两只小环 O 和 O' 分别套在静止不动的竖直杆 AB 和 $A'B'$ 上. 一根不可伸长的绳子，一端系在 A' 点上，绳子穿过环 O'，另一端系在环 O 上，如图 1-2-13 所示. 若环 O' 以恒定速度 v' 沿杆向下运动，$\angle AOO' = \alpha$，环 O 的运动速度为多大？

4. 当自行车向正东方向以 5km/h 的速度行驶时，人感觉风从正北方向吹来；当自行车的速度增加两倍时，人感觉风从正东北方向吹来，求风对地的速度和风向.

5. 模型飞机以相对空气 $v = 39$km/h 的速度绕一个边长为 2km 的等边三角形飞行. 设风速 $u = 21$km/h，方向与三角形的一边平行并和飞机起飞方向相同，那么飞机绕如图 1-2-14 所示的三角形一周需要多少时间？

6. 如图 1-2-15 所示装置，设杆 OA 以角速度 ω 绕 O 转动，其 A 端则系一绕过滑轮 B 的绳，绳子的末端挂一重物 M. 已知 $OB = h$，当 $\angle OBA = \alpha$ 时，求物体 M 的速度.

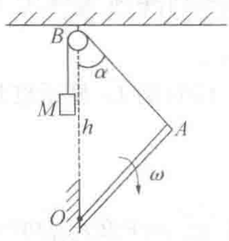


图 1-2-15

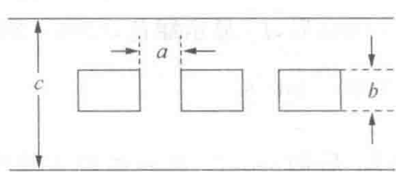


图 1-2-16

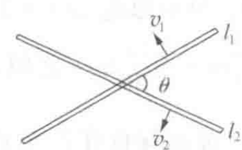


图 1-2-17

7. 如图 1-2-16 所示，一列相同汽车以等速度 v 沿宽度为 c 的直公路行驶，每车宽为 b，头尾间距为 a，则人能以最小速率沿一直线穿过马路所用的时间为多少？

8. 如图 1-2-17 所示，一平面内有两根细杆 l_1 和 l_2，各自以垂直于自己的速度 v_1 和 v_2 在该平面内运动，试求交点相对于纸平面的速率及交点相对于每根杆的速率.

9. 如图 1-2-18 所示，在一水平面上有 A, B, C 三点，$AB = 1$，$\angle CBA = \alpha$. 今有甲质点由 A 向 B 以速度 v_1 做匀速运动，同时，另一质点乙由 B 向 C 以速度 v_2 做匀速运动. 试问：运动过程中两质点间的最小距离为多少？

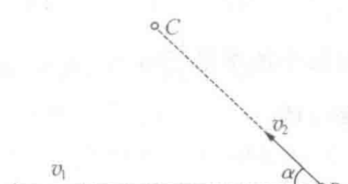


图 1-2-18

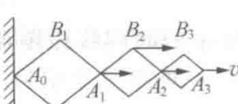


图 1-2-19

10. 合页构件由三个菱形组成，其边长之比为 3 : 2 : 1. 如图 1-2-19 所示，顶点 A_3 以速度 v 往

水平方面移动，求当构件的所有角都为直角时，顶点 A_1，A_2，B_2 的速度.

11. 超声波流量计是利用液体流速对超声波传播速度的影响来测量液体流速，再通过流速来确定流量的仪器. 某种超声波流量计的原理如图 1-2-20 所示. 在充满流动液体(管道横截面上各点流速相同)管道两侧外表面上 P_1 和 P_2 处(与管道轴线在同一平面内)，各置一超声波脉冲发射器 T_1，T_2 和接收器 R_1，R_2，位于 P 处的超声波脉冲发射器 y 向被测液体发射超声脉冲，当位于 P_2 处的接收器 R_2 接收到超声脉冲时，发射器 T_2 立即向被测液体发射超声脉冲. 如果知道了超声脉冲从 P_1 传播到 P_2 所经历的时间 t_1 和超声脉冲从 P_2 传播到 P_1 所经历的时间 t_2，又知道了 P_1，P_2 两点的距离 l 以及 l 沿管道轴线的投影 b，管道中液体的流速 u 便可求得. 试求 u.

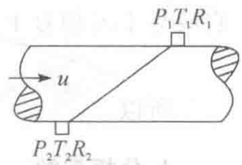
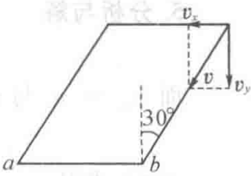


图 1-2-20

参考答案

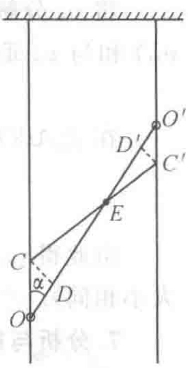
1. 分析与解 设无风时，雨点对地匀速下落速度为 v_y，受风影响时，雨点速度的水平分量为 v_x，图中 ab 直线代表圆柱形量筒的直径，则能落入量筒的雨点是底面积为量筒截面积、倾角为 $\alpha = 30°$ 的斜柱体内的所有雨点，而斜柱体高度就是雨点在一段时间内落下的高度 $h = v_y t$. 因此能落入量筒内的雨点数与风的影响无关，所需时间仍为 30min.



2. 分析与解 将船的速度 v_x 沿绳子方向和沿垂直于绳子方向进行分解，其在绳子方向的分速度是 v，则有 $v = v_x\cos\theta$.

由此得 $v_x = \dfrac{v}{\cos\theta}$.

3. 分析与解 解法 1：由微元法求解. 如右图所示，设由题图所示的状态再经历一段极短的时间 Δt，环 O' 下滑距离 $v'\Delta t$ 而到达 C' 点，环 O 则对应地上升至 C 点. 由于时间极短，位移很小，故可将这段时间内环 O 的移动速度也视为匀速，以 v 表示之，则有 $OC = v\Delta t$ 和 $O'C' = v'\Delta t$. 由于绳不可伸长，故应有



$$O'C' + C'C = O'O.$$

令 $O'O$ 与 $C'C$ 的交点为 E，在 $O'O$ 上分别取 $ED' = EC'$ 和 $ED = EC$，则由上式有

$$O'C' = O'O - C'C = O'O - D'D,$$

于是有

$$O'C' = O'D' + OD.$$

由于 Δt 很小，则 $O'C'$ 很小，$O'O$ 与 $C'C$ 的夹角很小，由此，两等腰 $\triangle ECD$ 和 $\triangle EC'D'$ 的底角均很接近于 $\dfrac{\pi}{2}$，故 $\triangle OCD$ 和 $\triangle O'C'D'$ 均可近似视为直角三角形，则在此两直角三角形中，有 $O'D' = O'C'\cos\alpha$，$OD = OC\cos\alpha$.

综合前述的式子可得 $O'C' = O'C'\cos\alpha + OC\cos\alpha$，

即 $v'\Delta t = v'\Delta t\cos\alpha + v\Delta t\cos\alpha$.

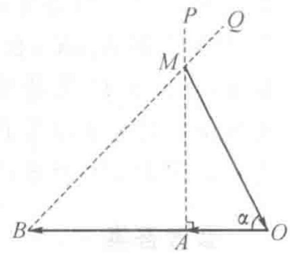
故得此时环 O 沿杆上升的速度大小为

$$v = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}v' = \frac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}v'.$$

解法 2：由相对运动求解. 以地面为参照物时，环 O' 以速度 v' 顺杆 $A'B'$ 向下滑，环 O 则在此刻以速度 v 顺杆 AB 向上滑，以环 O' 为参照物时，环 O 相对于环 O' 的速度方向是向上的，以 $v_{相}$ 表示这一相对速度，则其大小为 $v_{相} = v' + v$.

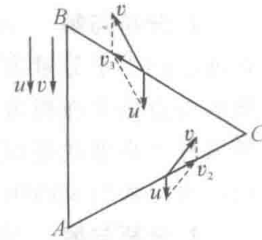
显然，$v_{相}\cos\alpha$ 为 O 向 O' 靠拢的速度分量，这一分量的作用是使 OO' 间的距离缩小，不难看出，它应等于绳相对于 O' 自 O' 中抽出的速度，这一速度的大小就是 v'，故有 $v_{相}\cos\alpha = v'$.

所以 $$(v+v')\cos\alpha = v',\quad v = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}v' = \frac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}v'.$$



4. 分析与解 从风相对人运动的角度考虑，以人为参照物，风相对人运动的速度 $\overrightarrow{v_{风r}} = \overrightarrow{v_{风}} - \overrightarrow{v_{人}}$，其中，$\overrightarrow{v_{风}}$ 为风相对于地的速度，即为所求速度. 如右图所示，$\overrightarrow{OA}$ 为第一种情况下的 $(-\overrightarrow{v_{人1}})$，设 $\overrightarrow{v_{风}} = \overrightarrow{MO}$，其中，$M$ 为图面上某一点，由题意，M 在直线 AP 上.

又 $\overrightarrow{OB}$ 为第二种情况下的 $(-\overrightarrow{v_{人2}})$，则 M 在直线 BQ 上. 故 M 为直线 BQ 与 AP 的交点，可见 $|\overrightarrow{v_{风r}}| = \sqrt{5}v = 11.2\text{km/h}$，风向为东偏南 $\alpha = 63.4°$.



5. 分析与解 飞机相对于地的速度在 BA、AC、CB 过程分别为

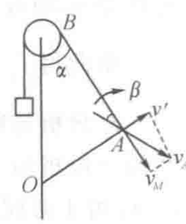
$$v_{BA} = v_1 = u + v = 60\text{km/h}. \quad ①$$

而 $v_{AC} = v_2$ 与 $v_{CB} = v_3$ 均满足余弦定理

$$v_x^2 + u^2 - 2v_x \cdot u \cdot \cos 120° = v^2 \quad ②$$

由 ② 式得 $$v_2 = v_3 = 24\text{km/h}.$$

故 $$t_{总} = \frac{a}{v_1} + \frac{a}{v_2} + \frac{a}{v_3} = \frac{1}{5}h = 12\text{min}.$$



6. 分析与解 如右图所示，设 $\angle BAO = 90° + \beta$，A 点绕 O 轴转动的速度 v_A 可表示为

$$v_A = \omega \cdot \overline{OA}.$$

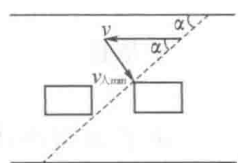
将 v_A 分解为沿 BA 方向的速度 v_M（因 A 点与绳系在一起，故 v_A 有一分速度 v_M）和与 v_M 垂直的速度 v'，则

$$v_M = v_A\cos\beta.$$

在 $\triangle ABO$ 中，由正弦定理得

$$\frac{h}{\sin(90°+\beta)} = \frac{\overline{OA}}{\sin\alpha} = \frac{h}{\cos\beta}.$$

由此得 $v_M = \omega h\sin\alpha$，此即物体 M 的速度（绳上各点沿绳方向的速度大小均与物体 M 的速度大小相同）.



7. 分析与解 如右图所示，$v_{人\min}$ 即为人安全穿过马路的最小速度，则

$$v_{人\min} = v\sin\alpha = v \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

故所需时间为 $t = \dfrac{c}{v_{人\min}\cos\alpha} = \dfrac{c(a^2+b^2)}{abv}$.

8. 分析与解 设某一时刻两根杆分别位于 l_1' 和 l_2' 位置，经 Δt 时间间隔，两根杆分别运动到 l_1 和 l_2 位置，则两根杆的交点由位置 P' 运动至 P.

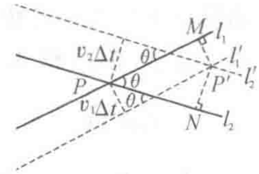
交点 P 相对于地面的速度

$$v_P = \frac{\overline{PP'}}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{v_1\Delta t}{\sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{v_2\Delta t}{\sin\theta}\right)^2 - 2\left(\frac{v_1\Delta t}{\sin\theta}\right)\cdot\left(\frac{v_2\Delta t}{\sin\theta}\right)\cdot\cos\theta\right]}$$
$$= \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\theta}.$$

P 相对于 l_1 的速度

$$v_{pr1} = \frac{\overline{MP}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{v_2\Delta t}{\sin\theta} + v_1\Delta t \cdot \cot\theta\right)$$

$$= \frac{v_1 \cos\theta + v_2}{\sin\theta}.$$



P 相对于 l_2 的速度

$$v_{pr2} = \frac{\overline{NP}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{v_1 \Delta t}{\sin\theta} + v_2 \Delta t \cdot \cot\theta\right)$$

$$= \frac{v_1 + v_2 \cos\theta}{\sin\theta}.$$

9. 分析与解 解法 1:建立一平面直角坐标系,令其坐标原点与 A 点重合,x 轴沿 AB 方向,取两质点分别位于 A、B 两位置时,时刻 $t=0$,则在任一时刻 t,

甲质点的位置坐标为 $x_1 = v_1 t,\ y_1 = 0$;

乙质点的位置坐标为 $x_2 = l - v_2\cos\alpha \cdot t,\ y_2 = v_2 \sin\alpha \cdot t$.

以 r 表示时刻 t 时甲、乙两质点间的距离,则有

$$\begin{aligned} r^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ &= (l - v_2\cos\alpha \cdot t - v_1 t)^2 + (v_2 \sin\alpha \cdot t)^2 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha)t^2 - 2l(v_1 + v_2\cos\alpha)t + l^2. \end{aligned}$$

当甲乙两者间距离最小时,r^2 的值也为最小.

由二次函数的极值公式知,当 $t = \dfrac{l(v_1 + v_2\cos\alpha)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}$ 时,r^2 有最小值,为

$$r_{\min}^2 = \frac{(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2\cos\alpha)l^2 - l^2(v_1 + v_2\cos\alpha)^2}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}$$

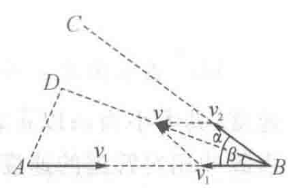
$$= \frac{l^2 v_2^2 \sin^2\alpha}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}.$$

故此过程中甲、乙两质点间距离的最小值为 $r_{\min} = \dfrac{l v_2 \sin\alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}}$.

解法 2:以 A 为参照系,B 沿右图所示合速度方向运动,则

$$d_{\min} = l\sin\beta,$$

而 $$\sin\beta = \frac{v_2}{v}\sin\alpha,$$



$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha},$$

得 $$d_{\min} = \frac{l v_2 \sin\alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2\cos\alpha}}.$$

由 $l\cos\beta = vt$ 得 $t = \dfrac{l(v_1 + v_2\cos\alpha)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}$.

10. 分析与解 B_2 点的运动比较复杂,但它可以看作随基点 A_1 的平动和绕 A_1 的转动的合运动,也可以看作随基点 A_2 的平动及绕 A_2 的转动的合运动.

设 $A_0A_3 = x$,则 $A_0A_1 = \dfrac{x}{2}$,$A_0A_2 = \dfrac{5}{6}x$,而 A_3 点的速度 $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$,则 A_1 和 A_2 点的速度分别为

$$v_{A_1} = \frac{\Delta\left(\frac{1}{2}x\right)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v}{2},$$

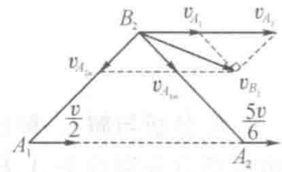
$$v_{A_2} = \frac{\Delta\left(\frac{5}{6}x\right)}{\Delta t} = \frac{5}{6}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5}{6}v.$$

现取正方形 $A_1B_2A_2C_2$ 为研究对象,由对称性可知,取 A_1 和 A_2 为基点时,杆 A_1B_2 及 A_2B_2 转

动的角速度大小必相等，故绕 A_1 点的转动速度 v_{A_1n} 及绕 A_2 点的转动速度 v_{A_2n} 必定相等. 右图画出了分别以 A_1 和 A_2 为基点时，顶点 B_2 的速度的合成矢量图.

由图可知
$$v_{1n}=v_{2n}=(v_{A_2}-v_{A_1})\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{6}v.$$

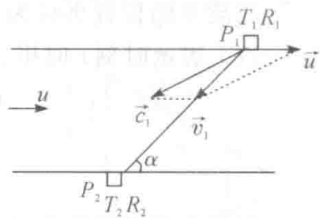
在 $\triangle B_2v_{A_1n}v_{B_2}$ 中，运用余弦定理，有



$$v_{B_2}^2=v_{A_1}^2+v_{1n}^2-2v_{A_1}v_{1n}\cos135^\circ$$
$$=\frac{v^2}{4}+\frac{2v^2}{36}+2\times\frac{v}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{6}v\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{9+2+6}{36}v^2=\frac{17}{36}v^2.$$

故 $v_{B_2}=\dfrac{\sqrt{17}}{6}v.$

11. 分析与解 解法 1：声波的传播速度是声波相对媒质的速度. 以 $\vec{c_1}$ 表示由发射器 T_1 向管道中液体发射的超声脉冲相对液体的速度，其大小为 c；$\vec{u}$ 表示液体的流速，方向沿管道向右；以 $\vec{v_1}$ 表示超声脉冲相对管道的速度，其方向沿 P_1、P_2 的连线，由 P_1 指向 P_2，如右图所示. 根据速度叠加原理，有



$$\vec{v_1}=\vec{c_1}+\vec{u}. \qquad ①$$

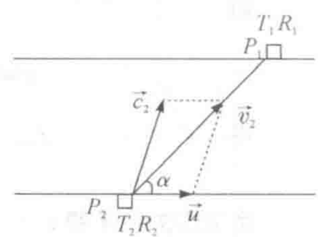
以 α 表示 P_1、P_2 的连线与管道轴线的夹角，根据 ② 式和上图可得
$$c^2=v_1^2+u^2-2v_1u\cos(\pi-\alpha). \qquad ②$$

即
$$v_1^2+2uv_1\cos\alpha-(c^2-u^2)=0. \qquad ③$$

解得
$$v_1=\frac{-2u\cos\alpha+\sqrt{4u^2\cos\alpha^2+4(c^2-u^2)}}{2}. \qquad ④$$

发射器 T_1 向管道中液体发射的超声脉冲传播到接收器 R_2 所需的时间
$$t_1=\frac{l}{v_1}. \qquad ⑤$$

以 $\vec{c_2}$ 表示由发射器 T_2 向管道中液体发射的超声脉冲相对液体的速度，其大小为 c；以 $\vec{u}$ 表示液体的流速，方向沿管道向右；以 $\vec{v_2}$ 表示超声脉冲相对管道的速度，其方向沿 P_2、P_1 的连线，由 P_2 指向 P_1，如右图所示. 根据速度叠加原理，有



$$\vec{v_2}=\vec{c_2}+\vec{u}. \qquad ⑥$$

根据 ⑥ 式和右图可得
$$c^2=v_2^2+u^2-2v_2u\cos\alpha. \qquad ⑦$$

即
$$v_2^2-2uv_2u\cos\alpha-(c^2-u^2)=0. \qquad ⑧$$

解 ⑧ 式得
$$v_2=\frac{2u\cos\alpha+\sqrt{4u^2\cos\alpha^2+4(c^2-u^2)}}{2}. \qquad ⑨$$

发射器 T_2 向管道中液体发射的超声脉冲传播到接收器 R_1 所需的时间
$$t_2=\frac{l}{v_2}. \qquad ⑩$$

由 ⑤⑩ 式有