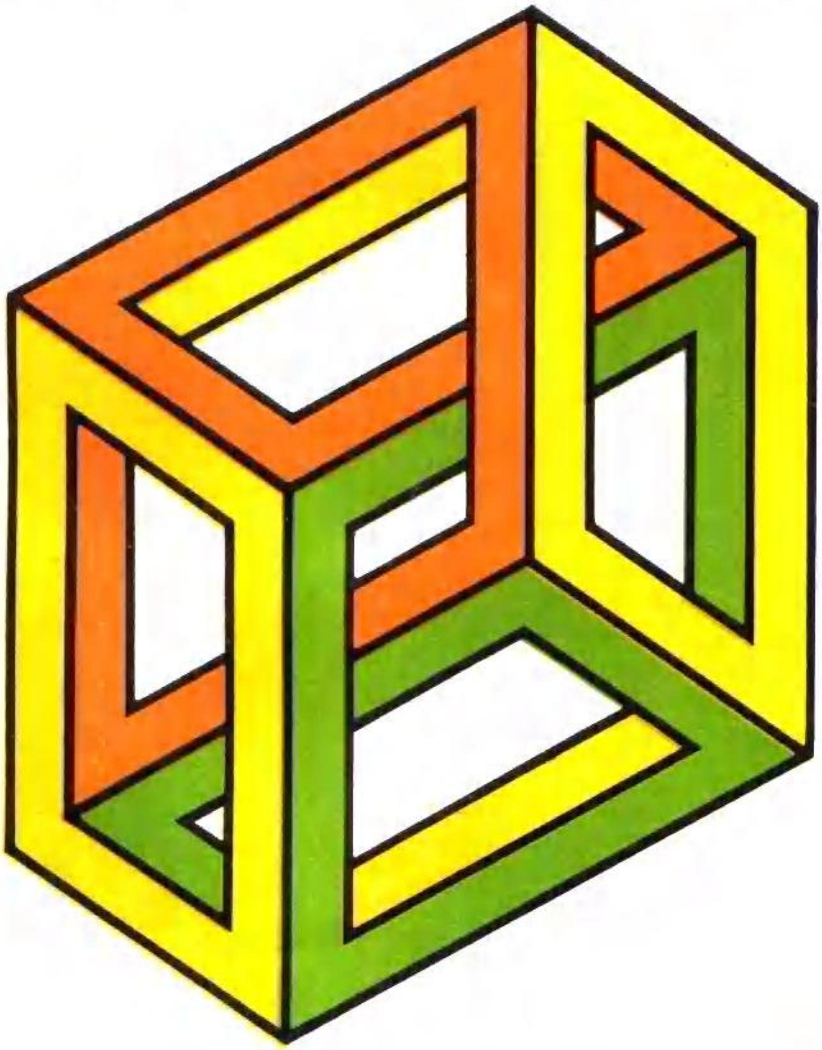
工程数学

复变函数

[修订版]

王省富 编



工 程 数 学

复 变 函 数

（修 订 版）

王 省 富 编

国 防 工 业 出 版 社

内容简介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的"工程数学"七个分册之一。本分册介绍复变函数的概念、导数、积分、无穷级数、留数理论、保角变换、黎曼曲面等内容，且着重于基本概念、基本理论及某些应用。书中附有适量习题，书后附习题答案。

本书可作为高等工科院校教材，也可供有关科技人员参考。

工程数学
复变函数
（修订版）
王省富 编
责任编辑 陈子玉
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
师范学院出版社印刷厂印装
*
850×1168 1/32 印张 $5\,^7/_8$ 153千字
1987年11月第二版 1987年11月第三次印刷 印数：33,401—37,100册

ISBN7-118-00122-3/O3 定价：1.40元

再版说明

《工程数学》(修订版)包括：《概率论与数理统计》、《矢量分析与张量计算》、《复变函数》、《线性代数》、《计算方法》、《拉普拉斯变换与富里哀变换》、《数学物理方程·特殊函数》。

这次再版，考虑到本书第一版发行以来各地的使用情况，以及工科学生对复变函数这门课程的要求和学习时间的限制，除了在§3.5内补充了平面热流场的讨论和各章后增补了少量习题外，没有删减和增加其他的内容，只是就文字通畅、逻辑顺序以及理论和公式的完善稍有补充，使其比较周密完善。

本书的原主审北京航空学院周德润同志，对本书的这次再版给予了热情的支持，审阅了再版的全部修改稿，提出了许多宝贵意见，在此恭表谢意。

限于编者水平，错误和不妥之处仍可能有，恳切希望读者给予指正。

编　者

前　　言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的《工程数学》教材之一。全套教材共分七册出版：《矢量分析》、《复变函数》、《积分变换》、《线性代数》、《计算方法》、《数学物理方程与特殊函数》、《概率论与数理统计》。

本册介绍复变函数的概念、导数与积分、无穷级数、留数理论、保角变换、黎曼曲面等内容，并着重于基本概念、基本理论及某些应用。

书中加有“*”号的内容可根据情况予以取舍，排小字的内容供阅读时参考。书中附有适量习题，书后附有习题答案。阅读本书只需具备一般高等数学知识。

本册由西北工业大学王省富编写，由北京航空学院周德润主审。参加本书审稿的还有西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院、沈阳航空工业学院、南昌航空工业学院等院校数学教研室的同志。我们对在本书编写过程中给予大力支持和提供宝贵意见的所有同志，在此致以衷心的感谢。

由于编者的水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编　者

目　录

第一章 复　　数

关于复数，在初等代数中已有论述，但是为了有利于我们今后的讨论，这里再给出系统的叙述和补充，还是很必要的。

§1.1 复数的表示及其几何意义

设 x 和 y 是两个实数，i 表示虚数单位 $\sqrt{-1}$，$x+iy$ 通常称为**复数**，记为

$$z = x + iy \tag{1.1.1}$$

当 x 和 y 均为常数时，称 $z=x+iy$ 为**复常数**。当 x、y 之一或者均为变数时，称 $z=x+iy$ 为**复变数**。当 $y=0$ 时，$z=x$ 表示实数，故称 x 为复数 z 的**实部**，记为 $\mathrm{Re}\,z=x$；当 $x=0$ 时，$z=iy$ 表示**虚数**，故称 y 为复数 z 的**虚部**，记为 $\mathrm{Im}\,z=y$；当 $x=y=0$ 时，$z=0$，故零可看作实数也可看作虚数。

根据复数的上述定义，可知复数 $z=x+iy$ 与一对有序的实数（x，y），有着一对一的对应关系。而一对有序的实数与引入直角坐标系的平面上的点，有着一对一的对应关系。因此可以把平面上的点 $M(x, y)$ 看作是复数 $z=x+iy$ 的几何表示(图1-1)。复数 $z=x+iy$ 称为点 $M(x, y)$ 的标号。这样就建立了复数与平面上点的对应关系。实数 x 对应于横坐标轴上的点，故称横坐标轴为**实轴**；虚数 iy 对应于纵坐标轴上的点，故称纵坐标轴为**虚轴**；实轴与虚轴的交点称为原点。将引入了实轴、虚轴及原点的平面称为**复平面**。今后约定将复数 $z=x+iy$ 与点 z（指 z 的几何表示）用作同义词。此外，还可将复数 $z=x+iy$ 理解为复平面上起点在原点，终点是以 z 为附标的点 $M(x, y)$ 的向量（图1-1），因此也把复数 z 与向量 z 用作同义词。这个向量的长度称为复数 z 的**模**，记为 $|z|$ 或 r。向量 z 与实轴正方向的夹

角，称为复数 z 的**辐角**，记为Arg z 或Φ；辐角的正负，视正向实轴是按逆时针方向还是顺时针方向转至向量 z 而定，即逆时针转至向量 z 时，z 的辐角取正值，顺时针转至向量 z 时，z 的辐角取负值。如同在极坐标系中一点的极角一样，任何一个复数的辐角有无穷多个，其中只有一个辐角在 $-\pi$ 与 π 之间，称为**主辐角**（或辐角的主值），记为arg z 或φ。于是有

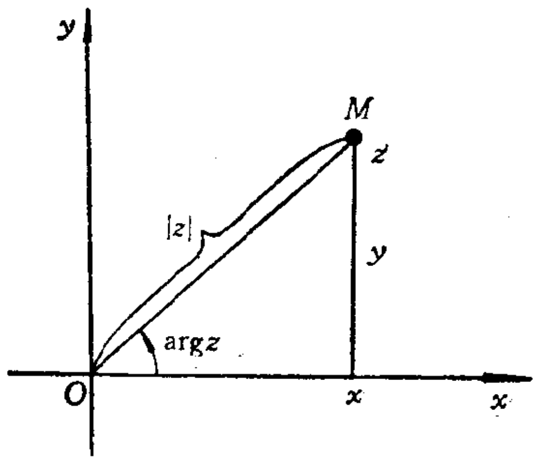


图 1-1

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi$$

及

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{（当 } z \text{ 在第一象限）} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{（当 } z \text{ 在第二象限）} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi & \text{（当 } z \text{ 在第三象限）} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{（当 } z \text{ 在第四象限）} \end{cases}$$

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \text{（} k \text{ 表示任意的整数）}$$

值得注意的是当 z 为零时，它的辐角不能确定，但是可以取作任意的实数，这与极坐标系中极点的极角相类似。此外复数 $z = x + iy$ 的实部、虚部与其模及辐角满足下列关系：

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

于是复数 z 可用三角函数表示如下：

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (1.1.2)$$

根据欧拉（Euler）公式●，$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$，复数 z 又可用

● 这里的欧拉公式，实际上是公式 $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ 的特殊情形，这个公式的证明将在§5.3中给出。

指数函数表示如下：

$$z=re^{i\varphi} \tag{1.1.3}$$

复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 称为是**相互共轭的**，如果前者用 z 表示，后者就用 $\bar{z}$ 表示。显然 z 和 $\bar{z}$ 关于实轴是对称的（图1-2），且有 $|z|=|\bar{z}|$，$\arg z=-\arg\bar{z}$($\arg z\neq\pi$)。当 z 为实数时，它的共轭数也是它自己。

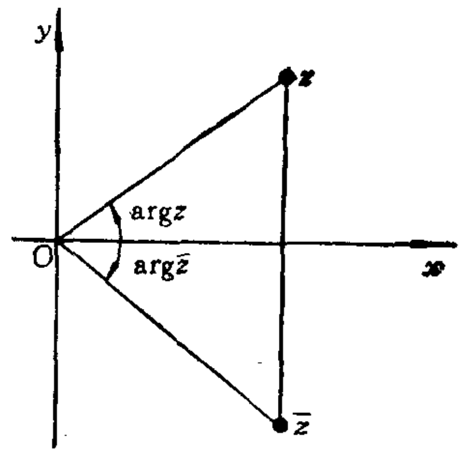


图 1-2

实数的几何表示是实轴上的点，而且全体实数正好布满实轴，因而可以比较大小，位置靠左的数小，靠右的数大。复数的几何表示是复平面上的点，难以规定一个孰大孰小的原则，所以复数不能比较其大小。

这里再约定$\arg z$ 除表示$\mathrm{Arg}\,z$ 的主值外，在我们需要时还将用$\arg z$ 表示$\mathrm{Arg}\,z$ 中的某一个值，在必要时，并将特别指明所表示的是那一个值。

§1.2 复数的运算

（一）相等

两个复数$z_1=x_1+iy_1$和$z_2=x_2+iy_2$，当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$时，称这两个复数z_1与z_2是相等的，记为$z_1=z_2$。

（二）加法

两个复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$的和，我们作如下的规定：

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \tag{1.2.1}$$

于是，两个相互共轭的复数的和，显然是实数，即

$$z+\bar{z}=x+iy+(x-iy)=2x=2\mathrm{Re}\,z=2\mathrm{Re}\bar{z}$$

依据加法的规定，容易证明，复数加法遵循交换律与结合律，即

$$z_1+z_2=z_2+z_1 \text{与} (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$$

成立。

（三）减法

两个复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$的差，我们作如下的规定：

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2) \qquad (1.2.2)$$

于是，两个相互共轭复数的差，显然是虚数。即

$$z-\bar{z}=x+iy-(x-iy)=i2y=i2\operatorname{Im} z$$

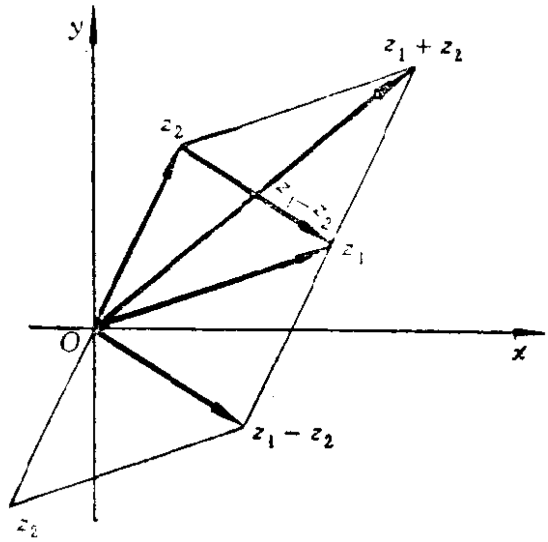


图 1-3

根据复数加法与减法的规定，易见它们是符合向量加法与向量减法的平行四边形规则的（图1-3）。由此可见，前面将复数z理解为向量也是有道理的。

由于复数的模等于对应向量的长度，参看（图1-3）易知下面的两个不等式是成立的：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$$

（四）乘法

两个复数的乘法与两个二项式的乘法类似，只不过要把i的平方取为-1。于是两个复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$的积，我们作如下的规定：

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1) \qquad (1.2.3)$$

特别，两个相互共轭复数的积，等于二者之一的模的平方，即

$$z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2=|\bar{z}|^2$$

如果采用三角函数表示式，$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$，$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$，可借助于三角恒等式得

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \qquad (1.2.4)$$

如果采用指数函数表示式，$z_1=r_1e^{i\varphi_1}$，$z_2=r_2e^{i\varphi_2}$，则有

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad (1.2.5)$$

由式（1.2.4）或式（1.2.5）显见，两复数相乘，所得积的模等

于原来两复数模的积，积的辐角等于原来两复数辐角的和，即

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2$$

根据乘法与加法的规定推得乘法遵循下列规律：

$$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1 \qquad \text{（交换律）}$$

$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3) \qquad \text{（结合律）}$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3 \qquad \text{（分配律）}$$

（五）除法

两个复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2(z_2\neq 0)$的商，我们作如下的规定：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.2.6}$$

若采用三角函数表示式，$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$，$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$，则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2^2}+i\,\frac{r_1r_2(\cos\varphi_2\sin\varphi_1-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2^2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] \tag{1.2.7}$$

若采用指数函数表示式，$z_1=r_1e^{i\varphi_1}$，$z_2=r_2e^{i\varphi_2}$，则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{1.2.8}$$

由式（1.2.7）或式（1.2.8）显见，两个复数相除，所得商的模等于分子的模除以分母的模，商的辐角等于分子的辐角减去分母的辐角，即

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$$

（六）乘幂

n 个相同的复数 z 的乘积，称为 z 的 n 次幂，记为

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n\text{个}}$$

取 $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ 即有

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = (re^{i\varphi})^n$$
$$= r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

在上式中令 $r = 1$，即得众所周知的棣美弗（Demoivre）公式如下：

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

（七）开方

若 $w^n = z$，则称 $w = \rho e^{i\theta}$ 为复数 $z = re^{i\varphi}$ 的 n 次方根，记为 $\sqrt[n]{z}$ 或 $z^{1/n}$。于是有

$$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta} = re^{i\varphi}$$

即 $\qquad \rho^n = r，n\theta = \varphi + 2k\pi$（$k$ 为任意整数）

于是 $\qquad \sqrt[n]{z} = z^{1/n} = w = \rho e^{i\theta} = r^{1/n} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$

其中 $r^{1/n}$ 只取一个算术根，当取 $k = 0，1，2，\cdots，n-1$ 时，即得 $z^{1/n}$ 的 n 个不同的值：

$$r^{1/n} e^{i\frac{\varphi}{n}}, r^{1/n} e^{i\frac{\varphi+2\pi}{n}}, \cdots, r^{1/n} e^{i\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}}$$

当 k 取其他的整数值时，所得 $z^{1/n}$ 的值，必与上述这 n 个值中的某一个值相重合。因此 $z^{1/n}$ 只取这 n 个不相同的值，即

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$
$$(k = 0，1，2，\cdots，n-1) \qquad (1.2.9)$$

例如 $z = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ 的 4 次方根，有 4 个值，它们分别为：

$$w_0 = (\sqrt[4]{1+i})_0 = 2^{1/8} e^{i\frac{\pi}{16}} \quad (k = 0\text{ 的情形})$$

$$w_1=(\sqrt[4]{1+i})_1 = 2^{1/8} e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)} = iw_0$$

（$k = 1$ 的情形）

$$w_2=(\sqrt[4]{1+i})_2 = 2^{1/8} e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\pi\right)} = -w_0$$

（$k = 2$ 的情形）

$$w_3=(\sqrt[4]{1+i})_3 = 2^{1/8} e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)} = -iw_0$$

（$k = 3$ 的情形）

这四个方根均匀地分布在以原点为中心，以 $2^{1/8}$ 为半径的圆周上（图1-4）。

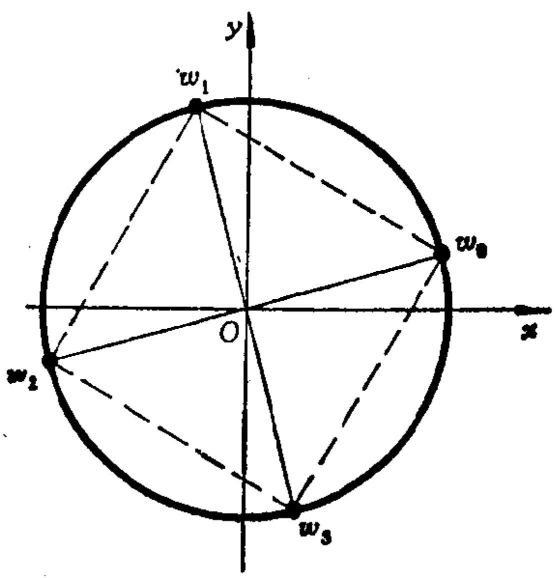


图 1-4

§1.3 复平面上的曲线

在笛卡尔（Descartes）坐标平面 xOy 上，曲线的参数方程为：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b) \qquad (1.3.1)$$

在 y 轴上引入虚单位 $i=\sqrt{-1}$ 后，xOy 平面就成为复平面了，曲线（1.3.1）上的点$[x(t),\ y(t)]$，也就成为复平面上以

$z(t)=x(t)+iy(t)$ 为附标的点了，因而在复平面上，曲线的参数方程，可以表为复数形式：

$$z=z(t)=x(t)+iy(t)\quad(a\leqslant t\leqslant b)\qquad(1.3.2)$$

当 $x(t)$，$y(t)$ 都是 t 的连续函数时，称 $z(t)$ 是 t 的连续函数，这时式（1.3.2）表示一条连续曲线。若 $t_1\neq t_2$ 且 $a<t_1,t_2<b$ 时，有 $z(t_1)\neq z(t_2)$，则曲线（1.3.2）自己不相交。再若 $z(a)=z(b)$ 则曲线（1.3.2）成为自己不相交的连续闭曲线，这种曲线称为**简单闭曲线**。

如果 $x(t)$，$y(t)$ 有连续的导函数 $x'(t)$，$y'(t)$，则 $z(t)$ 有连续的导函数 $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$。再若 $z'(t)\neq0$ 则曲线（1.3.2）有连续变动的切线。有连续变动切线的曲线，称为**光滑曲线**。由几段光滑曲线连接组成的曲线，称为**逐段光滑曲线**。

复平面上的曲线，也可以看作满足某种条件的点 z 的几何轨迹，这种条件通常可以表示为 z 的某种方程。例如 $|z-a|=r$（r 为正实常数，a 为复常数）表示以点 a 为中心，r 为半径的圆周（图1-5）。又如 $\arg(z-1)=\theta_0>0$ 表示由点 1 射出，与实轴的夹角为 θ_0 的半射线（图1-6）。

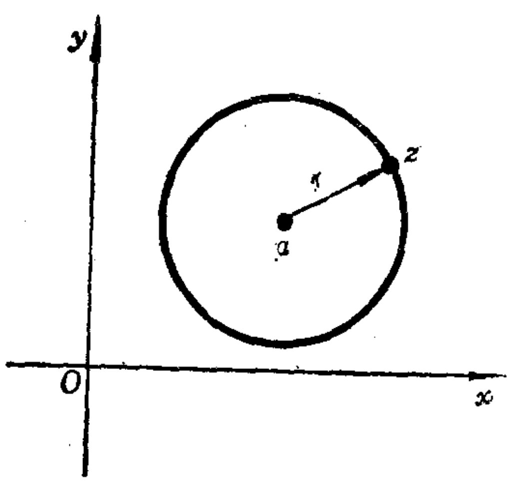


图 1-5

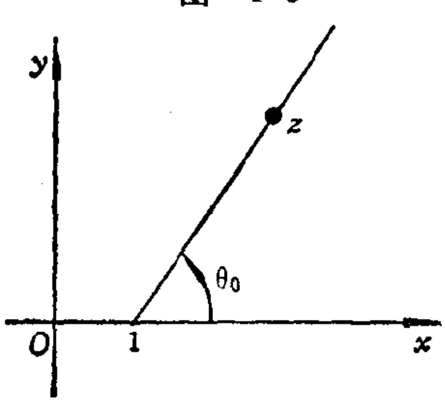


图 1-6

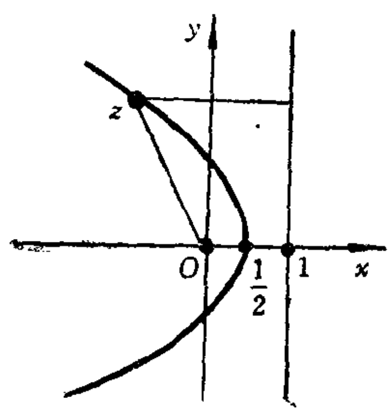


图 1-7

又如关系式$|z|=1-\mathrm{Re}\,z$表示动点z至原点的距离，等于该动点至定直线$x=1$的距离，因而轨迹为一抛物线（图1-7）。

§1.4 区域及其边界

在复平面上以z_0为中心，以某一个正数δ（一般取的很小）为半径的圆的内部（即满足$|z-z_0|<\delta$的点的全体），称为z_0的**δ邻域**，简称z_0的**邻域**。

在复平面上由点、曲线所围的部分D，具有下列性质时，称D为一个区域：

1. D内每一点，至少有一个邻域，这个邻域内所有的点都属于D。

2. D内任意两点，可用全部属于D的点组成的连续曲线把它们连接起来。

这些围成区域D的点、曲线（如图1-8中点a、曲线c_0、c_1、γ）等都称为区域D的**边界**。并约定当观察者沿边界前进而他的左手靠着区域D时，称观察者前进的方向为边界的正方向（图1-8）。根据区域的定义，区域不能把它的边界上的点包括在内，因而为了明确起见，称区域为开区域。而把区域的所有点，再包括它的边界上的所有点，而得到的全体，称为**闭区域**，记为$\bar{D}$。区域边界各自不相连部分的个数，称为该区域的**连数**，如图1-8中的(a)、(b)、(f)、(g)图所示区域D的连数都是1，而(c)、(d)图中所示区域D的连数都是2，而（e）图中所示区域D的连数为4。今后将连数为1的区域称为单连域，连数多于1的区域称为复连域，或者更明确的指明它的连数，如图1-8中的（e）图所示的区域D称为4连域。

如果区域D可以包含在某个以原点为中心，以某一确定的正数为半径的圆内，则称区域D是有界的，否则称为无界的。例如图1-8中的(a)、(c)、(d)、(e)四图所示的区域D都是有界的，图1-8中的（b)、(f)、（g）三图所示的区域D都是无界的。

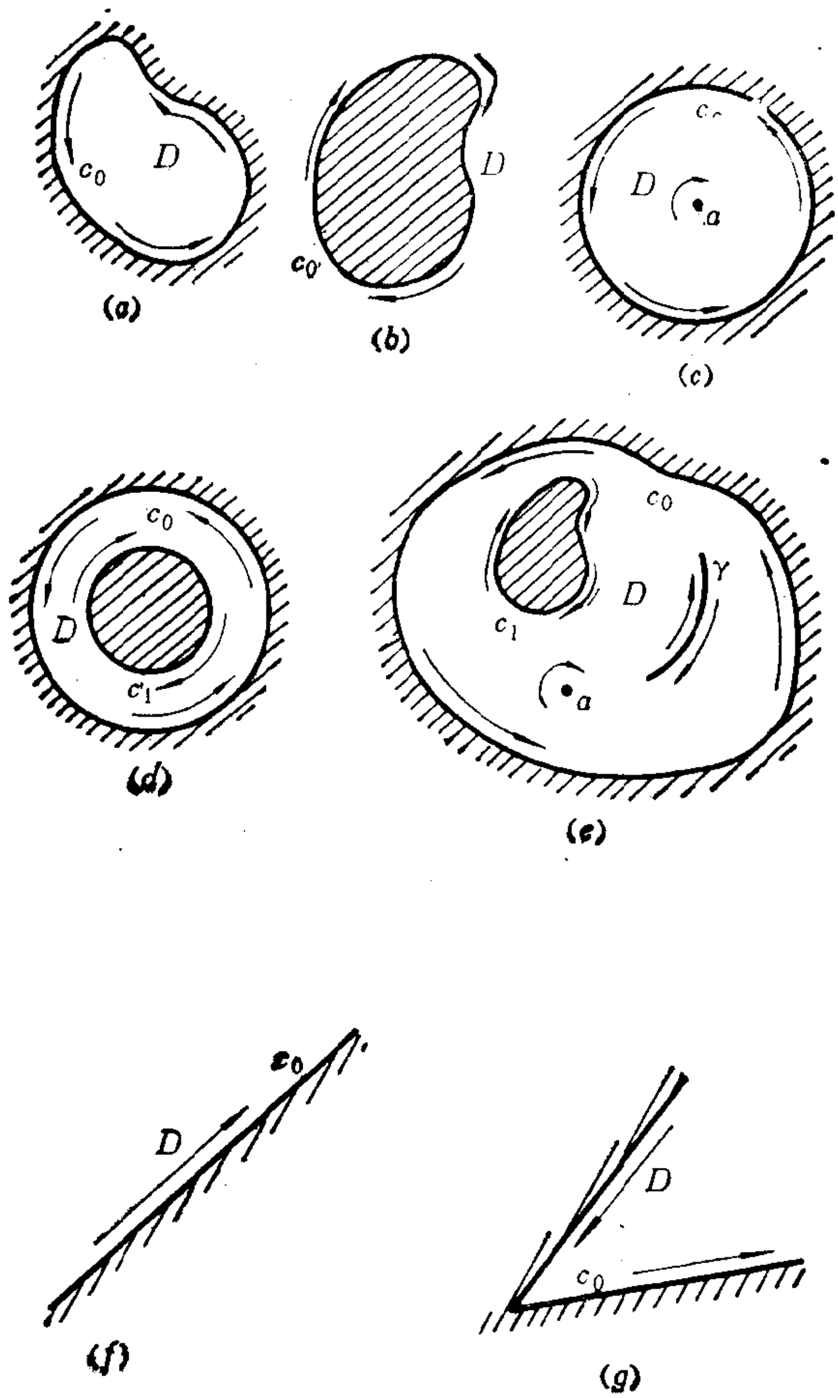


图 1-8