结构动力学基础

俞载道　编著

同济大学出版社

结构动力学基础

俞载道　编著

同济大学出版社

内　容　提　要

本书系统叙述了结构动力学的基本概念、基本理论和分析方法。既作了严密的数学论证，又注重物理概念的阐述。全书分两篇共十三章：第一篇为确定性结构动力学基础，包括经典动力学基础、单、双和多自由度体系的振动、结构振动问题中固有值的求解、非线性结构动力响应分析等；第二篇介绍概率性结构动力学问题。

本书可作为高等学校有关专业学生和研究生的教材，也可供工程技术人员和科研人员的参考。

责任编辑　曹国敖
　　　　　顾敏健
封面设计　徐　繁

结构动力学基础

俞载道　编著

同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
同济大学印刷厂印刷
开本：787×1092　1/16　印张：24.375　字数：624千字
1987年7月第1版　　1987年7月第1次印刷
印数：1—4200　　科技新书目：141—244
统一书号：15335·038　　定价：4.00元
ISBN 7-5608-0040-8/TU·18

目　　录

第一篇　确定性结构动力学基础

第二篇　概率性结构动力学理论基础

第一篇

确定性结构动力学基础

第一章 结构动力学简述

§ 1-1 引 言

近数十年来，对结构进行动力分析的要求，日益迫切。这是由于：1）各种结构尺寸的增大和高耸结构的出现，使风荷载对结构强度及稳定性产生了举足轻重的影响。1940年秋，美国 Tacoma 悬索桥由于风致振动而破坏，这一严重事故震惊了当时的桥梁工程界。从此，对风致振动的研究得到了足够的重视。现已清楚，对于象悬索桥这种大跨度的柔性桥梁结构，在设计时必须考虑风振的影响。此外，还有车辆对桥梁结构的振动影响也是人们正在研究的课题。2）在世界各地，每年都有地震发生，为了减少或避免地震对工程结构物的破坏，目前人们正在努力研究抗震设计问题。3）离岸结构——海洋平台的出现。海洋平台结构承受的荷载是风、浪、流、冰及地震等动力环境荷载，特别是对深水域的海洋平台，在设计时必须对结构进行动力分析。4）建筑物的抗爆。5）在多层厂房中由于机器上楼引起的振动，在设计时也必须加以注意。6）动力设备基础结构的振动分析。除了上述情况外，还有其他需要考虑对结构进行动力分析，在此不再一一赘述。

说到这里，很自然地会想到这么一个问题，这就是对结构进行动力分析的目的是什么？回答是，保证结构在整个使用期间，在可能发生的动力荷载作用下能够正常地工作，并确保它安全、可靠。这就要求寻求结构在任意动力荷载作用下随时间而变化的响应（响应包括位移、应变和应力等）。寻求结构响应可以用分析的和试验的方法。对于很复杂的问题往往两种方法同时并用。本书仅讨论分析的方法。

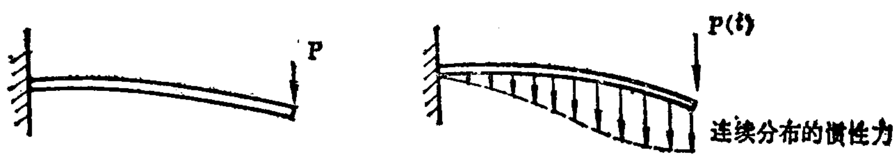
上面所说的动力荷载是指荷载的大小、方向或位置是随时间而变化的荷载。如果荷载随时间变化得十分缓慢以致动力影响微乎其微，这时可以把荷载看成是静载。因此，荷载究竟当作动力荷载还是当作静力荷载是相对的。关于这个问题我们在后面讨论动力问题的主要特征时还要提到。

计算结构在动力荷载作用下的响应基本上有两种不同的方法：确定性的和非确定性的（或称概率性的也有叫做随机性的）。在具体情况下，究竟选用那一种方法将取决于荷载、结构系统的参数以及初始条件是如何规定的。严格言之，如果前述三个方面（荷载、参数、初始条件）是完全确定已知时，则用确定性分析方法。在通常所遇到的多数问题中，为了使问题简化而又不致影响分析结果的精度，都假定结构参数及初始条件是完全确定、已知的。因此，在这种情况下，如何规定荷载，将直接决定分析方法的选用。这时，如果荷载随时间的变化可用时间的定函数形式表示时，那么，尽管它是高度变化不定的或者其性质是不规则变化的，我们仍把它叫做确定性荷载，相应的结构响应分析也被定义为确定性分析方法。反之，如果荷载随时间的变化不是完全确定、已知的，但可以用统计特征来进行描述的话，则这种荷载叫做随机荷载，而非确定性（概率性或随机性）分析方法是对应于随机荷载下的响应分析。当然，分析的结果也只能用统计特征来进行描述。第一篇中仅讨论确定性结构动力分析方法，在第二篇中将扼要地介绍非确定性结构动力分析方法。

用确定性方法对结构进行动力分析时，首先要求出结构在动力荷载作用下其位移随时间变化的情况，即要求出结构在某种荷载-时间历程作用下，相应的位移-时间历程；然后即可求出结构的其他响应，如应力、内力等的时间历程。

用非确定性方法分析时，不能采用上述确定性分析方法的那一套程序，因为在非确定性分析中所求得的位移仅仅是某种统计特征值，而其他响应（比如应力）的统计特征值和位移统计特征值之间没有象确定性分析时位移和应力之间的那种简单关系。因此，如果要求应力统计特征值的话，还得用特定的非确定性分析方法直接计算，而不是由所得的位移统计特征值来计算。

现在再让我们回到关于动力问题的主要特征的讨论上来。结构动力问题不同于静力问题表现在二个重要方面：第一，动力问题具有随时间而变化的性质。由于荷载和响应因时而异，故动力问题不象静力问题具有单一的解而必须建立感兴趣的全部响应时间历程，所以动力分析要比静力分析更为复杂且费时间。第二，而且是更重要的方面，就是在动力问题中位移加速度起了很大的作用。图1—1a表示在集中静载P作用下的悬臂梁。悬臂梁的位移和应力直接取决于P。图1—1b表示同样一根悬臂梁但受到一个随时间变化的荷载$P(t)$，则要引起位移加速度。梁的位移与其加速度有联系，加速度又产生与其反向的惯性力。于是图1—1b中悬臂梁的弯矩和剪力不仅要平衡外荷载而且还要平衡惯性力。这是结构动力学问题的一个很主要的特征。一般来说，如果惯性力是结构内部弹性力所平衡的全部荷载中的一个重要部分，那么必须考虑问题的动力特性。反之，如果荷载随时间变化十分缓慢从而运动也缓慢到致使惯性力小到可以忽略不计的程度，那么，即使荷载和响应可能随时间而变化，但对任何瞬时的分析，仍可用静力分析的方法来解决。



(*a*) 在静载P作用下的悬臂梁　　(*b*) 在动力荷载$P(t)$作用下的悬臂梁

图 1—1

最后，在结束这一小节之前，简要地介绍一下研究结构动力问题的主要步骤，这就是设计、分析和试验。通常情况并不一定完全需要上述三个步骤而仅需其中的一、二个。比如说，一个现存的结构在某一规定烈度（或震级）的地震力作用下抵抗倒塌到底有多少安全度？对于这样一个问题，要作出结论就需要进行动力分析，必要时还得同时做试验来验证分析的结果。在动力分析过程中，很重要的一步是如何来建立合适的数学模型，不同的数学模型就有不同的数学表达方式。下一节就来讨论这个问题。

§1-2　结构的数学模型

实际的结构系统往往是很复杂且难于分析。为了便于分析，同时又要使分析能反映真实

结构的主要特征和性能，人们不得不对结构系统进行某种数学抽象，构造某种数学模型包含三个主要内容：(1) 通过一系列简化和假定将真实系统演变到所设想的模型。(2) 用计算图式来描绘模型。(3) 规定模型的参数（几何及物理力学参数）。对于一个同样的结构系统可以有多种的数学模型。选用模型的原则是模型要简单且仍能反映真实系统的主要特征和性能。

结构的数学模型可分为两大类，即(1) 离散参数系统或叫离散系统及(2) 分布参数系统或叫连续系统。对应于离散系统的控制方程为常微分方程而对应于连续系统的控制方程则为偏微分方程。下面先对离散系统模型作些介绍。至于连续系统则将在下一小节中介绍，并通过一个烟囱的例子来介绍结构振动的基本原理和概念，以便让读者对于结构动力学先有一个初步概貌的认识。

1-2-1 堆聚质量法

在图 1—1b 所示的动力系统中，由于惯性力由结构位移加速度产生而位移又受惯性力的影响，因而分析显得非常复杂，分析必须用偏微分方程来描述（详见 §1-3）。另一方面，如果梁的质量被堆聚在一系列的离散点上，如图 1—2 所示，则分析可大为简化，因为此时仅能在这些质量点上产生惯性力。在这种情况下，只需确定这些离散点的位移和加速度即可。为了表示结构全部有意义的惯性力的作用，必须考虑的位移分量的数目，称为结构的动力自由度。例如，如果图 1—2 所示的体系受到约束，使得三个质量 $m_i(i=1,2,3)$ 仅能在竖直方向运动，那么这个体系称为三自由度体系 (3DOF)。如果这些质量不是集中在点上，而是具有有限的转动惯量，这时这些质量的转动位移也需考虑，体系的自由度数不再为三个而是六个（三个竖向位移和三个转动位移）。由此可以看出，图 1—1b 所示的体系具有无限多个自由度。

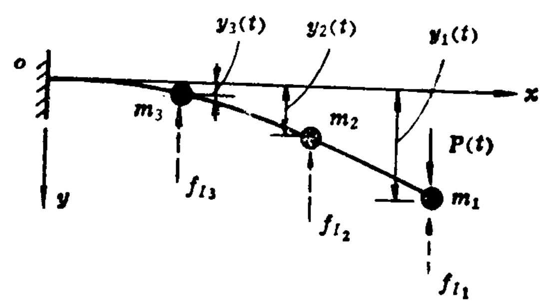


图 1—2 三个堆聚质量模型，具有三个自由度

1-2-2 广义位移法

上述堆聚质量理想化模型提供一个限制自由度的简单办法。在实际结构上，如果确有大部分质量实际上是集中在几个离散点上时，则堆聚质量模型特别合适，此时可以把结构自身的质量，按一定的力学原则，堆聚在实际存在的集结质量上，而把结构本身看成是无重的。

但是，假使体系的质量分布得相当均匀，如果采用堆聚质量模型而又要达到一定的分析精度，从而需要很多的离散点时，那么为了限制自由度数目，可用另一个较好的办法，这就是所谓广义位移法。这个方法是假定结构的挠曲线形状可用一系列满足边界条件及线性无关且相互正交的位移曲线之和来表示。作为一个简单的例子，就是用三角级数来表示简支梁的挠曲线，如下式所示：

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (1—1)$$

式(1—1)表示简支梁的挠曲线可用不同正弦波的和来表示。由于正弦波满足简支梁的边界条件，同时正弦函数系 $\sin\frac{n\pi x}{l}(n=1, 2, 3, \cdots)$ 又是线性无关的，因此，简支梁的任意形状的挠曲线 $y(x)$ 可用式(1—1)来表示。正弦波的幅值 $Q_n(n=1, 2, 3, \cdots)$ 可被看成是体系的独立坐标。但是，在这里必须指出，$y(x)$是不可数的无限集，它的势要比可数的无限集 $Q_n(n=1, 2, 3, \cdots)$ 为大。这个方法的优点是，实际梁的挠曲线可用为数不多的有限项正弦级数很好地近似表示。比如说，如果挠曲线 $y(x)$ 用三项级数来近似地表示，

$$y(x)=Q_1\sin\frac{\pi x}{l}+Q_2\sin\frac{2\pi x}{l}+Q_3\sin\frac{3\pi x}{l}$$

那就意味着一根无限个自由度的简支梁被限制成仅有三个自由度，相应的三个独立坐标为 Q_1、Q_2 和 Q_3。

上述概念可被进一步推广。对于任何一维结构的位移广义表达式可写成

$$y(x)=\sum_n Z_n\phi_n(x) \tag{1—2}$$

式中 $\phi_n(x)$ 为事先选定的函数，这些函数要满足结构的几何边界条件和保持内部位移连续性的要求，同时还要求诸 $\phi_n(x)$ 为线性无关，否则 Z_n 不能构成相互独立。此外，从一个函数能被展开成一个无穷级数的数学要求来看，还要求 $\phi_n(x)$ 是一个正交完备系。这后一个要求，在实用分析中，有时不一定苛求。

除了上述这些要求以外，对于诸 $\phi_n(x)$ 的光滑性也有一定的要求。$\phi_n(x)$ 至少要具有体系能量表达式中出现的同阶次导数。

从以上的叙述可以看出，一维结构的位形可由一组独立的数组 Z_n 来确定。因此，我们称 Z_n 为广义坐标，在这里 Z_n 的个数就是结构自由度的个数。$\phi_n(x)$ 称为形状函数或位移函数或坐标函数。

1-2-3 有限元概念

用有限数目的离散位移坐标表示给定结构位移的第三种方法，综合了堆聚质量法及广义坐标法两者中的某些特点，已成为目前流行的方法。这个方法是分析连续结构的有限元法的基础，它提供了既方便又可靠的体系理想化模型，而且对用电子计算机分析来说特别有效。

有限元法的理想化模型适用于一切的结构形式：框架结构、板壳结构以及一般的三维固体结构。

有限元法可以从两种不同的观点，物理观点和数学观点，来建立公式和加以解释。从数学的角度来看，有限元法是以剖分插值和变分原理（或加权余量法）为基础的。由于从物理观点进行解释比较直观，所以这里仅从物理方面来阐述有限元法的基本概念。

有限元法在物理方面的基本概念是：每一结构可被看成或近似地被看成由一些单个的结构元件即所谓“有限元素”或“单元”所构成的物理组成体。这些单元在有限个连接点（或称节点）处相互连接。这就是结构联系性的有限特性，并以此与连续介质力学问题相区别。通过选用适当的场函数，对于各个单元作近似的（一般情况是如此）力学分析处理，建立起

单元本身节点位移值（广义的）与相应的节点力值*（广义的）之间的关系，然后按照单元之间连接点上的力平衡条件或变形连续条件把单元拼凑成原来的结构，由此列出作为未知量的节点位移或节点力的方程组。求解方程组，从而得到问题的解。前一种方法（位移法）比后一种方法（力法）简便。对于结构动力问题的分析，一般选用位移法。用位移法分析结构的基本步骤是：

（1）计算单元在其方便的局部（单元）坐标系中表示端节点广义力与端节点广义位移之间关系的单位刚度矩阵。

（2）把在局部坐标系中表示的单元刚度矩阵转换为在整个结构组合体共同坐标系中表达的形式。

（3）对于每个节点迭加各个与之相关的单元的刚度，从而得到整个结构组合体的总刚度矩阵 $[K]$。在所有的单元刚度矩阵都已转换到共同坐标系中时，这仅仅是简单的加法运算（直接刚度法）。

（4）组成并求解表示所加节点力列矢量 $\{R\}$ 和由此产生的节点位移列矢量 $\{\delta\}$ 之间关系的平衡方程：

$$\{R\}=[K]\{\delta\}$$

（5）由求得的节点位移，通过单元的刚度矩阵，即可求得单元的端节点力，最后通过应力-应变关系可求得单元中的应力和应变。

位移法的优点之一就在于结构刚度矩阵 $[K]$ 通常是较稀疏而且是良态的。这个特点对于获得大型复杂结构体系中节点位移的有效解是很重要的。

一般说来，有限元法提供了最有效的、用一系列的离散坐标表示任意结构位移的方法。

§ 1-3 结构的连续模型

1-3-1 运动方程的建立

图 1—3 所示的烟囱为一连续体系，现以此为例加以说明。设地震时水平地面运动为 $y_g(t)$，它使烟囱发生挠曲振动 $y(x,t)$。

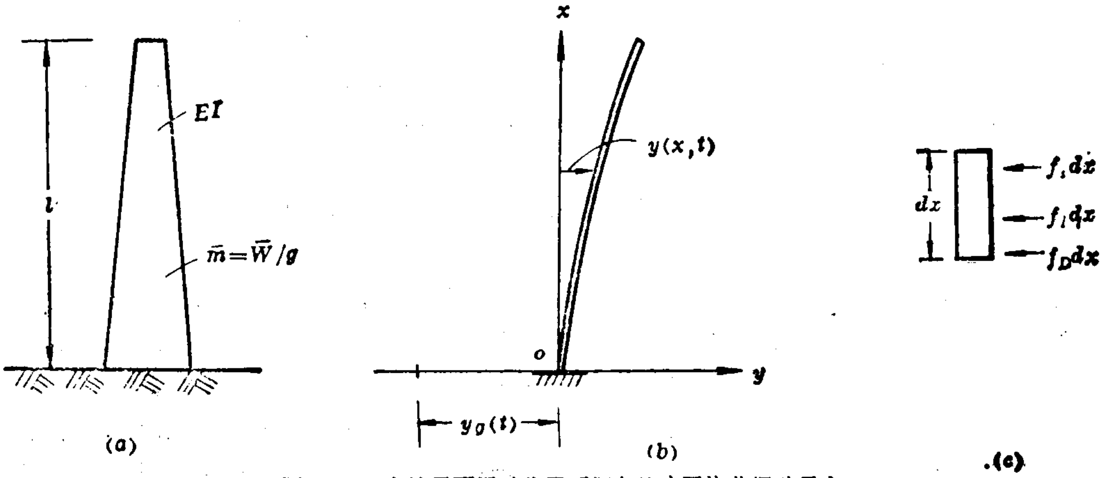


图 1—3 在地震面运动作用下烟囱的水平挠曲振动示意

* 广义位移与广义力在能量的意义上共轭。

振动时有三种力作用在烟囱的微元 dx 上（暂且忽略轴向力的作用及结构的内阻尼，见图 1—3(c)：

（1）挠曲变形产生的单位长度上的弹性力

$$f_s = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial x^2}\right]$$

（2）单位长度上的惯性力

$$f_I = -\bar{m}\left(\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_g(t)}{\partial t^2}\right)$$

（3）单位长度上的外阻尼力

$$f_D = -\beta\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

式中 E 是弹性模量；I 是截面抗弯惯性矩；$\bar{m}$ 是单位长度的质量 $\bar{m} = \overline{W}/g$；g 是重力加速度 = 981 厘米/秒^2 = 981 伽；β 是阻尼系数。负号表示弹性力、惯性力、阻尼力分别与挠度 $y(x,t)$ 及其绝对加速度 $\partial^2 y(x,t)/\partial t^2 + \partial^2 y_g(t)/\partial t^2$ 和相对速度 $\partial y(x,t)/\partial t$ 的方向相反。

按照一般教科书中所说的达朗贝原理，这三种力应保持平衡，即可得如下的运动方程：

$$f_S + f_D + f_I = 0$$

或

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial x^2}\right] + \beta\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial t} + \bar{m}\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial t^2} = -\bar{m}\frac{\partial^2 y_g(t)}{\partial t^2} \qquad (1—3)$$

上式是一个偏微分方程，它的右边项表示地震时地面加速度 $\partial^2 y_g(t)/\partial t^2$ 引起结构振动的外因。图 1—4 表示一个实际的地震地面加速度时程曲线。

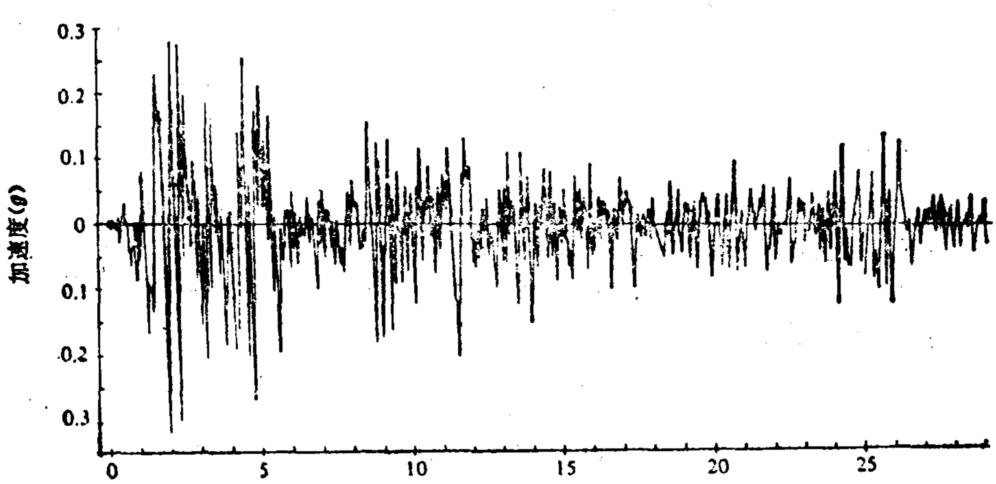


图 1—4　埃尔森特罗地震水平加速度（北-南，1940）时程曲线

如果引起振动的外因是其他动力荷载 $p(x,t)$，则式 (1—3) 的右边项为 $p(x,t)$。

1-3-2　线性振动和非线性振动

图 1—5 略示地震时图 1—3a 所示烟囱顶端位移 $y(l,\ t)$ 可能出现的时程曲线。地震时位

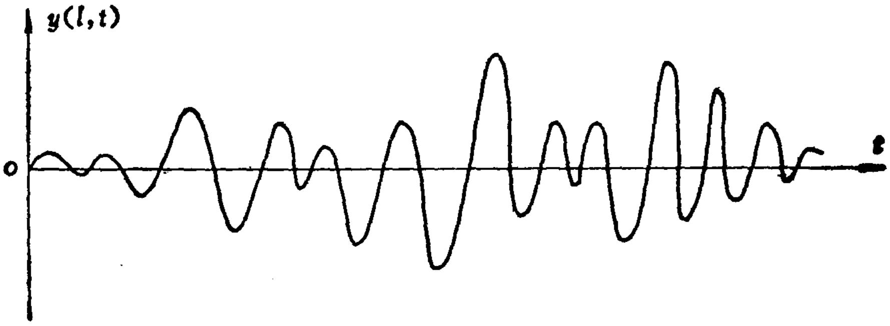


图 1—5 地震时挠曲振动时程曲线示意

移振幅总是由小到大，然后又逐渐衰减。

在位移振幅微小时，结构的弹性模量基本不变，混凝土不出现裂缝，于是结构的所有截面刚度 EI 保持基本不变，阻尼系数 β 也可看成保持不变。这种小振幅振动叫做线性振动，相应的运动方程（1—3）是线性的。对于线性振动，迭加原理适用。因此，为了适应计算简便的要求，可以把地震引起的振动分解成一个或几个主要振型分量来分别处理（关于振型，见后），然后再把各别结果迭加起来。这就是通常所谓的振型分析法。应用振型分析法所得的运动方程是一组相互解耦的二阶常微分方程组，其中每一个方程与单自由度体系的振动方程相似。所以，从这里可以看到，详尽地研究线性单自由度体系振动问题的必要性和重要性，是有它充分理由的。

在工程结构抗震设计中，为了经济的目的，对于预期的强震，容许在结构局部出现不太影响使用和易于修复的塑性变形、裂缝和损伤。换言之，容许出现大振幅位移的弹塑性非线性振动。这时，迭加原理失效，不能采用上述的振型分析法。一般解决的办法是把振动过程分成一连串很短的时间间隔 Δt，在每个 Δt 时间内当作线性振动来处理，这就是所谓逐步积分法。到目前为止，已有很多人研究这个问题，发表了大量的文献。以后将用一定的篇幅来介绍逐步积分法。

1-3-3 结构的振动特性

结构受到动力干扰产生振动之后，不会立即静止下来。例如图 1—3a 所示的烟囱，如果偶然被撞了一下，就会振动一段时间。这个振动，特别是在后面的阶段，叫做固有振动或自由振动，因为此时并无外加的动力作用，即式（1—3）的右边项为零，它叫齐次方程。自由振动可从解齐次方程求出。

小振幅的自由振动是线性振动分析的基础。它可表达如下：

$$y(x,t)=v(x)f(t) \tag{1—4}$$

其中
$$f(t)=e^{-\xi\omega t}[C_1\cos\omega_d t+C_2\sin\omega_d t]$$

式中：$\xi=\beta/\beta_{cr}$ 叫做阻尼比；

β_{cr} 叫做临界阻尼；

$\omega_d=\omega\sqrt{1-\xi^2}$ 叫做有阻尼自振圆频率；

$T_d=2\pi/\omega_d$ 叫做有阻尼自振周期；

$\sqrt{C_1^2+C_2^2}=A$ 叫做 $f(t)$ 的幅值。

* 在本书中阻尼系数的符号有时为 β 或 c，请读者注意，再版时统一改正。

式 (1—4) 表示自由振动假定由其振幅按 $f(t)$ 随时间变化的不变的形状 $v(x)$ 组成。

图 1—3a 所示的烟囱有无限多个自振频率。例如在常截面的情况下，如果假定它的底脚当作完全箝固，那么它的无阻尼自振圆频率 ω 为

$$\omega_n = \alpha_n^2 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} \tag{1—5}$$

其中

n	1	2	3	…
α_n	1.875	4.694	7.855	…

$n=1$ 时 ω_1 最小，叫做基频。

式 (1—4) 中的 $v(x)$ 表示自振挠曲线的形状，叫做振型。各个自振频率所对应的振型是不同的。图 1—6 略示 $n=1, 2, 3$ 的振型。

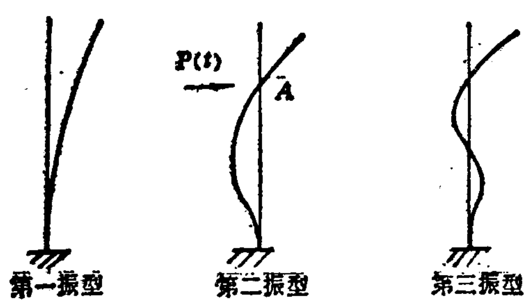


图 1—6　烟囱的水平挠曲固有振型

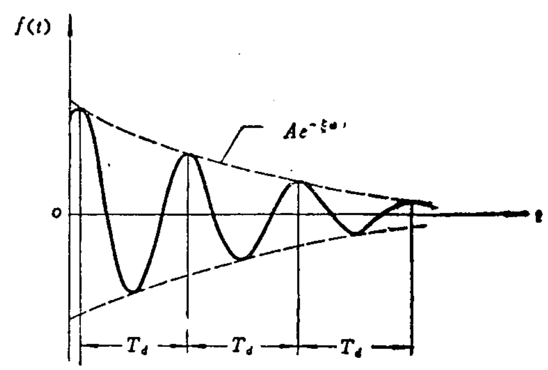


图 1—7

时间函数 $f(t)$ 的图形见图1—7。它的幅值按照 $Ae^{-\xi\omega t}$ 逐渐衰减，ω 越大，衰减越快，所以高频的自振比低频的衰减得快些。其次，阻尼比 ξ 越大，衰减也越快。实际工程结构的阻尼比 $\xi=0.01\sim0.05$ 左右，因此阻尼对结构自振频率的影响极小，即 $\omega_d=\omega$。但是地基土的阻尼比 ξ 可能要比上述的大许多。

对于大振幅的情况，严格说不存在上面所述的固定的自振频率和振型，因为在自振过程中结构的刚度甚至结构体系随着振幅的增减而不断变化着。

结构物的某个自振周期与地震波（或外加的动力荷载）的主要周期越接近，相应振型接受到的地震力（或外加动力荷载）的影响越大，阻尼比 ξ 越小，响应也越大。但是，如果外加动力荷载 $P(t)$ 作用在那个振型的节点上时（比如说当 $P(t)$ 作用在图 1—6 中所示的第二振型节点 A 处时），那么 $P(t)$ 不会激发起该振型的振动。因此，分析和认识结构物的自振周期、振型和阻尼比这些结构本身的振动特征有着重要的意义。

§ 1-4　运动方程的建立及其求解方法

如前所述，确定性的结构动力分析问题首先是，在给定的荷载-时间历程情况下，求出结构位移-时程关系。在多数情况下，有限自由度的近似分析可提供足够的精度。于是，问

题就转化成为确定所选定的独立位移变量与时间的历程关系。在数学上讲，就是建立结构的运动方程。运动方程的建立也许是整个分析过程中最重要的，有时也许是最困难的方面。由于运动方程是通过力学（矢量力学或分析力学）原理和应变-位移、应力-应变等关系建立起来的，因此在下一章里我们将简要地介绍一下经典力学中的基本概念和基本原理，为学习本课程提供一基础。

运动方程一旦建立以后，还得要去求解，动力问题才算解决。在目前，求解的方法很多，图(1—8)表示解法的一个概貌。

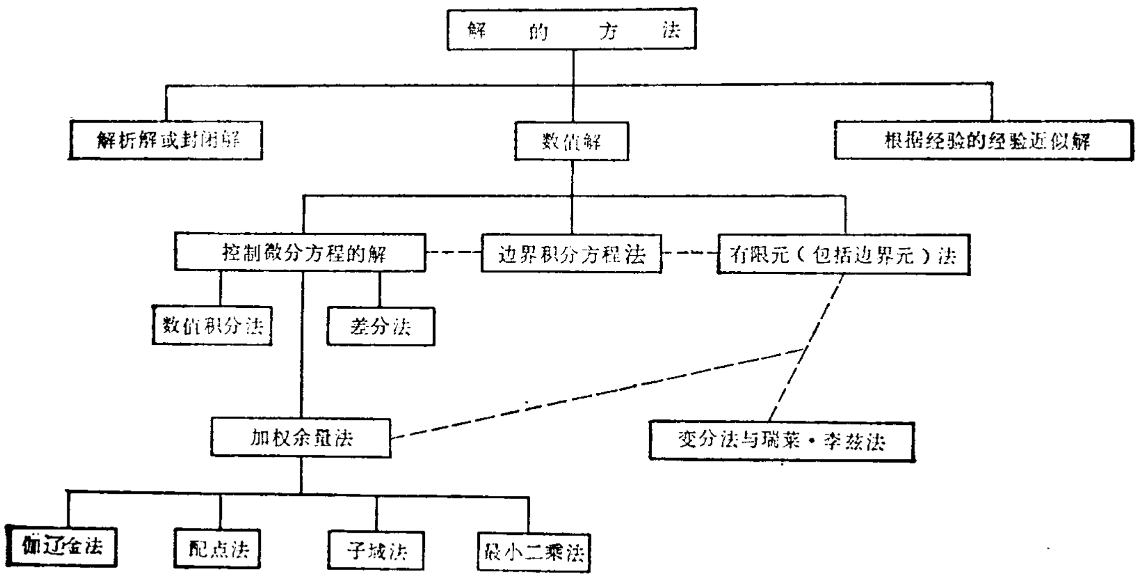


图 1—8 各种解法示意（取自 [6]）

本 章 参 考 文 献

1. 李国豪主编，工程结构抗震动力学，上海科学技术出版社，1980年。
2. R. W. 克拉夫，J. 彭津，结构动力学，科学出版社，1981年，王光远等译。
3. L. MEIROVITCH, Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, 1975.
4. C. A. BREBBIA etl.; Vibrations of Engineering Structures, Computational Mechanics Ltd., Southampton, U. K., 1976.
5. R. R. CRAIG, Jr.; Structural Dynamics, John Wiley & Sons, 1981.
6. C. S. DESAI, J. T. CHRISTIAN; Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill, 1977.