矢量分析与数学物理方法（修订本）

湖南科学技术出版社

盛正华　马元鹏　编

矢量分析与数学物理方法

●盛正华　马元鹏　编

●湖南科学技术出版社

湘新登字004号

矢量分析与数学物理方法

（修订本）

责任编辑：陈一心

*

湖南科学技术出版社出版发行

（长沙市展览馆路3号）

湖南省新华书店经销　常德滨湖印刷厂印刷

*

1982年6月第1版　1991年9月第2版第3次印刷

开本：850×1168毫米　1/32　印张：8　字数：206,000

印数：18,201—21,500

ISBN 7－5357－0906－0

0·90　　定价：3.70元

JY1/95116

再版前言

这本书是作为师范院校物理专业和中学物理教师进修的教材编写的，于1982年发行以来，受到部分高等院校和教育学院的重视，后虽续印一次，仍感供不应求。早几年编者较忙，没有精力修订此书。近得兰州大学马元鹏先生热情协作，由我俩共同修订再版。新版保持了原来较为精简扼要和联系物理学实际的特点，删改和更新了少数内容，适当补充了一些例题和习题，并附有习题答案。

原书在编写过程中，得到中国科技大学钱临照先生、南京大学梁昆淼先生、北京大学吴崇试先生的指点和支持，出版后承兰州大学戴安英、天津大学沈继芬、北方交通大学周盛芳等诸位先生提出宝贵意见，在此一并致谢。

编　者

1990年8月

目　　录

第一章　矢 量 分 析

本章介绍矢值函数的微积分与场论的基础知识，认定读者已经掌握了矢量代数和微积分的基本知识。

§1—1　一元矢值函数的微分和积分

（一）　矢值函数

在矢量代数中，我们学过模和方向都保持不变的矢量，称为常矢量（零矢量的模等于零，方向为任意，是一个特殊的常矢量）。在物理学中，我们将遇到模和方向或者其中之一发生变化的矢量，例如质点作变速直线运动时，其速度是模不断变化的矢量；质点作匀速曲线运动时，其速度是方向不断变化的矢量；如果质点作变速曲线运动，其速度则是模和方向都在变化的矢量。上述这种模和方向或者其中之一发生变化的矢量称为变矢量。

为了表示变矢量与某个标量的关系，引入矢值函数的概念，定义如下：如果对于某种标量 t 在其变域内的每一个取值，都有确定的矢量 $\mathbf{a}$ 与它对应，便称矢量 $\mathbf{a}$ 为自变量 t 的矢值函数，记为

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(t). \tag{1.1}$$

矢值函数的例子在物理学中有很多，例如运动质点的位移 $\mathbf{S}$

是时间 t 的函数；质点作变速运动时，速度$\mathbf{U}$是时间 t 的函数；沿同一直线考察流体的稳定流动时，流速$\mathbf{U}$是这条直线上的点的坐标 x 的函数……

以上是一元矢值函数，如果对于两个（或多个）独立标量 x、y 在其变域内的每一组取值，都有确定的矢量$\mathbf{a}$与它对应，便称矢量$\mathbf{a}$为自变量 x，y（或 x，y，z…）的多元矢值函数，记为

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(x,\ y). \tag{1.2}$$

沿一同平面考察流体的稳定流动时，流速$\mathbf{U}$是这个平面上的点的坐标 x，y 的二元函数；在空间区域考察稳定流动时，流速$\mathbf{U}$是该区域里的点的坐标 x，y，z 的函数；读者所熟悉的稳定电场的电场强度和稳定磁场的磁感强度，一般是空间坐标的三元矢值函数；如果流动是非稳的或者电磁场是随时间变化的，那么表征它们的矢量将是坐标 x，y，z 和时间 t 的四元矢值函数。本节主要讨论一元矢值函数的微分与积分。

设矢值函数$\mathbf{a}(t)$在直角坐标 x 轴、y 轴、z 轴上的投影分别为$a_1(t)$，$a_2(t)$，$a_3(t)$，则

$$\mathbf{a}(t)=a_1(t)\mathbf{i}+a_2(t)\mathbf{j}+a_3(t)\mathbf{k}, \tag{1.3}$$

$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 分别为沿 x 轴、y 轴、z 轴方向的单位矢量。$a_1(t)$、$a_2(t)$、$a_3(t)$为自变量 t 的标值函数。

矢值函数的极限与标值函数的极限有类似的定义。以一元矢值函数$\mathbf{a}(t)$为例，设$\mathbf{a}(t)$在$t=t_0$的邻域内有定义，$\mathbf{a}_0$为一常矢量；如果对于任意给定的小正数ε，总存在正数δ，使得适合于$|t-t_0|<\delta$的一切 t 所对应的$\mathbf{a}(t)$都满足

$$|\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}_0|<\varepsilon,$$

便称$\mathbf{a}_0$为$\mathbf{a}(t)$在$t\to t_0$的极限，记为

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{a}(t)=\mathbf{a}_0. \tag{1.4}$$

由于极限的定义完全类似，因此矢值函数有完全类似于标值函数的极限运算法则，不必一一列举。对（1.3）式取极限，运用这些运算法则可得

$$\lim_{t\to t0} \mathbf{a}(t) = \lim_{t\to t0} a_1(t)\,\mathbf{i} + \lim_{t\to t0} a_2(t)\,\mathbf{j} + \lim_{t\to t0} a_3(t)\,\mathbf{k} \tag{1.5}$$

矢值函数的连续也与标值函数的连续有类似的定义。设矢值函数 $\mathbf{a}(t)$ 在 t_0 及其邻域内有定义，且 $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t_0)$，便称 $\mathbf{a}(t)$ 在点 t_0 连续。如果 $\mathbf{a}(t)$ 在 t 的某个区间上各点都连续，便称 $\mathbf{a}(t)$ 在这个区间上连续。

（二） 一元矢值函数的微商

物理学往往需要研究矢值函数的变化率，例如加速度就是速度对时间的变化率。与标值函数的微商类似，矢值函数的微商是表示该变矢量对自变量的变化率的。设有矢值函数 $\mathbf{a}(t)$，当 t 有增量 Δt 时，$\mathbf{a}(t)$ 连续地变为 $\mathbf{a}(t+\Delta t)$。将这两个矢量的起点汇到一处，以资比较，便得到图 1—1，图中，

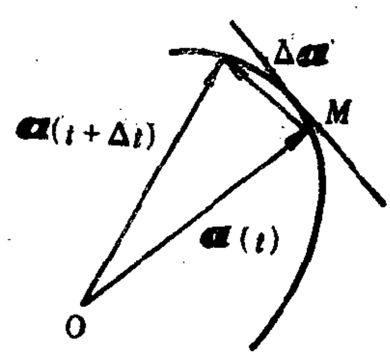

图 1—1

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)$$

称为 $\mathbf{a}(t)$ 的增量。如果 $\Delta \mathbf{a}/\Delta t$ 在 $\Delta t\to 0$ 的极限存在，便称这个极限为 $\mathbf{a}(t)$ 在点 t 的微商，记为 $d\mathbf{a}/dt$ 或 $\mathbf{a}'(t)$。

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} \tag{1.6}$$

由于

$$\mathbf{a}(t+\Delta t)=a_1(t+\Delta t)\mathbf{i}+a_2(t+\Delta t)\mathbf{j}+a_3(t+\Delta t)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a}(t)=a_1(t)\mathbf{i}+a_2(t)\mathbf{j}+a_3(t)\mathbf{k},$$

以上两式相减，将其差除以Δt，然后令$\Delta t\to 0$，取极限得到

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\frac{da_1}{dt}\mathbf{i}+\frac{da_2}{dt}\mathbf{j}+\frac{da_3}{dt}\mathbf{k} \tag{1.7}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{da_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{da_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{da_3}{dt}\right)^2} \tag{1.8}$$

矢值函数的微商也是矢量。从图1—1可以看出，它沿图中$\mathbf{a}(t)$的终点所经历的曲线在点M的切线，指向t增大时$\mathbf{a}(t)$的终点所移动的那一方，它的模由（1.8）式确定。

关于矢值函数的微商有如下一些基本公式：

$$\frac{d}{dt}\mathbf{k}=0 \qquad (\mathbf{k}\text{为常矢量}), \tag{1.9}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})=\frac{d\mathbf{a}}{dt}\pm\frac{d\mathbf{b}}{dt}, \tag{1.10}$$

$$\frac{d}{dt}(c\mathbf{a})=c\frac{d\mathbf{a}}{dt} \qquad (c\text{为常数}) \tag{1.11}$$

$$\frac{d}{dt}(u\mathbf{a})=u\frac{d\mathbf{a}}{dt}+\frac{du}{dt}\mathbf{a} \qquad (u\text{为}t\text{的标值函数}) \tag{1.12}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt}+\frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot\mathbf{b}, \tag{1.13}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt}+\frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b}. \tag{1.14}$$

若$\mathbf{a}=\mathbf{a}(u)$，$u=u(t)$，则

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\frac{d\mathbf{a}}{du}\frac{du}{dt}. \tag{1.15}$$

上列公式的证明与标值函数中之与对应的微商公式的证明相类似，例如公式(1.14)可以这样证明：

$$\Delta(a\times b)=(a+\Delta a)\times(b+\Delta b)-a\times b$$
$$=a\times\Delta b+\Delta a\times b+\Delta a\times\Delta b,$$

除以Δt，令$\Delta t\to 0$，取极限可得

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(a\times b)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(a\times\frac{\Delta b}{\Delta t}\right)+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta a}{\Delta t}\times b\right),$$

$$\frac{d}{dt}(a\times b)=a\times\frac{db}{dt}+\frac{da}{dt}\times b,$$

上列公式也可以借助于（1.7）式来证明，即写出被导函数的分量表示式，然后计算它们的微商，这样的例证留给读者。

（三）一元矢值函数的微分

当自变量 t 有增量Δt时，矢值函数$a(t)$有相应的增量Δa，

$$\Delta a=\Delta a_1 i+\Delta a_2 j+\Delta a_3 k,$$

Δa_1、Δa_2、Δa_3的线性主部分别由da_1、da_2、da_3表示。矢值函数$a(t)$的微分da定义为

$$da=da_1 i+da_2 j+da_3 k, \tag{1.16}$$

显然，

$$da=\frac{da}{dt}dt \tag{1.17}$$

由上式可知，矢值函数的微分具有与微商类似的基本运算公式，例如

$d(a\pm b)=da\pm db$，

$d(ca)=cda$　　　（c为常数），

$d(ua)=uda+dua$（u为t的标值函数），等等。

（四）一元矢值函数的积分

与标值函数的不定积分一样，矢值函数的不定积分是微商的逆运算。若$db/dt=a$，便称$b(t)$为$a(t)$的一个原函数。定

义 $\mathbf{a}(t)$的原函数的全体为 $\mathbf{a}(t)$的不定积分，记为$\int \mathbf{a}(t)dt$。由矢值函数求微商的性质可知，微商等于同一矢值函数的两个原函数只有一常矢量之差，因此得到：若$d\mathbf{b}/dt=\mathbf{a}$，则$\int \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{b}(t)+\mathbf{c}$，$\mathbf{c}$为任意常矢量。

由于矢值函数的不定积分与标值函数的不定积分有完全类似的定义，因此两者具有完全类似的运算性质，例如有限个矢值函数的和的积分等于各矢值函数的积分的和，被积函数中不为零的常因子可以移到积分号以外，等等。

由（1.3）式和上述性质可知，矢值函数的不定积分可归结为三个标值函数的不定积分，即

$$\int \mathbf{a}\,dt=\left(\int a_1dt\right)\mathbf{i}+\left(\int a_2dt\right)\mathbf{j}+\left(\int a_3dt\right)\mathbf{k}. \quad (1.18)$$

现在介绍矢值函数的定积分。设矢值函数 $\mathbf{a}(t)$在区间$[T_1, T_2]$上连续，定义 $\mathbf{a}(t)$在$[T_1, T_2]$上的定积分为

$$\int_{T_1}^{T_2}\mathbf{a}(t)dt=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta t\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}(\tau_i)\Delta t_i, \quad (1.19)$$

其中$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T_2$，$\tau_i$为$[t_{i-1}, t_i]$上一点，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$。

将（1.3）式代入上式右边，运用标值函数的定积分定义可得

$$\int_{T_1}^{T_2}\mathbf{a}\,dt=\left(\int_{T_1}^{T_2}a_1dt\right)\mathbf{i}+\left(\int_{T_1}^{T_2}a_2dt\right)\mathbf{j}+\left(\int_{T_1}^{T_2}a_3dt\right)\mathbf{k}. \quad (1.20)$$

设 $\mathbf{b}(t)$是 $\mathbf{a}(t)$在$[T_1, T_2]$上的原函数，由（1.18）可知，b_1、b_2、b_3将分别是a_1、a_2、a_3在$[T_1, T_2]$上的原函数，于是对上式右边运用牛顿—莱比尼兹公式可得

$$\int_{T_1}^{T_2}\mathbf{a}\,dt=[b_1(T_2)-b_1(T_1)]\mathbf{i}+[b_2(T_2)-b_2(T_1)]\mathbf{j}$$

$$+[b_3(T_2)-b_3(T_1)]\mathbf{k},$$

即

$$\int_{T_1}^{T_2}\mathbf{a}\,dt=\mathbf{b}(T_2)-\mathbf{b}(T_1). \tag{1.21}$$

（五） 多元矢值函数的微商

多元矢值函数对某个自变量的偏微商表示矢值函数对该自变量的变化率（其余的自变量保持不变），以三元矢值函数 $\mathbf{a}(x, y, z)$ 为例，

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{a}(x+\Delta x, y, z)-\mathbf{a}(x, y, z)}{\Delta x}, \tag{1.22}$$

以 $\mathbf{a}(x, y, z)=a_1(x, y, z)\mathbf{i}+a_2(x, y, z)\mathbf{j}+a_3(x, y, z)\mathbf{k}$ 代入上式即可得出

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}=\frac{\partial a_1}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial a_2}{\partial x}\mathbf{j}+\frac{\partial a_3}{\partial x}\mathbf{k}. \tag{1.23}$$

类似地，

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}=\frac{\partial a_1}{\partial y}\mathbf{i}+\frac{\partial a_2}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial a_3}{\partial y}\mathbf{k}, \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}=\frac{\partial a_1}{\partial z}\mathbf{i}+\frac{\partial a_2}{\partial z}\mathbf{j}+\frac{\partial a_3}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{1.25}$$

例1 若 $|\mathbf{a}|\neq 0$，证明 $\mathbf{a}$ 的模保持不变的充要条件是 $\mathbf{a}'(t)$ 与 $\mathbf{a}(t)$ 垂直。

证 若 $|\mathbf{a}|=$ 常数，则 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2=$ 常数，从而 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}'=0$，即 $\mathbf{a}'$ 与 $\mathbf{a}$ 垂直。

反之，若 $\mathbf{a}'$ 与 $\mathbf{a}$ 垂直，则 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}'=0$，从而 $\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})=0$，即 $\frac{d}{dt}|\mathbf{a}|^2=0$，即 $|\mathbf{a}|$ 为常数。

把 $\mathbf{a}$ 看作质点运动的速度，则 $\mathbf{a}'$ 为加速度，当质点作匀速曲线运动时，$|\mathbf{a}|=$ 常数，因而加速度与速度垂直。这在力学中称

为只有法向加速度。

例 2 作用线通过某一公共点的诸力称为有心力，这个公共点叫作力中心，例如力学中把太阳对行星的引力视为有心力，太阳就是力中心。证明只受有心力作用的质点对力中心的角动量保持不变。

证 以m表质点的质量，$\mathbf{v}$ 表质点运动的速度，$\mathbf{r}$ 表力中心到质点的矢径，质点对力中心的角动量为

$$\mathbf{G}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v},$$

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt}=\mathbf{r}\times\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\mathbf{v},$$

由牛顿运动定律，$d(m\mathbf{v})/dt$ 等于质点所受的力，它与 $\mathbf{r}$ 共线，故上式右端第一项等于零；又因 $d\mathbf{r}/dt=\mathbf{v}$，故第二项也是零，于是$d\mathbf{G}/dt=0$，$\mathbf{G}$为常矢量。

行星对太阳的角动量保持不变，这个事实早在16世纪就被天文学家观测到，17世纪初经开普勒加以总结，成为著名的开普勒第二定律。

例 3 由牛顿运动定律推出动量定理。

解 牛顿第二定律表明：

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F},$$

m为质点的质量，$\mathbf{v}$为质点运动的速度，t为时间变量，$\mathbf{F}$为质点所受的力。在时间区间$[t_1,\ t_2]$内对上式积分，得到

$$m\mathbf{v}(t_2)-m\mathbf{v}(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt,$$

上式左端为这段时间内动量的增量，右端为这段时间内力的冲量。动量的增量等于力的冲量，这就是动量定理。

§1—2 标量场的梯度

在科学技术中，往往要考究某种物理量在空间的分布。为表

征这种分布，数学上引进了场的概念。如果某种物理量在全部空间或局部空间的每一点都有一个确定的值，就称在这个区域里定义了该物理量的场。数学上的场是所有这些物理量的场的抽象；所有能够用标量表示的场叫做标量场，所有能够用矢量表示的场叫做矢量场。例如室内各点的温度不一致，温度T(x，y，z)便是一种标量场。物理上的标量场常见的有电势和能量密度等等。稳流的流速 **u**(x，y，z)是一种矢量场，电场强度、磁感强度都是矢量场。物理上的矢量场还有引力场、电流密度、能流密度等等。

不论标量场或矢量场，除了是位置的函数以外还与时间有关的叫非稳场，与时间无关的叫稳定场。变化电磁场的电场强度**E**(x，y，z，t)是非稳场，而静电场的电场强度**E**(x，y，z)则是稳定场。本章只讨论稳定场。标量场是某个区域里的点的标值函数，在直角坐标系中用u(x，y，z)表示。矢量场是某区域里点的矢值函数，在直角坐标系中用**a**(x，y，z)表示。为了简明，认定这些函数对讨论中所涉及的求微商阶次都是可导的。

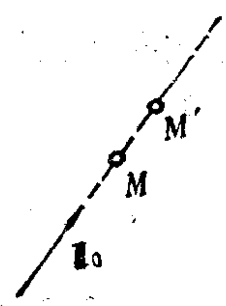

图1—2

（一） 标量场的方向导数

标量场的方向导数表示标量场沿某个既定方向的变化率。如图1—2，单位矢量$\mathbf{l}_0$表示空间的既定方向，点M表示这个方向线上任一点，M′为同一方向线上邻近M的一点，并且从M到M′顺着$\mathbf{l}_0$的方向。设M与M′的距离为Δl。标量场u(x,y,z)在点M沿这个方向的导数定义为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{u(M')-u(M)}{\Delta l},\tag{1.26}$$

其中

$$u(M)=u(x,\ y,\ z),$$

$$u(M') = u(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$$
$$= u(x,\ y,\ z) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \omega\,\Delta l,$$

其中ω在$\Delta l \to 0$时为零。将上列两式代入（1.26），并注意$\Delta x/\Delta l$、$\Delta y/\Delta l$、$\Delta z/\Delta l$分别为l_0的三个方向余弦，便得到

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta l} + \omega\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (1.27)$$

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$为l_0的方向余弦。

如果取x轴的方向作为既定方向，则$\cos\alpha = 1$，$\cos\beta = \cos\gamma = 0$，从而$\partial u/\partial l = \partial u/\partial x$。可见$u(x,\ y,\ z)$沿$x$轴方向的方向导数就是$u$对$x$的偏导数。类似的结论也适用于$y$轴和$z$轴。

（二） 标量场的梯度

人们爬山，从山坡上一点出发，可以沿各个方向向上爬，其中必有一个方向最陡。在标量场所定义的区域里，从一点出发，有无穷多个方向。标量场在这一点沿各个方向的方向导数可能各不相同，其中有没有一个取值最大的呢？如果有，其大小如何？对应的方向如何？确定了这个最大的方向导数以后，能不能方便地求出沿其他方向的导数？为此，我们来分析（1.27）式。式中$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是l_0的方向余弦，也是单位矢量l_0的三个分量。若把其余三个因式$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial z}$视为一个矢量的分量，即命

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{G},$$

则（1.27）成为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathbf{G}\cdot\mathbf{l}_0=|\mathbf{G}|\cos\theta, \qquad (1.28)$$

θ为$\mathbf{G}$与$\mathbf{l}_0$的夹角。显然，上式回答了上面提出的几个问题：在标量场u的一个给定点处，$\mathbf{G}$是一个可以确定的矢量；沿这个矢量的方向，u有最大的方向导数$|\mathbf{G}|$；在确定了$\mathbf{G}$以后，就可按（1.28）式方便地求出u沿任一方向的导数。我们定义标量场u在某一点的梯度为一矢量，它的方向为u在该点具有最大方向导数的方向上，它的模等于u在该点的最大方向导数。把u的梯度记为gradu。在直角坐标系中，

$$\mathrm{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}, \qquad (1.29)$$

上面我们是针对标量场的某一点来说的，对于被研究区域的各点来说，最大方向导数的模和对应的方向可能各不相同，即同一标量场中各点的梯度可能各不相同。这表明gradu本身构成一个矢量场。

关于梯度，有两点值得着重指出：

1°. 从（1.29）看出，在某点的gradu的三个分量正好是标量场的等值面$u(x, y, z)=C$在该点的法线的三个方向数，可见标量场的梯度沿场的等值面的法线方向，且指向场增大的一方。

2°. （1.28）表明，gradu在任意方向上的投影等于u在这个方向上的导数，因此只要求出了u在三个正交方向上的导数，就确定了梯度。（1.29）就是用u在x、y、z轴方向的导数来确定gradu的。以后在球坐标系和圆柱坐标系中，对于空间每一点，将用另外三个正交方向的导数来确定梯度。

哈密顿引入劈形算符，后人称为哈密顿算符，在直角坐标系中，该算符是

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$