測度論

PAUL R. HALMOS

科学出版社

測度論

Paul R. Halmos 著

王 建 华 譯

科 学 出 版 社

1 9 8 0

内容简介

作者在本书中对测度论在近世数学分析中最有用的部分作了统一的处理.

全书共分十二章. 前八章包含抽象空间中测度的一般理论,对于集、测度、测度的扩张、可测函数、积分、变换等概念作了系统的阐述. 第九章讨论测度论在概率论中的应用. 最后三章则研究局部紧空间和局部紧群中的测度.

本书内容的编排，使初学者和数学专家都能从中获得益处. 阅读前面七章,只须具备初等代数和数学分析的基础知识.

PAUL R. HALMOS

MEASURE THEORY

NEW YORK

1950

测 度 论

Paul R. Halmos 著

王 建 华 译

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1958年 1 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1980 年11月第四次印刷 印张：10 1/4

印数：6,001—8,220 字数：250,000

统一书号：13031・1369

本社书号：1895・13—1

定价： 1.70 元

序

本書的主要目的是要将近年来测度論在近世分析中最有用的部分加以統一的处理。如果作者的意圖幸而得以完成，則这本書一方面可以作为敎科書，同时也可以供具备較深修养的数学家參考。

在这本書里面，我尽量避免引用新的不常見的术語和記号。有几处所用的名称与测度論文献中通常采用的有所不同，我的目的是要使它們和数学的其他部門中的用法取得一致。例如，我們称某种集类为“絡”或“环”，从代数学的眼光来看是有相当充分的理由的，比豪司道夫采用“环”或“体”的理由更为有力。

讀本書的最初七章，只須具备初等代数和数学分析的基础知識就够了。为了讀者的方便起見，在 §0 中詳細地列出了讀本書各章所需要的知識。§0 中引用的术語和記号，有些在以后（前七章中）才給出它們的定义，因此初学者在第一次接触到 §0 时絕沒有必要产生顧虑，認为自己連閱讀預备知識的能力都未曾具备。

差不多在每一节的末尾，总有一些習題，有些以問題的方式提出，但大部分是作为肯定的命題提出而希望讀者能加以証明的。应該将这些習題看作构成本書的有机部分；在这些習題里，不但有了解理論不可少的正例和反例，也有新概念的定义，偶尔更有在不久以前还是研究对象的完整理論。

看起来好像有点不合理，在本書中，許多基本概念都詳細地加以闡述，而在習題里，有些相当細致和深奥的东西（例如拓扑空間、超限数、巴拿赫空間等）却假設为已知；事实上，本書中的材料是按照这样的方式安排的：如果初学者在一个習題里遇到了在本書中

未曾定义的术語时，他尽可以放过这个習題，而不致于影响到前后內容的連貫性。然而对于学識較为丰富的讀者来說，他也許会因为在这些習題里發現測度論与数学的其他各支之間的联系而感到滿意，这正是我們給出这类習題所希望达到的目的。

在全書中，符号"▌"用来表示一个定理的証明完畢。

在本書之末，列有"参考文献索引"和"参考文献"两个簡表。这些表不一定完全。它們的目的，有时是为了便于讀者查閱我們假定是已知的事实；在極个别的場合下，当我們所討論的問題的历史不很为人熟知时，是为了指出最初提出这个問題的文献；最主要的，是为讀者指出深入研究的方向。

在書中如果要引用或参考前面的習題时，我們用簡单的記号来代替，例如 12.4 表示 §12 中的習題 (4)。

目 录

§0. 預备知識

要理解本書前面七章，只須具备初等代数和数学分析的基础知識就够了。特别是，我們假定讀者熟知下面(1) 至 (7)中所列出的概念和結果。

(1) 数学归納法；代数运算的交換律和結合律；綫性組合；等价关系以及将集分解成等价类。

(2) 可列集；可列个可列集的併集是可列集。

(3) 实数；数直綫的初等度量性質和拓扑性質(例如：有理数集是处处稠密的，每一个开集可以表为可列个不相交开区間的併集)；海尼-波雷耳定理。

(4) 函数的一般概念；特别是数列(就是以正整数集为定义域的函数)的概念；函数的和，积；函数与常数的乘积；函数的絕对値。

(5) 实数集与实値函数的上确界和下确界；实数列和实値函数列的極限，上極限，下極限。

(6) 符号 $+\infty$ 和 $-\infty$；它們和实数 x 間的代数关系：

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=\pm\infty;$$

$$x(\pm\infty)=(\pm\infty)x=\begin{cases}\pm\infty, & \text{若 } x>0,\\ 0, & \text{若 } x=0,\\ \mp\infty, & \text{若 } x<0;\end{cases}$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty,$$
$$(\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty;$$

$$\frac{x}{\pm\infty}=0;$$

$$-\infty<x<+\infty.$$

广义实数这个术語指的是实数或符号$+\infty$与$-\infty$二者之一。在数直綫上补入$+\infty$和$-\infty$两个符号，称为**扩張的数直綫**。

(7) 如果x和y是实数，則

$$x\cup y=\max\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|),$$

$$x\cap y=\min\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

类似地，如果f和g是实値函数，則$f\cup g$和$f\cap g$分别是由等式

$$(f\cup g)(x)=f(x)\cup g(x)$$

和

$$(f\cap g)(x)=f(x)\cap g(x)$$

确定的函数。实数列$\{x_n\}$的上确界和下确界分别記为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}x_n \qquad 和 \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}x_n.$$

按照这种記法，有

$$\limsup_n x_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}x_m$$

和

$$\liminf_n x_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}x_m.$$

在第八章中要用到度量空間的概念，度量空間的完备性，可分性，以及定义在度量空間上的函数的一致連續性概念。此外，在第八章中还要用到分析中稍微复杂一些的概念，例如单側連續性概念。

第九章最后一节需要用到齐霍諾夫关于乘积空間的緊性的定理(对于可列个因子，其中每一个因子是一个区間)。

一般說来，在每章中都将自由地运用以前各章的結論；唯一的例外是最后三章中并不需要用到第九章的內容。

在第十、十一和十二章里，我們将系統地运用点集拓扑和拓扑群論中的概念和結論。我們在下面列举出全部有关的定义和定理。这一篇附录不能作为拓扑学的教科書，乃是为了达到下面四个目的：(1)为专家指出，对于有关的概念和結論，我們需要那一种

表达的方式；(2)为初学者指出，在进入最后三章的閱讀以前，应該熟悉那些概念和結論；(3)說明某些未經普遍采用的术語的意义；(4)使讀者能够很快地查到他所需要的东西。

拓 扑 空 間

拓扑空間是指一个集 X 和它的某些子集所組成的一个类，这个类包含 0 和 X，并且封閉于有限交与任意併（不一定是有限或可列）两种运算；上述集类中的集称为 X 中的**开集**。設 E 是 X 的子集，如果存在开集的叙列 $\{U_n\}$ 使得 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$，則称 E 是一个 **G_δ-集**。由全体 G_δ-集組成的类对于有限併与可列交两种运算是封閉的。拓扑空間称为**离散的**，如果 X 的每一个子集都是开集，換一句話說，如果 X 的每一个单点子集是开集。集 E 称为**閉集**，如果 $X-E$ 是开集。由全体閉集組成的类包含 0 和 X，并且封閉于有限併与任意交的运算。X 的子集 E 的**內部** E^0 是指被 E 所包的最大开集；E 的**閉包** $\bar{E}$ 是指包含 E 的最小閉集。集的內部是开集，閉包是閉集。如果 E 是开集，則 $E^0=E$；如果 E 是閉集，則 $\bar{E}=E$. 集 E 的閉包是由一切具有下列性質的点 x 組成的：对于包含 x 的每一个开集 U，$E\cap U\neq 0$。如果 $\bar{E}=X$，則称集 E 在 X 中**稠密**。設 Y 是拓扑空間 X 的子集，如果 Y 中被称为开集的子集可由 X 中的一个开集与 Y 相交而得，則 Y 本身形成一个拓扑空間（X 的**子空間**）；Y 中的拓扑結构称为**相对拓扑**。包含 X 中的点 x [或 X 的子集 E] 的开集称为 x [或 E] 的**邻域**。設 $\mathbf{B}$ 是由开集組成的一个类，如果对于 X 中每一个 x，并对于 x 的每一个邻域 U，存在 $\mathbf{B}$ 中的集 B，使得 $x\in B\subset U$，則称 $\mathbf{B}$ 是一个**基**。数直綫的拓扑由下列条件确定：由全体开区間組成的类构成一个基。設有一个开集类，如果由它的元素的一切有限交所組成的类构成一个基，則称开集类为**子基**。如果空間 X 具有可列的基，則称 X 是**可分的**。可分空間的子空間是可分的。

設 E 是拓扑空間 X 的子集，如果开集类 $\mathbf{K}$ 能使 $E\subset\bigcup\mathbf{K}$，則称 $\mathbf{K}$ 是 E 的**开复盖**。如果 $\mathbf{K}$ 是 X 的子集 E 的开复盖，而 X 是可分的，則存在 $\mathbf{K}$ 的可列子类 $\{K_1, K_2, \cdots\}$ 使得这个子类也是 E 的开复盖。如果对于 X 的子集 E 的每一个开复盖 $\mathbf{K}$，存在 $\mathbf{K}$ 的有限子类 $\{K_1, \cdots, K_n\}$ 使得这个子类成为 E 的开复盖，則称 E 是**紧**的。設 $\mathbf{K}$ 是一个集类，如果 $\mathbf{K}$ 的任何有限子类具有非空的交集，則称 $\mathbf{K}$ 具有**有限交的性質**。空間 X 为紧的必要和充分条件是：每一个具有有限交性質的閉集类有一个非空的交集。設 E 是 X 中的集，若存在紧集叙列 $\{C_n\}$ 使得 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$，則称 E 是 **σ-紧的**。如果空間 X 中的每一个点具有閉包为紧集的邻域，則称 X 是**局部紧的**。設 E 是局部紧空間的子集，若存在紧集 C 使得 $E\subset C$，則称 E 是**有界的**。局部紧空間中全体有界开集組成的类是一个基。有界集的閉子集是紧集。設 E 是局部紧空間的子集，若存在紧集的叙列 $\{C_n\}$ 使得 $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$，則称 E 是 **σ-有界的**。对于每一个局部紧但并非紧的拓扑空間 X，存在紧空間 X^*，X^* 包含 X，并包含 X 以外的恰好一个点 x^*；我們說：X 由于点 x^* 而**紧化成为** X^*。X 中的开子集以及 X 中紧閉子集的余集（对于 X^*）构成 X^* 中的开集。

設 $\{X_i : i\in I\}$ 是一个拓扑空間类，这个类的**笛卡兒乘积空間** $X=\times\{X_i : i\in I\}$ 指的是定义在 I 上并具有下列性質的一切函数 x 所組成的集：对于 I 中每一个 i，$x(i)\in X_i$。对于 I 中任意固定的 i_0，以 E_{i_0} 表示 X_{i_0} 中任意一个开子集，而当 $i\neq i_0$ 时，則令 $E_i=X_i$；X 中的开集是由下列条件确定的：由一切形如 $\times\{E_i : i\in I\}$ 的集組成的类构成一个子基。定义在 X 上由等式 $\xi_i(x)=x(i)$ 确定的函数 ξ_i 是連續的。任何紧空間类的笛卡兒乘积空間是紧空間。

如果拓扑空間中任意两个不相同的点具有不相交的邻域，則称这个拓扑空間为**豪司道夫空間**。豪司道夫空間的任意两个不相交的紧子集具有不相交的邻域。豪司道夫空間的紧子集是閉集。

如果局部紧空間是豪司道夫空間或可分空間，則它的紧化空間也分別是豪司道夫空間或可分空間。定义在紧集上的实值連續函数是有界的。

設 X 是拓扑空間，我們用记号 $\mathscr{F}$（或 $\mathscr{F}(X)$）表示定义在 X 上并滿足下列条件的一切实值連續函数 f 所組成的类：对于 X 中任意的 $x, 0\leqslant f(x)\leqslant 1$。設 X 是豪司道夫空間，如果对于 X 中每一个点 y 并对于每一个不包含 y 的閉集 F，存在 $\mathscr{F}$ 中的函数 f，使得 $f(y)=0$ 并使得当 $x\in F$ 时 $f(x)=1$，則称 X 是**完全正則的**。局部紧豪司道夫空間是完全正則的。

設 X 是一个集，在 $X\times X$ 上定义一个实值函数 d（称为**距离**），滿足下列性質：

$$d(x,y)\geqslant 0,$$

$$d(x,y)=0, \quad \text{当而且只当 } x=y \text{ 时},$$

$$d(x,y)=d(y,x),$$

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y),$$

則称 X 是一个**度量空間**。設 E 和 F 是度量空間 X 的非空子集，則称 $d(E,F)=\inf\{d(x,y): x\in E, y\in F\}$ 为 E 和 F 之間的距离。如果 $F=\{x_0\}$ 是一个单点集，則将 $d(E,\{x_0\})$ 簡記为 $d(E,x_0)$。在度量空間 X 中子集 $E=\{x:d(x_0,x)<r_0\}$ 称为以 x_0 为中心，以 r_0 为半徑的**球体**，其中 x_0 是一个点，r_0 是一个正数。度量空間的拓扑由下列条件确定：由一切球体組成的类构成一个基。度量空間是完全正則的。度量空間中的閉集是 G_δ-集。要使得度量空間是可分的，必須而且只須，它包含一个稠密可列集。設 E 是度量空間的一个子集，并令 $f(x)=d(E,x)$，則 f 是一个連續函数，并且 $\overline{E}=\{x:f(x)=0\}$。如果 X 是数直綫，或有限条数直綫的笛卡兒乘积空間，則 X 是局部紧的可分豪司道夫空間；如果定义 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 間的距离为 $d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$，則 X

是一个度量空間。数直綫上的閉区間是紧集。

从拓扑空間 X 映入拓扑空間 Y 的变換 T 称为**連續**的，如果每一个开集的逆映像仍为开集，換一句話說，如果每一个閉集的逆映像仍为閉集。如果变換 T 将 X 中的任意开集映为 Y 中的开集，則称 T 是一个**开变換**。設 $\mathbf{B}$ 是 Y 中一个子基，則 T 为連續的必要和充分条件是：对于每一个 $B\in\mathbf{B}$，$T^{-1}(B)$ 是开集。設 T 是 X 在 Y 上的連續变換，并且 X 是紧的，則 Y 也是紧的。設 T 是 X 在 Y 上的一个一一連續变換，并且它的逆变換也是連續的，則称 T 是一个**同胚**。

实值連續函数項的一致收斂級数之和是連續的。如果 f 和 g 是实值連續函数，則 $f\cup g$ 和 $f\cap g$ 都是連續的。

拓 扑 群

在非空集 X 中定义一种滿足結合律的乘法如下：对于 X 中任意两个元素 a 和 b，方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 都可解，則称 X 是一个**群**。在每一个群 X 中，存在唯一的一个**单位元素** e，滿足下述关系：对于 X 中每一个 x，$ex=xe=x$。X 中每一个元素 x 有唯一的一个**逆元素** x^{-1}，滿足关系 $xx^{-1}=x^{-1}x=e$。設 Y 是 X 的非空子集，若对于 Y 中任意两个元素 x 和 y，有 $x^{-1}y\in Y$，則称 Y 是 X 的**子群**。若 E 是群 X 的任意子集，我們以 E^{-1} 表示由一切形如 x^{-1} 的元素組成的集，其中 $x\in E$；若 E 和 F 是群 X 的任意两个子集，以 EF 表示由一切形如 xy 的元素組成的集，其中 $x\in E$, $y\in F$。要使得群 X 的非空子集 Y 是一个子群，必須而且只須 $Y^{-1}Y\subset Y$。如果 $x\in X$，則将 $\{x\}E$ 和 $E\{x\}$ 分别簡記为 xE 和 Ex；xE 和 Ex 分别称为 E 的**左轉移**和**右轉移**。如果 Y 是群 X 的子群，則集 xY 和 Yx 分别称为 Y 的左和右**陪集**。設 Y 是群 X 的子群，如果对于 X 中每一个 x 有 $xY=Yx$，則称 Y 是 X 的**不变子群**（或**正規子群**）。設 Y 是 X 的不变子群，$\hat{X}$ 是由 Y 的一切陪集組成的类，在 $\hat{X}$

中定义一种乘法如下：对于 $\hat{X}$ 中任意两个元素 Y_1 和 Y_2，它們的乘积是集 Y_1Y_2，則 $\hat{X}$ 是一个群；这个群称为 X 对于 Y 的**因子群**，記为 X/Y。$\hat{X}$ 的单位元素 $\hat{e}$ 就是 Y。設 Y 是群 X 的不变子群，对于 X 中每一个 x，令 $\pi(x)$ 为包含 x 的 Y 的陪集，則称变换 π 是 X 在 $\hat{X}$ 上的**射影**。設 T 是群 X 在群 Y 内的一个变换，如果对于 X 中任意两个元素 x 和 y，有 $T(xy)=T(x)\,T(y)$，則称 T 是一个**同态**。群 X 在一个因子群 $\hat{X}$ 上的射影是一个同态。

設群 X 是一个豪司道夫空間，如果将 (x,y) 变为 $x^{-1}y$ 的变换（$X\times X$ 在 X 上）是連續的，則称 X 是一个**拓扑群**。設 $\mathbf{N}$ 是由拓扑群中包含单位元素 e 的开集組成的一个类，如果：

(1) 对于每一个异于 e 的 x，存在 $\mathbf{N}$ 中的集 U 使得 $x\notin U$，

(2) 对于 $\mathbf{N}$ 中任意两个集 U 和 V，存在 $\mathbf{N}$ 中的集 W 使得 $W\subset U\cap V$，

(3) 对于 $\mathbf{N}$ 中任意的集 U，存在 $\mathbf{N}$ 中的集 V 使得 $V^{-1}V\subset U$，

(4) 对于 $\mathbf{N}$ 中任意的集 U，并对于 X 中任意的元素 x，存在 $\mathbf{N}$ 中的集 V 使得 $V\subset xUx^{-1}$，

(5) 对于 $\mathbf{N}$ 中任意的集 U，并对于 U 中任意的元素 x，存在 $\mathbf{N}$ 中的集 V 使得 $Vx\subset U$，

則称 $\mathbf{N}$ 是一个**在点 e 处的基**。由 e 的一切邻域組成的类是一个在 e 处的基；反之，如果在任意一个群 X 中，$\mathbf{N}$ 是满足上述五个条件的集类，若取由 $\mathbf{N}$ 中之集的一切轉移組成的类作为一个基，則对于如此定义的拓扑結构而言，X 成为一个拓扑群。設 V 是 e 的一个邻域，如果 $V=V^{-1}$，則称 V 是**对称的**；由 e 的一切对称邻域組成的类是一个在 e 处的基。如果 $\mathbf{N}$ 是一个在 e 处的基，F 是 X 中任意一个閉集，則 $F=\bigcap\{UF: U\in\mathbf{N}\}$。

拓扑群 X 的子群[或不变子群]的閉包是 X 的子群[或不变子群]。設 Y 是拓扑群 X 的一个閉的不变子群，如果将群 $\hat{X}=X/Y$ 中具有下述性質的子集称为开集：它在变换 π 之下的逆映像是 X

中的开集，則 $\hat{X}$ 是一个拓扑群，并且 X 在 $\hat{X}$ 上的射影 π 是一个开的連續变換。

設 C 是一个紧集，U 是拓扑群 X 中的一个开集，并且 $C\subset U$，則存在 e 的邻域 V 使得 $VCV\subset U$。設 C 和 D 是两个不相交的紧集，則存在 e 的邻域 U 使得 UCU 和 UDU 不相交。設 C 和 D 是任意两个紧集，則 C^{-1} 和 CD 都是紧集。

設 E 是拓扑群 X 的子集，如果对于 e 的每一个邻域 U，存在有限集 $\{x_1, \cdots, x_n\}$（当 $E\neq 0$ 时可以假定这个集是 E 的一个子集）使得 $E\subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i U$，則称 E 是有界的；在 X 为局部紧的場合，这个定义与前面所述的局部紧空間中有界集的定义相符合。如果定义在 X 上的实值連續函数 f 能使 $N(f)=\{x: f(x)\neq 0\}$ 为有界集，則按照下述意义称 f 为一致連續的：对于每一个正数 ε，存在 e 的邻域 U 使当 $x_1x_2^{-1}\in U$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。

如果在拓扑群中，单位元素 e 具有有界邻域，則称拓扑群是局部有界的。对于每一个局部有界的拓扑群 X，存在一个局部紧的拓扑群 X^*，使得 X 成为 X^* 的一个稠密子群；X^* 称为 X 的增补，它在精确到一个同构的程度內是唯一确定的。局部紧群的任何閉子群和因子群是局部紧群。

第一章

集与类

§1. 集的包含关系

在这本書里面，集这一个名詞总是了解为給定的集的一个子集。除了特别指出用不同記号的地方以外，我們总是以 X 表示这个給定的集。X 的元素称为点；集 X 有时指的是空間，或整个空間。本章的目的是要对有关集論的一些基本概念加以解釋，并叙述一些在以后的章节里經常要用到的主要結論。

如果 x 是 X 中的一个点，E 是 X 的一个子集，我們用下面的記号表示 x 屬于 E（也就是說，x 是 E 中之点的一个）：

$$x \in E;$$

如果 x 不屬于 E，我們就用下面的記号来表示：

$$x \in' E.$$

因此，对于 X 中的每一个点 x，我們有

$$x \in X,$$

而对于 X 中任何一个点 x 都不能有

$$x \in' X.$$

如果 E 和 F 都是 X 的子集，則記号

$$E \subset F \qquad 或 \qquad F \supset E$$

表示 E 是 F 的一个子集，也就是說，E 里面的每一个点都屬于 F。因此，对于每一个集 E，我們有

$$E \subset E.$$