

科學圖書大庫

圖形及用途

張其成 著

機械工業出版社

2011/2/17/18

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認為絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，尤為社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學二年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會為促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大眾閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

新數學文庫

本文庫係由當代數學專家卅餘人所編撰，全世界均有譯本，乃數學權威之寶典。其目的在確立中等學校學生及社會大眾之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本文庫內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，需要特別研究。

學習數學的最好方法，為多做習題。各書所附習題，有些頗為艱深，需要慎密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

本文庫共二十冊陸續出版，以供讀者研習。除第十七冊係由葉哲志先生承譯外，其餘各冊均由王昌銳教授承譯。（定價每冊港幣4元，新台幣25元）

1. 有理數及無理數 (Numbers: Rational and Irrational)
2. 微積分研究 (What is Calculus About ?)
3. 不等式論 (An Introduction to Inequalities)
4. 幾何不等式 (Geometric Inequalities)
5. 高中數學測驗 (第一冊) (The MAA Contest Problem Book 1)
6. 大數論 (The Lore of Large Numbers)
7. 無窮數之妙用 (Uses of Infinity)
8. 幾何移轉 (Geometric Transformations)
9. 連分數 (Continued Fractions)
10. 圖形及用途 (Graphs and their Uses)
11. 匈牙利數學問題詳解 (第一冊) (Hungarian Problem Book 1)
12. 匈牙利數學問題詳解 (第二冊) (Hungarian Problem Book 11)
13. 數學史話 (Episodes, from the early history of mathematics)
14. 群與圖 (Groups and their Graphs)
15. 特別數學 (Mathematics of Choice, or How to count Without Counting)
16. 由畢達哥拉司至愛因斯坦 (From Pythagoras to Einstein)
17. 高中數學測驗 (第二冊) (The MAA Contest Problem Book 11)
18. 拓樸學基本概念 (First Concepts of Topology)
19. 幾何研究 (Geometry Revisited)
20. 數目理論入門 (Invitation to Number Theory)

譯 序

圖形理論及應用，雖其正式歷史，由世界聞名之瑞士數學家歐拉(Euler)時代算起，爲期尙不足三百年，但却爲今日數學之一重要部門，拓樸學(Topology)之重要內容。不惟可用於充實數學內容，促進數學研究，解決數學問題。而且可有助於經濟學，心理學，及生物學等之研究。所以圖形學是一門重要學問，而且爲用極廣。

圖形可用於安排球類及棋藝比賽賽程，分析勝敗因素，記錄比賽結果，解決疑難問題。對於運動之提倡，正當娛樂之鼓勵，生活情趣之增進，貢獻頗大。不特此也，圖形復可用於生物繁殖實驗，探索家族淵源。更可用於都市街道溝渠，以及公路，鐵道、電力、給水、燃料、運輸、通信……等網路與管路之設計，國計民生，裨益至大，所以爲工程人員所必研究之課題。

本書作者奧爾博士(Dr.Oystein Ore)，於1899年，出生於挪威奧斯陸，於一九二二年畢業當地奧斯陸大學，一九二四年獲該大學博士學位。且曾先後研究數學於德國、法國及瑞典等地。一九二七年赴美國，受聘爲耶魯大學數學教授。伊對數學史，數學理論，圖形理論與應用，頗多造詣。出版著作極豐。殊值推介。

本書譯名，力求通俗流行。重要名詞術語，且留綴原文，以資參證。敘述文字，力存其真，以保原作之意。此譯係響應徐氏基金會廣譯新書，吸收新學之號召而作，並得其協助，始得早日付梓，以饗讀者，深爲感激。譯稿多勞吾妻蔣君英女士，代爲整理，尤值永誌勿忘。

中華民國五十八年十二月十二日

湘潭留田王昌銳序於高雄工專

致讀者

本書為數學專家，所撰一系列書刊之一，其目的在確立多數中等學校學生及社會人士，有興趣而易通曉之某些重要數學觀念。新數學文庫（New Mathematical Library）之大部篇幅，包含中學課程，不常包容之課題；且難易相殊，而即使同一書內，某些部份即比其他部份，需要較高程度之專注。由是，讀者需要少量技能學識，以瞭解此等書籍之多數內容，且須作明智之努力。

如讀者一直僅於教室作業遭遇數學，則應熟記於心，數學書籍，不能快速閱讀。亦不應期望乍覽之餘，即能瞭解書之所有內容，應很自然地越過複雜部份，以後再回來讀。因後續之陳述，常能澄清一種理論也。反之，包含完全熟悉內容之章節，則可快速閱讀。

學數學之最佳途徑為“做”數學，各書所含習題，有些需要縝密思考，奉勸讀者養成手持紙筆從事閱讀之習慣；如此，數學對之將變為意義倍增。

對著作及編者而言，此為新的嘗試，甚願對許多中等學校師生，給予此等書刊籌印之真誠協助，表示由衷謝意。編者頗有興趣於此系列書刊之反應意見。望讀者書寄紐約大學新數學文庫編輯委員會。

原 編 者

引言

本書採用圖形 (graph) 一詞，其所表示之意義，完全不同於解析幾何或函數理論中，耳熟能詳之圖形；或曾論及之包含其坐標體系內，坐標值 (x, y) 滿足 x 及 y 方程式之平面所有諸點集合的一種圖形。本書行將研究之圖形，均為包含點及連接某些點之直線的幾何圖象；有時稱為綫性圖形 (Linear graph)。兩種不同概念，具有相同名稱，實為不幸。但名詞已定，很難更改，其他數學方面，亦出現物名混淆情形，除非有嚴重混同危險，數學家亦無暇計及於改其辭彙。

圖形理論之首作，出現於 1736 年，係瑞士名數學家歐拉 (Euler) 所撰。由數學觀點言之，因圖形理論所討論者，多為娛樂性之難題。開始之時，似乏意義；但近來於數學上之發展，特別於其應用上，已予圖形理論，以強力衝進。於十九世紀時，圖形已應用於電子綫路及分子圖解等方面；今天，已為純粹數學課題；例如，數學關係理論，即圖形理論為自然工具之處。但亦有其他許多與高度實用問題有關連之用途；如競賽，運輸問題，管路流動作業及所謂“計劃節略”等問題。圖形理論，現亦出現於各種不同方面，如經濟學，心理學及生物學等，對一小小延伸之困惑，圖形理論，特別如包含有名的“四色圖推理”之部份，留下今猶如昔之許多數學家引為興趣之事。

於數學中，圖形理論，列為拓樸學 (Topology) 之一部門；但其與代數及矩陣論，亦有強力關係。

於以下討論中，以討論圖形理論中極簡單之問題為主，其所以如此取材，係圖一方面提供使用圖形方法，可從事分析之一種印象，而另一方面則表示如何用此方法，以突破某些問題。所幸，不需介紹太多的數學計算。

目 錄

譯序	III
致讀者	IV
引言	V
第一章 何謂圖形？	1
1.1 隊際競賽	1
1.2 虛圖及全圖	2
1.3 同構圖形	4
1.4 平面圖形	7
1.5 平面問題	9
1.6 圖形邊數	11
第二章 連通圖形	15
2.1 分量	15
2.2 可尼斯堡橋的問題	17
2.3 歐拉圖形	18
2.4 自尋出路	20
2.5 漢米爾登直線	21
2.6 難題與圖形	23
第三章 樹	27
3.1 樹與森林	27
3.2 巡迴與樹	29
3.3 連通問題	30
3.4 街道與廣場	32

第四章	匹配	35
4.1	職務與應徵者	35
4.2	其他確立方法	37
4.3	循環比賽	39
第五章	指向圖形	43
5.1	隊際競賽續論	43
5.2	單行道交通問題	44
5.3	局部程度	48
5.4	原始圖形	50
第六章	遊戲與難題問題	57
6.1	難題與指向圖形	57
6.2	遊戲理論	59
6.3	運動作家之矛盾	63
第七章	關係	69
7.1	關係與圖形	69
7.2	特別條件	71
7.3	同義關係	74
7.4	部份順序	78
第八章	平面圖形	83
8.1	平面圖形條件	83
8.2	歐拉公式	86
8.3	圖形關係，二重圖形	88
8.4	柏拉圖物體	90
8.5	鑲嵌圖案	94
第九章	地圖着色	97
9.1	四色配置	97
9.2	五色定理	100

解答	105
参考書目	115
辭彙	117

第一章 何謂圖形？

1.1 隊際競賽

假定汝之學校橄欖球隊，屬於某些其他校隊聯盟，稱汝隊為 A ，而他隊為 B, C, D, E 及 F ；且假定共有六隊，該季數週過後，某些球隊，將相互比賽。例如

A 對 C, D, F

B 對 C, E, F

C 對 A, B

D 對 A, E, F

E 對 B, D, F

F 對 A, B, D, E

欲明示此等情勢，可用幾何圖解為之。各隊可用一點，或一小圓代表，而兩如此之點，能以直線連通，以示曾進行球賽之球隊，則完成上表球賽之情況，示如圖 1.1.1.

如圖 1.1.1 所繪之圖象，稱為圖形。包含之某些點 A, B, C, D, E, F ，稱為頂點 (Vertices)，及連通諸頂點之綫段，如 AC, EB 等，稱為圖形之邊 (edges)。

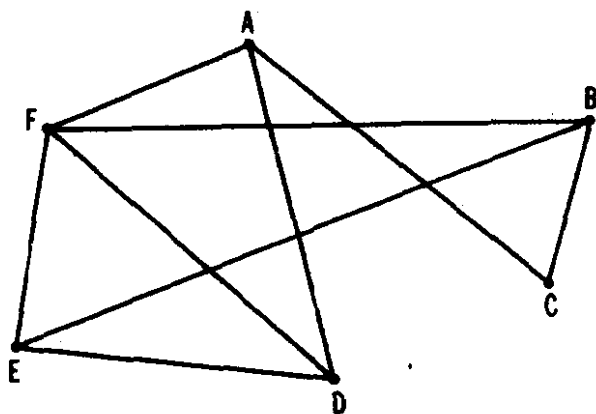


圖 1.1.1.

2 圖形及用途

由圖 1.1.1 得知，可能發生圖形之邊，相交而無交點為頂點情事；此種麻煩，種因於所繪圖形在平面內之事實；因此，示以邊為相互經過空間之綫，其表示更為適當；但於任何情況，標示諸頂，須特別小心，以防混淆。

於隊際比賽中，任何已進行之賽局集合，可如所述方式，繪為一圖。反之，如有某圖，即，包含點或頂。由綫段或邊連接之一圖象，則能解釋為如斯比賽之圖解。茲以圖 1.1.2 所繪之圖示之，該圖可釋為八隊間比賽圖解； A 曾與 B, E, D 賽，而 B 曾與 A, F, G, C 賽，如此類推。

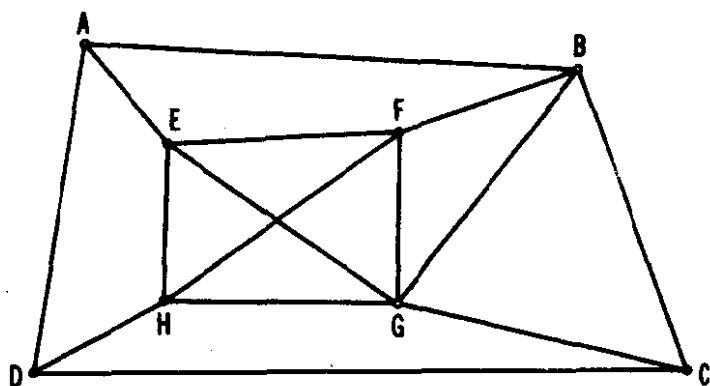


圖 1.1.2

習題 1.1

1. 繪汝橄欖球隊或棒球隊。於中季賽程圖。
2. 書出圖 1.1.2 中，圖示賽程全表。
3. 圖 1.1.1 及圖 1.1.2 中，各有多少頂與邊？

1.2 虛圖及全圖

有某種特殊圖形，於圖形理論方面，產生許多用處，此際且認圖形，解釋為隊際比賽之圖上記錄；球季開始以前，並無比賽進行，圖中無邊。由是，圖僅包含隔離之頂點，即無邊相連之頂點，此種圖形，稱為虛（Null）圖。於圖 1.2.1 中，曾繪出 1, 2, 3, 4 及 5 隊或頂點之此種圖形。此等虛圖，常用符號 O_1, O_2, O_3 ，如此類推示之，如是，通常 O_n 為 n 頂而無邊之虛圖。

其次，進於另端。當球季已過。且假定每隊曾與其他各隊，恰賽一次，則於賽程圖上，各對頂點，由一邊相連，如斯之圖稱為全（Complete）圖（有時曰自然（Universal）圖）。圖 1.2.2 顯示對 $n = 1, 2, 3, 4$

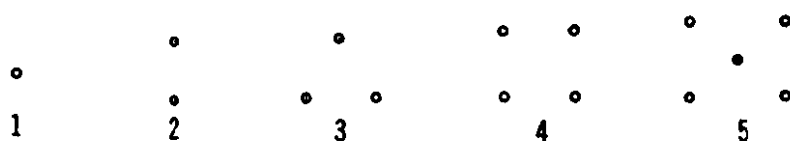


圖 1.2.1

, 5 頂之全圖。而以 U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 , 分別表示此等全圖。如是, 通常 U_n 包含 n 頂, 而諸邊連接所有諸成對頂點。能繪成 n 邊, 及所有對角綫之一多角形。

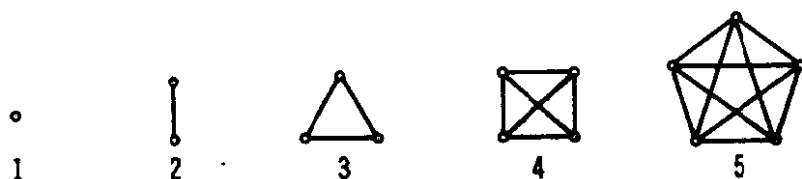


圖 1.2.2

當已繪成某圖形, 如圖 1.1.1 中之圖形 G 時, 常能於相同之頂增加消失之邊, 即對應於尙待實施之賽程, 以成全圖。於圖 1.2.3 中, 即對圖 1.1.1 之圖形 G 作此 (尙未舉行之賽程, 同虛綫示之。)。

亦能單獨畫出, 包含未賽之程, 將來比賽, 於圖形 G 情況。此結果繪如圖 1.2.4 中圖形。

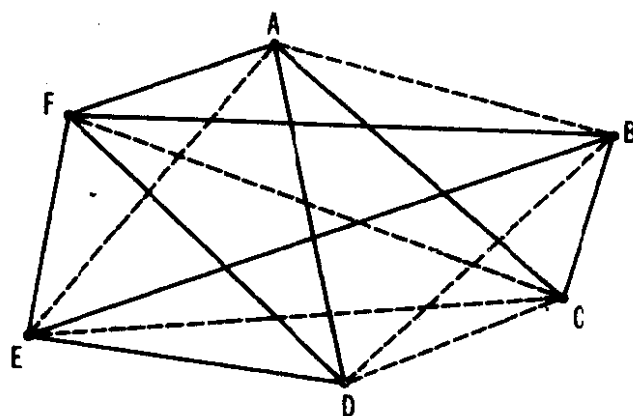


圖 1.2.3

於圖 1.2.4 中之新圖, 稱爲圖 1.1.1 中圖形 G 之補充 (Complement) , 習慣上常以 $\bar{G}$ 示之。如取 $\bar{G}$ 之補充, 乃回至 G ; 合併 G 及 $\bar{G}$ 兩圖形中之諸邊, 遂成連通諸頂點之全圖。

4 圖形及用途

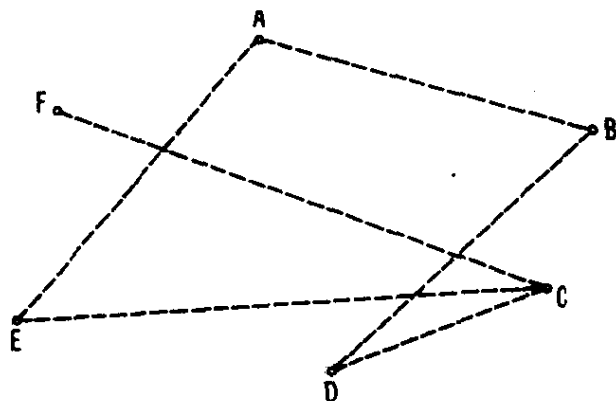


圖 1.2.4

習題1.2

1. 繪圖 1.1.2 中圖形之補充。
2. 以邊數 n 表示全圖 U_n 中之邊數。

1.3 同構圖形

注意於繪製圖 1.1.1 中圖形時，有許多自由行動。

第一，無諸邊為直線之需要，任何種類之曲線，均可如前，連接相同頂點。例如，能用以下形狀之圖形，表示圖 1.1.1 中圖形。

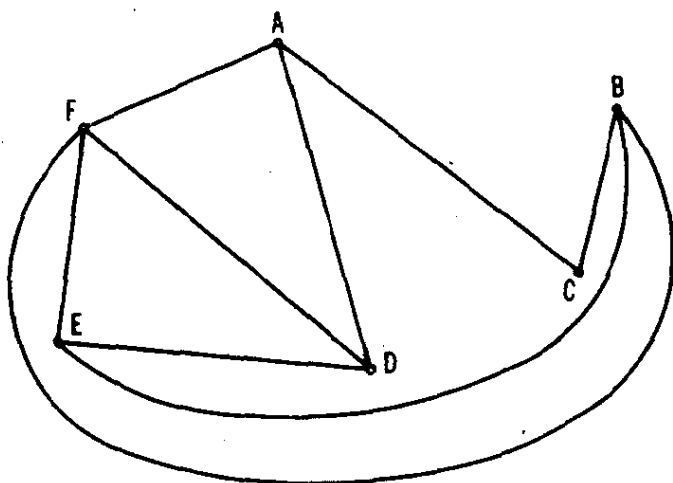


圖 1.3.1

第二，可於平面中隨意位置，佈置諸頂。例如圖 1.1.1 中圖形，其諸頂

佈置，能繪如圖 1.3.2 所示。

如考慮圖 1.1.1，圖 1.3.1 及圖 1.3.2 中三圖形，為比賽賽程圖形，均包含各隊相互與賽之相同資料；即為於意義上之相同圖形。此遂引致，可曰通常稱為 G_1 及 G_2 之兩圖形，如有相同部位之映像，乃為同構 (Isomorphic)。換言之，如 G_1 及 G_2 為同構，必有相同數目之頂點 (B_2, C_1)，亦由一邊連通，反之亦然。依此定義圖 1.1.1，圖 1.3.1，及圖 1.3.2 中三圖形，為同構的 (即有相同結構)，雖其畫法及形式，可能相殊。(同構一詞，常用於數學；源於希臘字 “Iso”，(相同) 及 “Morphe” (形狀或形式)。

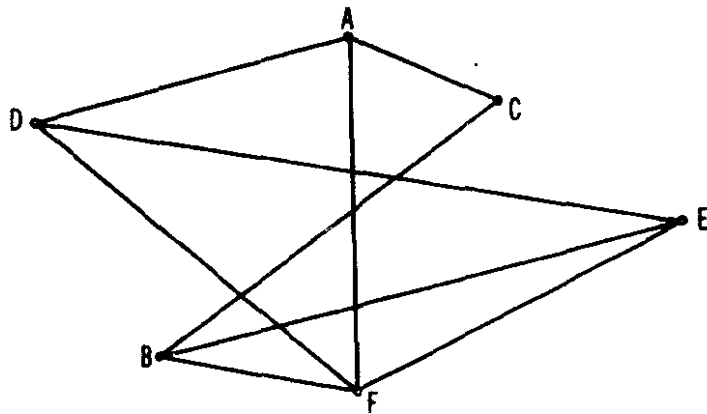


圖 1.3.2

人們常面臨決定兩圖形是否同構之問題。常有明顯理由，為何此不能為其情況。例如圖 1.3.3 中兩圖形，因無相同數目之頂點，而不能為同構。圖 1.3.4 中圖形，亦不能同構，因其無同數之邊也。

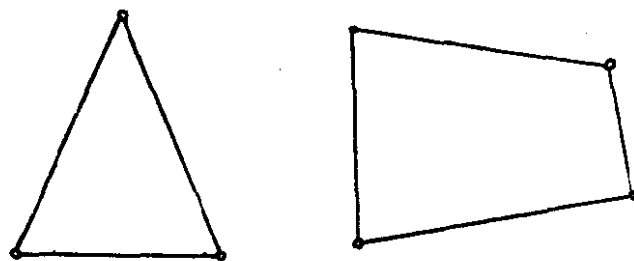


圖 1.3.3

需要略為精細之推理，以顯示圖 1.3.5 中之兩圖形，為非同構，然能觀悉，於第一圖形，有八連接邊之一序列 (諸邊有一共頂)

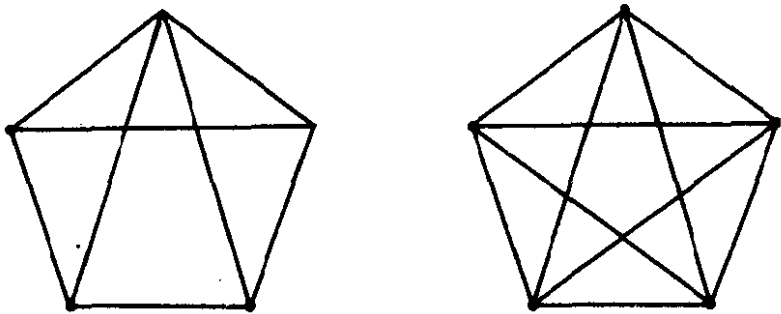


圖 1.3.4

$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 8), (8, 7), (7, 6)$
 $(6, 5), (5, 1)$

回至原來頂點，而於第二圖形中，則無此序列。換言之，不論如何為第二圖頂點命名，仍將不能由一邊連接成對之頂於一圖形，以對應於他圖，由一邊連接成對之點。（驗證之！）

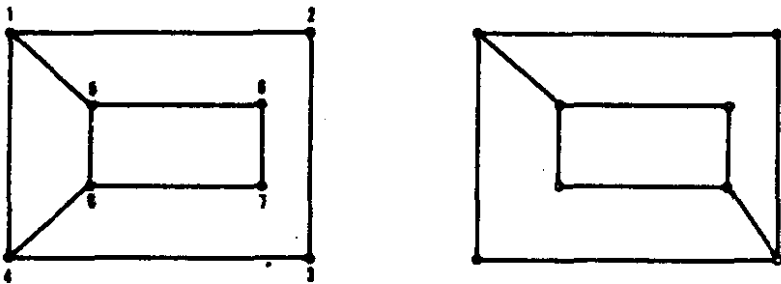


圖 1.3.5

當無明顯途徑，以證明兩圖形非同構時，很難決定是否可指出頂角，以使能於兩圖形間，得其同構性。例如，圖 1.3.6 中提出之圖形，實係同構的

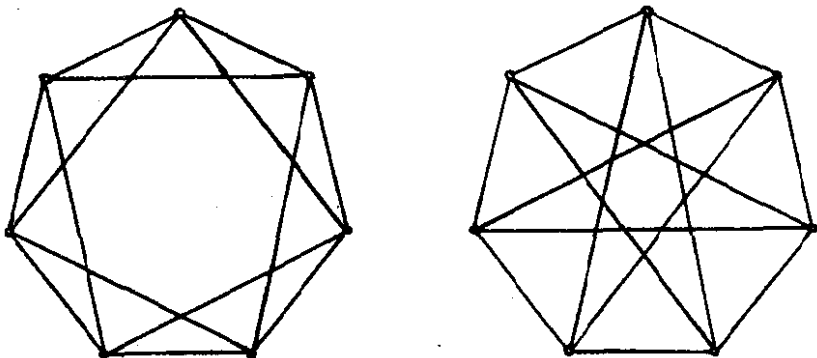


圖 1.3.6

習題 1.3

1. 證明圖 1.1.1, 圖 1.1.2 及圖 1.2.4 中圖形, 非互相同構的。
2. 為何圖 1.3.5 中圖形, 不能同構? 提出另外理由。
3. 於圖 1.3.6 中兩圖形, 指出頂點, 如是其同構性變為顯著。

1.4 平面圖形

對許多目的而言, 並不計較圖形如何畫法; 即, 同構圖形因所予資料相同, 遂認其一樣。當然, 此為原始圖形, 解釋為隊際比賽記錄之情況, 然而, 一如即將指陳, 有以圖形能於特別方式畫出為重之宗旨。茲比較圖 1.1.1 及圖 1.3.1 中同構圖形。於第一圖中, 諸邊於圖形非頂之點, 有五次相交, 反之, 於圖 1.3.1, 則僅於頂尖相交。

所繪圖形, 除頂點外, 能別無其邊相交或相共之點, 乃謂之平面圖形 (Planar graph)。由是於圖 1.1.1 中, 因存在於如圖 1.3.1 中之平面表示, 而為平面的。

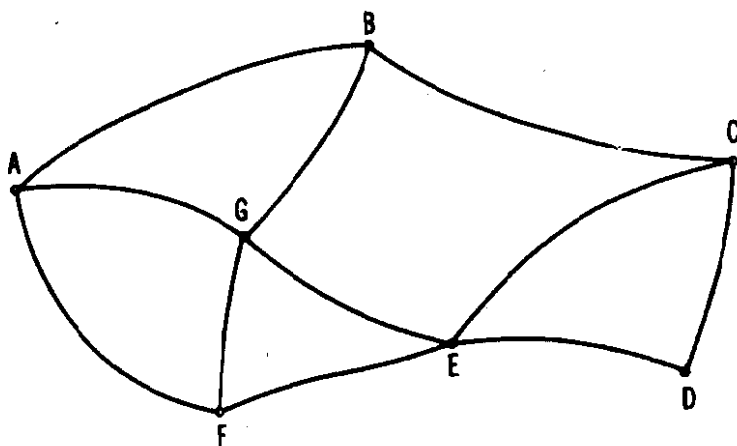


圖 1.4.1

平面圖形, 可解釋為各道路交叉點, 或村落間連接綫之道路圖。例如, 圖 1.4.1 中之圖, 表示有七交叉點, A 至 G , 有些直接由道路相連, 如 (A, G) , (B, C) , (F, E) , 如此類推。反之, 道路圖, 可認其為一平面圖, 同樣城市圖, 為以街道作邊, 廣場或街道交叉點為頂點之平面圖; 見圖 1.4.2。

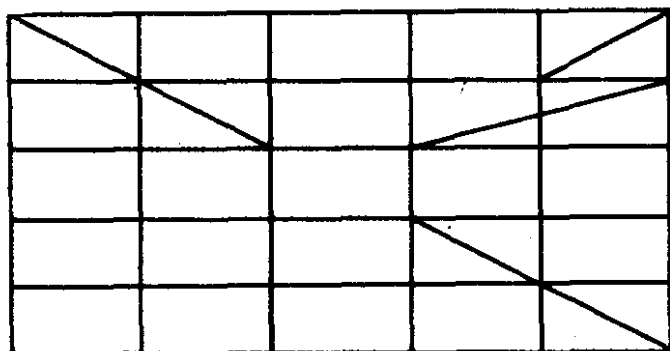


圖 1.4.2

現代技術，變更許多事物，使之成為最新，須知，亦將道路圖看作平面圖之以前簡單概念，予以修正；道路網增加限制接近之通道，如是兩道路交叉之處，不容許相互越過；換言之，圖之諸邊，相交於非道路交叉之處。

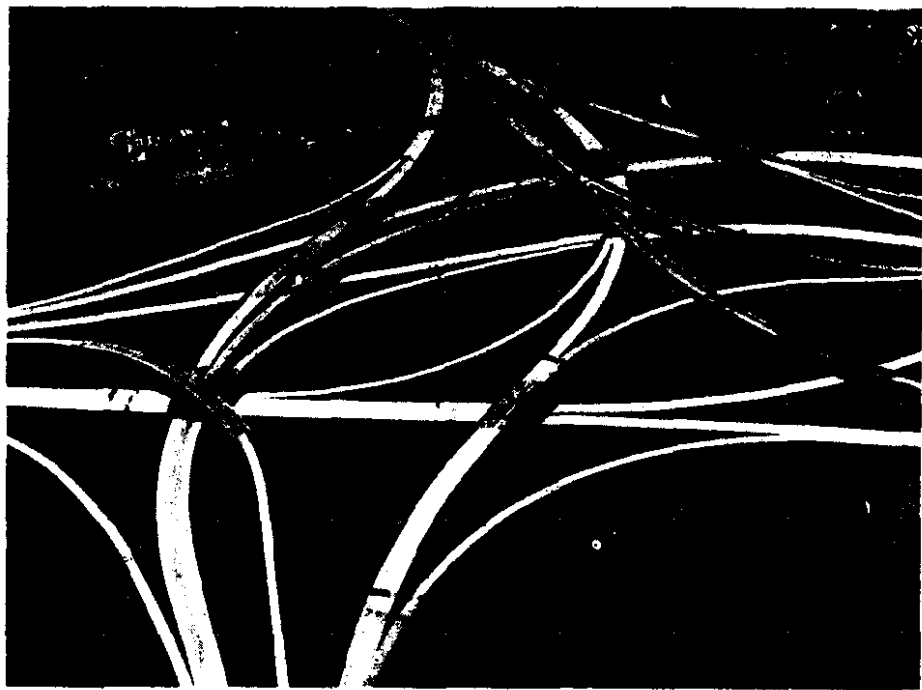


圖 1.4.3

習題 1.4

1. 由一汽車旅行地圖，繪出所在州區之平面道路圖。
2. 對街市圖依樣作為。