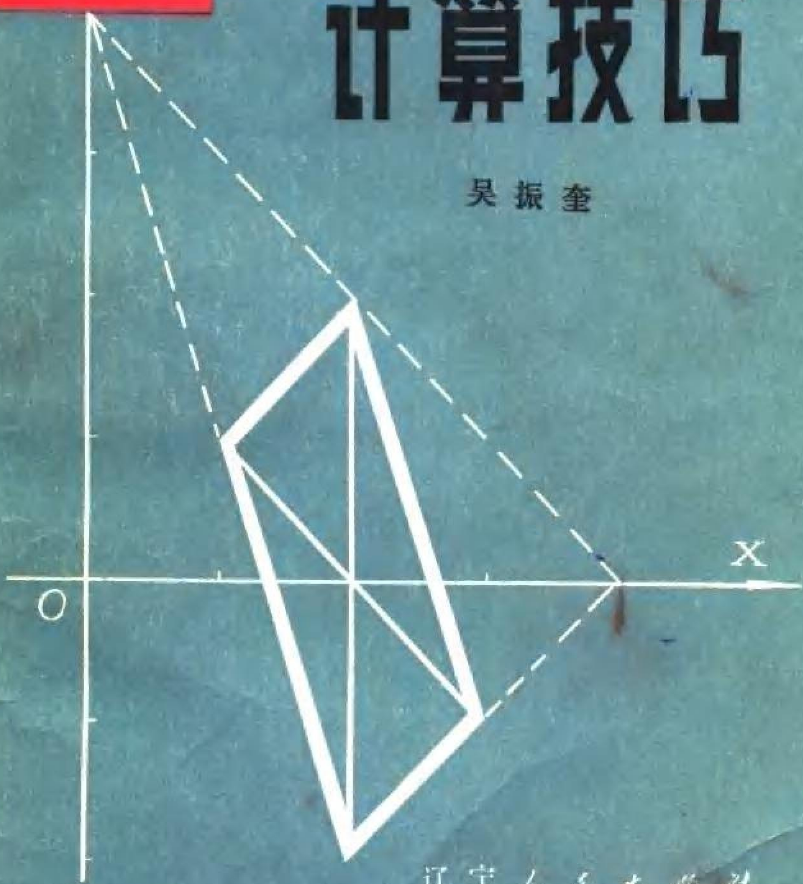
II

中学数学计算技巧

吴振奎



辽宁人民出版社

中学数学计算技巧

吴振奎　编著

辽宁人民出版社

1982年·沈阳

中学数学计算技巧

吴振奎　编著

*

辽宁人民出版社出版
（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行
沈阳新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092　$\frac{1}{32}$　印张：$8\frac{7}{8}$
字数：210,000　印数：1—54,000
1982年11月第1版　1982年11月第1次印刷

统一书号：7090·195　定价：0.64元

前　言

中学数学中的命题，按性质来讲大致可分为两类：一类是证明题，一类是计算题（当然还有一些作图问题）。对于一些计算题，迅速而准确地解决它们，不仅对加深数学概念的理解有益；对于培养学生的逻辑思维能力和严肃不苟的治学态度也有好处。

在中学数学中往往也会遇到一些计算题，表面上看起来很复杂，甚至感到无从作起，但仔细分析一下，便会发现有时能有巧妙的方法可寻：

例如计算$\log_{2-\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})$，倘若按通常算法，将会感到棘手，但若发现$2+\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^{-1}$，题目的结论便是显然的了：因为 $\log_{2-\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})=\log_{2-\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^{-1}=-1$。

再如计算$C_{10}^1+C_{10}^2+\cdots+C_{10}^{10}$，倘若一项一项来求和便麻烦多了，但若熟悉组合公式$\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$，这个问题便信手可解：$C_{10}^1+C_{10}^2+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}-C_{10}^0=1023$。

读者也许要问：这些方法（或技巧）是怎样找到的？又如何运用这些方法（或技巧）来解其他一些问题呢？这便是本书要谈的内容。对一般在教科书上可以找到的计算方法，本书不准备过多谈及，而是仅就一些特殊方法与技巧略加简述。书中材料大多为人们所熟知，这里只是将它们归纳、分类、整理、汇集出来，目的是使读者免去查阅资料之烦，也可使读者对这

些方法间的纵横关系有些了解。倘若在这方面对大家能有一点帮助的话，笔者将感到欣慰了。

计算技巧，千头万绪，较难归类，更难全面，这种尝试妥当与否，请读者评鉴。

应该指出的是：证明与计算都不是绝对的，计算常需要运用证明的结论来完成；而有些证明问题又正是计算的结果。因而笔者愿向大家说明：这本小册子是《中学数学中的证明方法》的姊妹篇。

沈阳教育学院张运钧老师对本书初稿提出极为宝贵的修改意见，对此深表谢意。

吴振奎

1981年9月

本书用到的数学符号

$a|b$ 表示 a 能整除 b

$a \nmid b$ 表示 a 不能整除 b

a/b 表示 $\frac{a}{b}$（只是在不方便的时候才这样书写）

(a,b) 表示整数 a、b 的最大公约数*（多个数时类同）

$[a,b]$ 表示整数 a、b 的最小公倍数*（多个数时类同）

$\overline{abcd}$ 表示由数字 a、b、c、d 组成的四位数(多位数时类同)

$S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 面积（其他类同）

$V_{球O}$ 表示球 O 的体积（其他类同）

$\lg A$ 表示 A 的常用对数（以10为底）

$\ln A$ 表示 A 的自然对数(以 e 为底)

const 表示常数

$a \equiv b \pmod{p}$ 表示整数 a、b 对模 p 同余

$\sum_{i=l}^{n} a_i$ 表示足码从 l 到 n 的所有 a_i 的和，即 $a_l + a_{l+1} + \cdots + a_n$

$\prod_{i=l}^{n} a_i$ 表示足码从 l 到 n 的所有 a_i 的积，即 $a_l a_{l+1} \cdots a_n$

---

*有时 (a,b)、$[a,b]$ 也表示开、闭区间．在解析几何中 (a,b) 又表示点的坐标。

$\Longleftrightarrow$　表示充要条件

$\vee$　表示 $>$、$<$、$\geqslant$、$\leqslant$ 其中之一

$[A]$　表示不超过A的最大整数

【m】　表示 m的整数倍

$\{A\}$　表示整数A的末位数或数A的小数部分

$y_{\min}(y_{\max})$　表示（在给定区域上）y 的最小（大）值或极小（大）值

Rt$\triangle ABC$　表示直角 $\triangle ABC$

$n!!$　表示 n的双阶乘：n 为偶数时为 $n(n-2)\cdots 2$；n 为奇数时为 $n(n-2)\cdots 1$

目　录

引　　子

——从一道分母有理化问题所想到的

我们先来看一个分母有理化问题.即有理化分母$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,显然

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

这个结果告诉我们什么呢?我们很容易发现:$\sqrt{3}+\sqrt{2}$与$\sqrt{3}-\sqrt{2}$互为倒数.仔细观察这个过程的运算,不难有:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}\pm\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}\mp\sqrt{n},\ n\text{ 是非负整数;}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}\pm\sqrt{a}}=\sqrt{a+1}\mp\sqrt{a},\ a\text{ 是非负实数;}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+d}\pm\sqrt{a}}=\frac{1}{d}(\sqrt{a+d}\mp\sqrt{a}),\quad a\geqslant 0\text{ 且 }d>0。$$

由上面结论,便可解决下面诸类问题:

①倘若再注意到$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$和

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

不难有:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=1.$$

类似地推广开来，可有：

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdots\cdots\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}_{n\text{重}}}$$

$$\cdot\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}_{n\text{重}}}=1.$$

②计算 $\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

由前面的分析，可有：

$\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}=-1$，

同理可有：

$\log_{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})=-1\quad(a>0)$；

$\log_{\sqrt{a+d}-\sqrt{a}}[(\sqrt{a+d}+\sqrt{a})/d]=-1$；$a\geqslant 0, d>0$ 且 $a=0$ 时 $d\neq 1$.

③解方程 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{3x-7}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{7x+3}$.

由上面结论，知方程等价于：

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{3x-7}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-7x-3}$,

故 $3x-7=-7x-3$，即有 $x=4/10$.

对于 $(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})^{f(x)}=(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^{g(x)}$ 亦可仿上法解.

此外，由前面①的结论，还可以解方程 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=4$，这只须令 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=y$，则

$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=y^{-1}$，方程化为：

$y+y^{-1}=4$ 即 $y^2-4y+1=0$.

解得 $y=2\pm\sqrt{3}$，可有 $x=\pm 2$（若注意到 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x\cdot(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=1$，再由题设，亦可直接用韦达定理写出以设

两式为根的方程）.

仿上方法还可解一些更复杂的方程，如：解方程 $(\sqrt{\sqrt{2}+1})^{\sin x}+(\sqrt{\sqrt{2}-1})^{\sin x}=2$。

这只需令 $y=(\sqrt{\sqrt{2}+1})^{\sin x}$，则方程可化为：

$y^2-2y+1=0$，最后可解得：$x=k\pi$（k是整数）.

同样可以处理更一般的情形：解方程 $(\sqrt{\sqrt{2}+1})^{\sin x}+(\sqrt{\sqrt{2}-1})^{\sin x}=a$，其中 $2\leqslant a\leqslant\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$.

同上设方程可化为：$y^2-ay+1=0$，最后可解得：$x=k\pi\pm\sin^{-1}\left[2\lg\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}/\lg(\sqrt{2}+1)\right]$，$k$ 是整数.

④求和 $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{19}+\sqrt{20}}$.

由 $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，故

原式 $=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{20}-\sqrt{19})=\sqrt{20}-1$，这里只须注意前后项的相消即可.

类似的，我们仍不难将问题稍加推广有：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{n+1}-1;$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{a+k}+\sqrt{a+k+1}}=\sqrt{a+n+1}-\sqrt{a};$$

问题还可再推广一下有：

若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一公差为d的等差数列，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{1}{d}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}$；

若 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是公比 $r>1$ （$b_1>1$）的等比数列，则

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\log_2 b_k}+\sqrt{\log_2 b_{k+1}}}=\frac{n-1}{\sqrt{\log_2 b_1}+\sqrt{\log_2 b_n}}.$$

如果再引深一步去考虑：$p\sqrt{c}+q\sqrt{d}$ 和 $p\sqrt{c}-q\sqrt{d}$（这里 p、q 系有理数，c、d 为正整数，且 $\sqrt{c}$、$\sqrt{d}$ 是无理数）正象复数 $a+bi$ 和 $a-bi$（a、b 是实数）互为共轭复数一样（它在解某些复数问题时，用途很大），这儿我们无妨称它们为共轭无理数（对）．前面所讲的均是一些简单、特殊的共轭无理数（对）．利用共轭无理数，也同样可解决一些"棘手"的问题．比如：

①若 a、b 分别表示 $1/(3-\sqrt{7})$ 的整数和小数部分，求 $a^2+(1+\sqrt{7})ab$ 的值．

解 $\because \dfrac{1}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$，又 $2<\sqrt{7}<3$，

$\therefore$ $0<\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}<1$，故 $\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}=2+\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$，

因而 $a=2$，$b=(\sqrt{7}-1)/2$，这样：

$a^2+(1+\sqrt{7})ab=4+(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)=10$．

② i)若 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{2})^n\}$；

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt{n^2+1}-n)$．

解 i) 对于任何自然数 m，总有 $\{x+m\}=\{x\}$；而对任何非整数 x，总有 $\{-x\}=1-\{x\}$．

又 $(2+\sqrt{2})^n$ 总可（用二项式展开、合并、化简）表示为 $p+q\sqrt{2}$ 的形式（其中 p、q 是正整数），且 $(2-\sqrt{2})^n$ 便可表示为 $p-q\sqrt{2}$ 形式．

这样 $\{(2+\sqrt{2})^n\}=\{q\sqrt{2}\}=1-\{-q\sqrt{2}\}=1-\{p-q\sqrt{2}\}=1-\{(2-\sqrt{2})^n\}$，

但 $0<2-\sqrt{2}<1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2-\sqrt{2})^n\}=\lim\limits_{n\to\infty}(2-\sqrt{2})^n=0$．

从而$\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{2})^n\}=\lim\limits_{n\to\infty}[1-\{(2-\sqrt{2})^n\}]=1$.

ii) ∵ $n(\sqrt{n^2+1}-n)=n/(\sqrt{n^2+1}+n)=1/(\sqrt{1-1/n^2}+1)$,

∴$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}1/(\sqrt{1+1/n^2}+1)=1/2$.

③求 $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})[(\sqrt[3]{3})^2+(\sqrt[3]{2})^2][(\sqrt[3]{3})^4+(\sqrt[3]{2})^4]\cdots[(\sqrt[3]{3})^{2^{n-1}}+(\sqrt[3]{2})^{2^{n-1}}]$ 的值.

解 注意到$(a+b)(c-b)=a^2-b^2$,上式分子分母同乘$\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$,则

原式 $=[(\sqrt[3]{3})^{2^n}-(\sqrt[3]{2})^{2^n}]/(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$.

注 这个问题的更一般结论是:

$$(1)\prod_{k=0}^{n-1}(a^{2^k}+b^{2^k})=(a^{2^n}-b^{2^n})/(a-b);$$

$$(2)\prod_{k=0}^{n}(a^{2^k}-a^{2^{k-1}}b^{2^{k-1}}+b^{2^k})=(a^{2^{n+1}}+a^{2^n}b^{2^n}+b^{2^{n+1}})/(a^2+ab+b^2).$$

利用共轭无理数还可以解某些方程问题:

④解方程 $x=\sqrt{x-1/x}+\sqrt{1-1/x}$.

解 由设有 $1/x=1/(\sqrt{x-1/x}+\sqrt{1-1/x})=(\sqrt{x-1/x}-\sqrt{1-1/x})/(x-1)$ (由设知 $x=1$不是方程的根, 从而 $x\neq1$).

即 $1-1/x=\sqrt{x-1/x}-\sqrt{1-1/x}$,将它与原方程两边相加得:

$2\sqrt{x-1/x}=1+x-1/x$, 即 $(x-1/x)-2\sqrt{x-1/x}+1=0$.

解得$\sqrt{x-1/x}=1$, 从而 $x-1/x=1$或 $x^2-x-1=0$,

可有 $x=(1\pm\sqrt{5})/2$,但 $x>0$, 从而 $x=(1+\sqrt{5})/2$.

利用共轭无理数, 还可以构造一些方程:

⑤试求以 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$为根的最低次数的有理方程.

解 由于有理系数方程无理根共轭地出现 (见《证明》一书*),

---

* 为简便计, 本书以后将《中学数学中的证明方法》简称为《证明》.

从而所求最低次数的有理方程应有根：

$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$，$1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$。

故所求方程为：

$$(x-1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-1-\sqrt{2}+\sqrt{3})=0,$$

即 $[(x-1)^2-5-2\sqrt{6}][(x-1)^2-5+2\sqrt{6}]=0$，

亦即 $x^4-4x^3-4x^2-16x-8=0$。

共轭无理数还可用来处理某些证明问题，这儿仅举几例说明：

⑥试证 $(\sqrt{26}+5)^{1981}$ 的小数表示中，小数点后至少有 1981 个 0。

证 $\because 0<\sqrt{26}-5=\dfrac{1}{\sqrt{26}+5}<\dfrac{1}{5+5}=\dfrac{1}{10}$，

$$\therefore\quad (\sqrt{26}-5)^{1981}<(1/10)^{1981}. \qquad (*)$$

注意到1981是奇数，则 $(\sqrt{26}+5)^{1981}-(\sqrt{26}-5)^{1981}$ 是整数，即 $(\sqrt{26}+5)^{1981}$ 与 $(\sqrt{26}-5)^{1981}$ 的小数部分相同。

由（∗）式知 $(\sqrt{26}+5)^{1981}$ 的小数部分，小数点后至少有1981个 0。

⑦不论 n 为何自然数，若 $m<n\sqrt{2}+\dfrac{1}{an}$，则 $\left|\dfrac{m}{n}-\sqrt{2}\right|\geqslant\dfrac{1}{an^2}$ 总成立，这里 $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，m 亦为自然数。

证 $\because \left|\dfrac{m}{n}-\sqrt{2}\right|=\left|\dfrac{m-n\sqrt{2}}{n}\right|=\dfrac{|m^2-2n^2|}{n(m+n\sqrt{2})}\geqslant\dfrac{1}{n(m+n\sqrt{2})}$，

注意到这里 $m^2-2n^2\neq 0$，且其为整数。

又 $n(m+n\sqrt{2})=n(2n\sqrt{2}+1/an)$

$=2n^2\sqrt{2}+1/(\sqrt{3}+\sqrt{2})=2n^2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\leqslant n^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})=an^2$。

⑧若 $a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$，$b_n=\sqrt{4n+2}$，试证：（1）$0<b_n-a_n<1/16n\sqrt{n}$；（2）$[a_n]=[b_n]$，这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

证 （1）$\because$ $a_n^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$，从而

$4n+1<a_n^2<4n+2=b^2$。（$\because$ $n<\sqrt{n(n+1)}<n+1/2$），

$\therefore\ c_n < b_n$.

又 $\sqrt{4n+2}-(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})=\dfrac{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=1/(\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})$

$\leqslant 1/(2\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n})(2n+2n)=1/16n\sqrt{n}$.

(2)由(1)的结论 $b_n-a_n=1/16n\sqrt{n}$，故 $[a_n]=[b_n]$.

⑨试证不论 $x、y、z、t$ 为何有理数时，等式 $(x+y\sqrt{5})^4+(z+t\sqrt{5})^4=2+\sqrt{5}$ 均不成立.

证 我们只需注意到前面曾提过的事实即可：

若 $(a+b\sqrt{d})^n=p+q\sqrt{d}$（这里 $a、b、p、q$ 均为有理数，$\sqrt{d}$ 是无理数，且 d 是自然数），那么 $(a-b\sqrt{d})^n=p-q\sqrt{d}$.

这样若题设结论成立，则有：

$(x-y\sqrt{5})^4+(z-t\sqrt{5})^4=2-\sqrt{5}$.

注意到：式左>0，式右<0，矛盾！故前设不真，从而结论成立.

⑩试证方程 $|x^2-2y^2|=1$有无穷多组解.

证 我们先来看下表：

n	$(1+\sqrt{2})^n$	x_n	y_n	$x_n{}^2-2y_n{}^2$	$(1-\sqrt{2})^n$
1	$1+\sqrt{2}$	1	1	$1-2=-1$	$1-\sqrt{2}$
2	$3+2\sqrt{2}$	3	2	$9-8=1$	$3-2\sqrt{2}$
3	$7+5\sqrt{2}$	7	5	$49-50=-1$	$7-5\sqrt{2}$
4	$17+12\sqrt{2}$	17	12	$289-288=1$	$17-12\sqrt{2}$
5	$41+19\sqrt{2}$	41	29	$1681-1682=-1$	$41-19\sqrt{2}$
…	…	…	…	…	…

这样由$x_n+y_n\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^n$，有 $x_n-y_n\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^n$，

且$x_n{}^2-2y_n{}^2=[(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})]^n=(-1)^n$.

故 $x_n=[(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n]/2$;

$y_n=[(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n]/2\sqrt{2}$. $\quad n=1,2,3,\cdots$

由上我们可以看到：当回过头来去复习学过的知识时，若能通过对比、联想，去归类、总结，不仅可以抓住问题的实质，而且可对问题间的内在联系能进一步了解，这对学好数学无疑将是有益和重要的。