生活与科学文库

〔日〕堀场芳数 著

从无理数e的发现到电脑程序

e 是无理数

指数和对数

e的命名人欧拉

e 与复数

概率统计中的e

e的奥秘

生活与科学文库

科学出版社

生活与科学文库

e 的奥秘

从无理数e的发现到电脑程序

〔日〕堀场芳数　著

丁树深　译

科 学 出 版 社

堀場芳数
対数 e の不思議
講談社，1991

图字：01-97-1745 号
图书在版编目（CIP）数据

e 的奥秘/〔日〕堀场芳数著；丁树深译．-北京：科学出版社，1998
ISBN 7-03-006044-X

Ⅰ．e… Ⅱ．①堀… ②丁… Ⅲ．常数，e-普及读物 Ⅳ．O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 07189 号

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
定价：8.00 元

前　言

本书是继《π 的奥秘》和《虚数 i 的奥秘》之后，"BLUE BACKS" 丛书奥秘系列的第三本小册子。

正如在《虚数 i 的奥秘》一书中所述，π，i，e 三者间存在 $e^{\pi i}=-1$ 关系，同时又有其各自的特征。

远在公元前，圆周率 π 就被定义为"周长与直径之比"。自古以来，π 的近似值一直取为 3.14 或 $\frac{22}{7}$（$=3.\dot{1}4285\dot{7}$）。通过许多数学家的努力，π 的近似值位数不断增加。目前用电脑计算圆周率。由于电脑运算速度等功能不断改进，今后 π 的近似值位数会越来越多。

目前电脑可计算到 10 亿位以上，计算 π 值的竞争还会继续下去。

其次，众所周知，i 为"虚数单位"，$i^2=-1$ 或 $\sqrt{-1}=i$。但是，为了区别电工学中的电流符号 i，有时用 j 表示虚数单位，从而 $j^2=-1$ 或 $\sqrt{-1}=j$。

i (j) 这个虚数单位十分重要，不仅过去和现在是如此，将来其重要性也是不言而喻的。

最后一个奇妙有趣的无理数是 e，它取自瑞士数学家欧拉（Euler，1707—1783）的英文字头。欧拉首

先发现此数并称之为自然数 e。但是，这种所谓的自然数与常见正整数 1，2，3，……截然不同。确切地讲，e 应称为"自然对数 $\log_e a$ 的底数"。

e 的近似值为 2.71828。有人注意到这串数字的日语读音恰好与日语"当用汉字""鲋--钵二钵"的日语读音相同，从而（日本人）通过背诵以上"当用汉字"很容易记住 e 值。这种冗长数字的巧妙记忆方法，广泛流传。

无理数 e 值是 x 无限增大时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的极限，通常书写为：$x\to\pm\infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\to e$ 或 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$。

亦可写为 $x\to 0$ 时，$(1+x)^{\frac{1}{x}}\to e$ 或

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

欧拉认为，一切函数均可展开为无穷级数，而指数函数 e^x 可写为：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

当 $x=1$ 时，有

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

式中 $n!$ 称为 n 的"阶乘"或"n 的 factorial"。$n!=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots3\cdot2\cdot1$。例如，$2!=2\cdot1=2$，$3!=3\cdot2\cdot1=6$。$n!$ 也可写成 $\underline{\lfloor n}$ 形式。

如果不习惯用阶乘符号，也可将 e 写为

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2\cdot1}+\frac{1}{3\cdot2\cdot1}+\cdots$$

$$+\frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}+\cdots$$

理解了牛顿和莱布尼茨的微积分之后，就会更明白 e 的奥秘。这个问题以后还要详细说明。指数函数 $y=e^x$ 微分之后，有 $\frac{dy}{dx}=(e^x)'=e^x$，而其积分则为 $\int ydx=\int e^x dx=e^x+C$（$C$ 为常数）：

e^x 微分和积分都不变的特征，是其它任何函数都不具备的。

本书将从 e 命名人欧拉的生涯讲起，结合微积分奠基人牛顿和莱布尼茨的经历，介绍无理数 e 的奥秘。

e，π，i 三者不仅都很奇妙，又均为数学上至关重要的数，而且三者之间还共同有一种密切的联系：$e^{\pi i}=-1$。此等式的日语发音，恰巧与日文的一句诙谐语*吻合。因此，这一重要的等式很容易记住。

以上为本书内容梗概，此外，书中还介绍了一些有关数学家的业绩，并为文科（非理工科专业）的读者做一些解释。

如果对数学“头痛”的人，看了此书也会引发兴趣的话，笔者甚感欣慰。

堀场芳数

于 1991 年春

---

* 类似这种诙谐句在汉语中也常见。例如，数字8802667，取其汉语发音相近的汉字则为“$\underset{8}{\overset{\text{爸}}{\downarrow}}\ \underset{8}{\overset{\text{爸}}{\downarrow}}\ \underset{0}{\overset{\text{领}}{\downarrow}}\ \underset{2}{\overset{\text{儿}}{\downarrow}}\ \underset{6}{\overset{\text{遛}}{\downarrow}}\ \underset{6}{\overset{\text{遛}}{\downarrow}}\ \underset{7}{\overset{\text{去}}{\downarrow}}$”。这样就极易记住那行冗长枯燥的数字。——译注

自然对数的底 e 之奥秘

——由发现无理数 e 到电脑程序

目　录

第一章

是无理数

§1.1 上古时期的记数和数的表示方法

上古时期还没有出现数字。人们不知道命名数字和使用记数法，他们怎样数自己饲养的羊的数目呢？

清晨，羊群外出时，他们在树干上记下表示羊数的符号。傍晚，羊群归来，再小心谨慎地按照早上留在树干上的记号用手指一一地对照检查。若树上的记号与羊数相同，说明归栏羊数与出栏羊数相同。采用这种方法就能知道羊的增减。

这种方法实际是一种“一一对应”法。

其后，他们逐渐用手指和石子表示数目。

特别是，用身旁事物代表数目，是一种进步。具体如何表示则取决于同伴的认可。例如，可以用狮子的头代表 1，鹫的翅膀代表 2 等。而且那时好像只在“一二个”与“许多”之间有不同。

据说新几内亚一带的土著居民至今仍用身体的一部分表示数目。左手小手指代表 1，无名指为 2，中指为

3，食指为 4，拇指为 5……

§1.2 数字始于结绳记数？

距今大约 800 年前的南美洲印加帝国利用绳扣表示“数”。一个绳扣代表 1，2 个绳扣表示 2，3 个绳扣表示 3……

这样，在表示数目多少的同时，也体现出了数字的作用。可以把绳扣看成一种数字。作为数的表示，“数字”大概就是这样在人类历史上逐渐完善起来的。

在数的表示法中有 5 进制、10 进制、12 进制、20 进制、60 进制等。

其中 5 进制、10 进制和 20 进制表示法与人的手指和脚趾数密切相关。而 12 进制、60 进制产生的原因是它们的约数较多，分东西时方便。

§1.3 玛雅数字和巴比伦数字

大约在公元前 3000 年，中美洲的危地马拉、墨西哥南部和尤卡坦半岛上居住着玛雅人。16 世纪初西班牙人征服了这一带。玛雅人不断抵抗，后来才服从墨西哥中央政府的管辖。

玛雅人有数的表示法的时代比古印度人早。他们使用的数字是 20 进制，用 · 和 — 代表 1 到 19 的数字。

· 代表 1，— 代表 5，2、3、4 分别为 · ·、· · · 和 · · · ·。此外他们还用 · 代表女性，— 代表男性。6 是 $\overset{\cdot}{-}$，7 是 $\overset{\cdot\cdot}{-}$，8 是 $\overset{\cdot\cdot\cdot}{-}$，15 是 $\equiv$，16 是 $\overset{\cdot}{\equiv}$。而 20 要进位，

现在还没弄清它的书写方式。100 是，而 0 是。

若把 0 看成眼睛，100 看成“胡须和嘴”不是很有意思吗。

数的表示方法“记数法”中，有很多种数字，如罗马数字(Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，…)，希腊数字(|，‖，|||，…)，埃及数字（0，00，000，…），巴比伦的楔形数字(▼，▼▼，▼▼▼，…)和汉字中的数字(一，二，三，…)等等。非常巧合，它们都是十进制数字。

这些数字与阿拉伯数字不同，它们有一大缺陷，即没有代表空位的数字。换言之，缺少与 0 等同的数字。

人类的祖先具体在什么时候提出了正整数 1、2、3、…，这点不十分明确。但是现在即使文化水平最低的民族也会使用几个数词。由此状况推测，很古的时候人类就会数数，并且数很多的数。

现在还有一种麻将牌，其中的数字与埃及数字表示法相同。

§1.4 怎样表示大的数?

公元前 3000 年到公元前 2000 年前，古埃及和巴比伦等国已使用 100 万到 1000 万这样大的数目。

法兰西大帝拿破仑从埃及带回去刻有文字的祈祷石。由其上那些文字符号可以看出，古埃及已使用如图 1-1 所示的象形文字表示大数字。

至于这些象形文字是什么物体的图形，很令人费解。

若据考古学家的想象，1 万是弯曲的手指的形状。

图 1-1　古埃及的象形数字

10 万是一种叫作江鳕(burbot)的动物的图形。100 万这个数字相当大,人们表现出很惊讶的情景,大概 1000 万过于大了,大到该符号不可理解。

§1.5　数的分类

用专业术语可以说:"数由整数开始,逐步发展到由有理数和无理数组成的实数。再由此扩大到复数。再发展下去是三元数或四元数等多元数。"

最初,由数物体个数开始,出现正整数(即自然数),从小的数目中扣除大的数目而出现负数。

将物体等分或分成几部分,由此出现分数。以长度大的物体为长度单位进行测量时,常常出现零头,由此出现分数和小数。

当然小数是根据 10 进制方法进位的,这与分数也有关。

不知何时出现的无理数,在公元前,毕达哥拉斯学派就已知道"边长为 1 的正方形的对角线长不能用正负整数表示,也不能用分数或小数表示。"现在大家都知道,该对角线长$\sqrt{2}$。

同样,也涉及到 π 与$\sqrt{3}$。若借助专业术语,那么"实数中除有理数外就是无理数"。

有理数可写成分数的形式，$\frac{a}{b}(b\neq 0)$，也就是采用比例的表现形式。而无理数是不能用分数形式表现的数，即不能用比例表示。

如$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$，$\sqrt{3}=1.7320508\cdots$，$\pi=3.141592\cdots$那样，无理数是无限小数。也就是说，无理数包含在无限小数中。

在无限小数中还有0.333…或0.121212…这样的小数。它们是相同的数字不断循环的小数。值得注意，这些无限小数不是无理数。

这是因为这些循环小数可用分数或比例来表示，所以它们是有理数。

$$0.3333\cdots=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\quad 0.121212\cdots=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$$

下面稍微离点题，讲一下循环小数变换成分数的方法。

仔细分析循环小数后就会发现，循环小数是由循环节不断重复而产生的。因而可写为

$$0.333\cdots=0.\dot{3},\quad 0.1212\cdots=0.\dot{1}\dot{2}$$

在循环节二端的数字上加上“·”。在$0.\dot{3}$中只用了一个“·”，而$1.333\cdots$就可表示为$1+0.\dot{3}=1.\dot{3}$。小数点后有不循环部分时，可按如下方式表示：

$$0.12323\cdots=0.1\dot{2}\dot{3}=\frac{123-1}{990}=\frac{122}{990}=\frac{61}{495}$$

若不放心，读者可亲自计算一下，$61\div 495$确实是$0.1\dot{2}\dot{3}$。

为将循环小数变换为分数，首先在分母中按循环节的位数并列9，其后加0，0的个数与不循环部分的位数相同。

再看分子。首先按顺序写下不循环部分的数字和一个循环节的数字，然后再减去不循环部分。

概括起来，可写成如下的形式

$$0.\alpha\beta\gamma\beta\gamma\cdots=0.\alpha\,\dot{\beta}\dot{\gamma}=\frac{\alpha\beta\gamma-\alpha}{990}$$

如前所述，毕达哥拉斯学派的人们早就认为存在有像$\sqrt{2}$那样的无理数。在美索不达米亚、古加里西亚及古印度也有如此看法。但是在欧洲，那时却不认为它们是数。

把无理数作为数来使用是从印度传播各种数字后开始的。

随着解析学中极限和连续等概念的深入研究，对无理数的理解越加清晰。

到了19世纪，魏尔斯特拉斯(K. T. W. Weierstrass，1815—1897)、戴德金(J. W. R. Dedekind，1831—1916)和康托(G. F. L. P. Cantor，1845—1918)等奠定了解析学基础。他们把有理数和无理数都按实数处理。从此以后，实数就分成为有理数和无理数两部分。

戴德金利用“切断”的概念，对实数下了定义。简单地说“数轴上的一切点，不是有理数就是无理数，排的满满的，毫无间隙。”

下面将实数分类小结为

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正、负整数}\\0\\\text{分数(小数)}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{代数无理数}(\sqrt{2},\sqrt{3},\cdots)\\\text{超越数}(\pi,e,\cdots)\end{cases}\end{cases}$$

如前所述，无理数是实数的一部分，是不能用$\frac{a}{b}$($b\neq0$)形式表示的数。如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，π 以及后面将要介绍的 e(=2.7182818284…)是数字不能循环的纯粹无限小数。其中数字的排列是无规律的。e 和 π 也称为超越数。

包含无理数和有理数的实数可用图 1-2 的数轴表示。

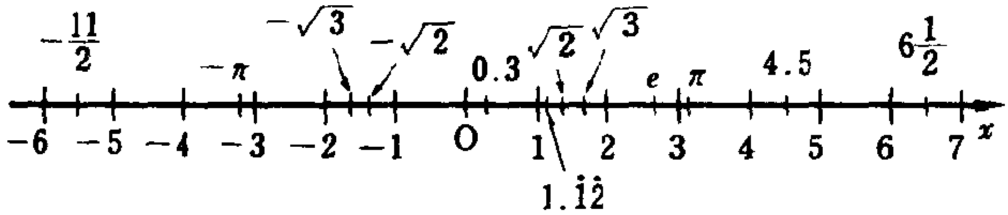

图 1-2

此直线可代表一切实数。

若使直线变化，比如用一根很锐的刀切这条直线，那么无论刀刃多锐，在刀口上总存在有某种类型的实数。这种切断叫“戴德金切断”。

在图 1-2 的数轴上，作为实例，示出了正整数 1、2、3、…，负整数 −1、−2、−3、… 以及 0。还有正负无理数$\sqrt{2}$、$-\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$-\sqrt{3}$、π、$-\pi$，e、…等，也点出了有理数中循环小数 $0.\dot{3}$、$0.\dot{1}\dot{2}$、。当然图中也标出了$-\frac{11}{2}$、4.5 和 $6\frac{1}{2}$等有理数。

§ 1.6 毕达哥拉斯学派

本节稍微离题，讲述毕达哥拉斯学派。

毕达哥拉斯学派是毕达哥拉斯(Pythagoras，