

生活与科学文库

[日] 堀场芳数 著
从无理数 e 的发现
到电脑程序

e 是无理数

指数和对数

e 的命名人欧拉

e 与复数

概率统计中的 e

奥秘

e 的

生活与科学
文库

科学出版社

生活与科学文库

e 的奥秘

从无理数 e 的发现到电脑程序

〔日〕堀场芳数 著

丁树深 译

科学出版社

堀場芳数
対数 e の不思議
講談社, 1991

图字: 01-97-1745 号

图书在版编目 (CIP) 数据

e 的奥秘/〔日〕堀场芳数著; 丁树深译.-北京: 科学出版社, 1998

ISBN 7-03-006044-X

I. e … II. ①堀… ②丁… III. 常数, e -普及读物 IV. O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 07189 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

定价: 8.00 元

前言

本书是继《 π 的奥秘》和《虚数 i 的奥秘》之后，“BLUE BACKS”丛书奥秘系列的第三本小册子。

正如在《虚数 i 的奥秘》一书中所述， π ， i ， e 三者间存在 $e^{\pi i} = -1$ 关系，同时又有其各自的特征。

远在公元前，圆周率 π 就被定义为“周长与直径之比”。自古以来， π 的近似值一直取为3.14或 $\frac{22}{7}$ (=3.142857)。通过许多数学家的努力， π 的近似值位数不断增加。目前用电脑计算圆周率。由于电脑运算速度等功能不断改进，今后 π 的近似值位数会越来越多。

目前电脑可计算到10亿位以上，计算 π 值的竞争还会继续下去。

其次，众所周知， i 为“虚数单位”， $i^2 = -1$ 或 $\sqrt{-1} = i$ 。但是，为了区别电工学中的电流符号 i ，有时用 j 表示虚数单位，从而 $j^2 = -1$ 或 $\sqrt{-1} = j$ 。

i (j)这个虚数单位十分重要，不仅过去和现在是如此，将来其重要性也是不言而喻的。

最后一个奇妙有趣的无理数是 e ，它取自瑞士数学家欧拉(Euler, 1707—1783)的英文字头。欧拉首

先发现此数并称之为自然数 e 。但是，这种所谓的自然数与常见正整数 $1, 2, 3, \dots$ 截然不同。确切地讲， e 应称为“自然对数 $\log_e a$ 的底数”。

e 的近似值为 2.71828 。有人注意到这串数字的日语读音恰好与日语“当用汉字”“鲇一钵二钵”的日语读音相同，从而（日本人）通过背诵以上“当用汉字”很容易记住 e 值。这种冗长数字的巧妙记忆方法，广泛流传。

无理数 e 值是 x 无限增大时， $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的极限，通常书写为： $x \rightarrow \pm \infty$ 时， $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e$ 或 $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 。

亦可写为 $x \rightarrow 0$ 时， $(1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e$ 或

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

欧拉认为，一切函数均可展开为无穷级数，而指数函数 e^x 可写为：

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

当 $x=1$ 时，有

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

式中 $n!$ 称为 n 的“阶乘”或“ n 的 factorial”。 $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ 。例如， $2! = 2 \cdot 1 = 2$ ， $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 。 $n!$ 也可写成 $\lfloor n \rfloor$ 形式。

如果不习惯用阶乘符号，也可将 e 写为

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \dots$$

$$+ \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} + \cdots$$

理解了牛顿和莱布尼茨的微积分之后，就会更明白 e 的奥秘。这个问题以后还要详细说明。指数函数 $y = e^x$ 微分之后，有 $\frac{dy}{dx} = (e^x)^1 = e^x$ ，而其积分则为 $\int y dx = \int e^x dx = e^x + C$ (C 为常数)：

e^x 微分和积分都不变的特征，是其它任何函数都不具备的。

本书将从 e 命名人欧拉的生涯讲起，结合微积分奠基人牛顿和莱布尼茨的经历，介绍无理数 e 的奥秘。

e, π, i 三者不仅都很奇妙，又均为数学上至关重要的数，而且三者之间还共同有一种密切的联系： $e^{\pi} = -1$ 。此等式的日语发音，恰巧与日文的一句诙谐语*吻合。因此，这一重要的等式很容易记住。

以上为本书内容梗概，此外，书中还介绍了一些有关数学家的业绩，并为文科（非理工科专业）的读者做一些解释。

如果对数学“头痛”的人，看了此书也会引发兴趣的话，笔者甚感欣慰。

堀场芳数

于 1991 年春

* 类似这种诙谐句在汉语中也常见。例如，数字 8802667，取其汉语发音相近的汉字则为“爸爸领儿遛遛去”。这样就极易记住那行冗长枯燥的数字。——译注

自然对数的底 e 之奥秘
——由发现无理数 e 到电脑程序



前 言

第一章	e 是无理数	(1)
§ 1.1	上古时期的记数和数的 表示方法	(1)
§ 1.2	数字始于结绳记数?	(2)
§ 1.3	玛雅数字和巴比伦数字	(2)
§ 1.4	怎样表示大的数?	(3)
§ 1.5	数的分类	(4)
§ 1.6	毕达哥拉斯学派	(7)
§ 1.7	数必然表示形状吗?	(12)
§ 1.8	欧洲数学元首——高斯	(13)
§ 1.9	大器晚成的数学家—— 魏尔斯特拉斯	(15)
§ 1.10	生前有死亡记事的戴德金	(16)
§ 1.11	集合论的发明人康托 死于精神病院	(18)
§ 1.12	仿照欧拉计算 e 值.....	(20)
第二章	指数和对数	(26)
§ 2.1	对数和对数函数	(26)
§ 2.2	从幂到指数函数	(27)
§ 2.3	发明对数的人	(28)
§ 2.4	作为对数起源的指数定律	(30)

§ 2.5	对数的性质	(31)
§ 2.6	常用对数	(33)
§ 2.7	用对数表计算	(35)
§ 2.8	对数尺及其应用	(38)
§ 2.9	笔算、对数算法和电脑程序	(47)
§ 2.10	16 世纪欧洲的科技形势	(61)
§ 2.11	内皮尔和布立格之间的 友谊	(61)
§ 2.12	布尔吉对数和指数定律 ...	(64)
§ 2.13	指数函数和对数函数的 关系	(65)
§ 2.14	指数函数和对数函数的 曲线图形	(65)
第三章	e 的命名人——欧拉	(69)
§ 3.1	微分、积分的发现	(69)
§ 3.2	连续函数	(70)
§ 3.3	微分法	(72)
§ 3.4	对数函数的微分	(74)
§ 3.5	自然对数的发现	(75)
§ 3.6	e 的发现人——欧拉	(76)
§ 3.7	俄国（皇家）科学研究院	(77)
§ 3.8	著名数学家欧拉双目失明	(78)
§ 3.9	七桥问题和拓扑学	(79)
§ 3.10	发现 e 的前前后后	(81)
§ 3.11	e 值的展开表达式	(81)
§ 3.12	归谬法	(82)
§ 3.13	超越数	(84)

第四章	含 e 函数的微分和积分	(86)
§ 4.1	微积分的发现	(86)
§ 4.2	卓越天才科学家牛顿的 成长经历	(87)
§ 4.3	莱布尼茨的一生	(91)
§ 4.4	微积分学先驱之争尚待裁决	(92)
§ 4.5	指数函数和微分	(92)
§ 4.6	不定积分	(95)
§ 4.7	定积分	(97)
§ 4.8	计算面积	(98)
§ 4.9	计算体积	(100)
§ 4.10	e^x 的定积分	(102)
§ 4.11	$\log_e x$ 的积分	(103)
§ 4.12	对数换底公式	(105)
§ 4.13	双曲正弦函数图形	(106)
§ 4.14	双曲余弦函数($\cosh x$) 图形	(108)
§ 4.15	双曲正切、双曲余切、双 曲正割、双曲余割的图形	(108)
§ 4.16	双曲函数的性质	(110)
第五章	e 与复数的关系	(111)
§ 5.1	解二次方程式	(111)
§ 5.2	印度古有的二次方程式解	(112)
§ 5.3	虚数是想象中的数	(115)
§ 5.4	有了虚数单位之后	(116)
§ 5.5	复数的分类情况	(117)
§ 5.6	复数运算	(118)
§ 5.7	复数分母实数化	(121)

§ 5.8	复数和高斯平面	(122)
§ 5.9	高斯平面上的运算	(124)
§ 5.10	简单的图解算法	(129)
§ 5.11	复数的极坐标表达法 ...	(130)
§ 5.12	复数的弧度表示法	(132)
§ 5.13	复数与弧度的关系	(134)
§ 5.14	极坐标表示与复数的积 和商	(135)
§ 5.15	德·莫依尔定理	(137)
§ 5.16	德·莫依尔定理的延伸	(139)
第六章	概率统计中的 e	(142)
§ 6.1	概率与统计	(142)
§ 6.2	什么是概率	(144)
§ 6.3	排列和组合	(145)
§ 6.4	统计	(148)
§ 6.5	身高的统计	(151)
§ 6.6	方差 σ^2 与标准误差	(153)
§ 6.7	彩票	(155)
§ 6.8	研究平均值的帕斯卡	(158)
§ 6.9	数理统计中的 e	(161)
第七章	e 、 π 和电脑程序	(173)
§ 7.1	笔算和电脑	(173)
§ 7.2	e 的展开式及其电脑程序	(175)
§ 7.3	圆周率 π 的展开式及其 电脑程序	(181)
§ 7.4	π 的其他程序	(198)
§ 7.5	根据高斯-勒让德法计算 π 程序	(212)
结束语		(218)
参考文献		(219)

第一章

是无理数

§ 1.1 上古时期的记数和数的表示方法

上古时期还没有出现数字。人们不知道命名数字和使用记数法,他们怎样数自己饲养的羊的数目呢?

清晨,羊群外出时,他们在树干上记下表示羊数的符号。傍晚,羊群归来,再小心谨慎地按照早上留在树干上的记号用手指一一地对照检查。若树上的记号与羊数相同,说明归栏羊数与出栏羊数相同。采用这种方法就能知道羊的增减。

这种方法实际是一种“一一对应”法。

其后,他们逐渐用手指和石子表示数目。

特别是,用身旁事物代表数目,是一种进步。具体如何表示则取决于同伴的认可。例如,可以用狮子的头代表1,鹭的翅膀代表2等。而且那时好像只在“一二个”与“许多”之间有不同。

据说新几内亚一带的土著居民至今仍用身体的一部分表示数目。左手小手指代表1,无名指为2,中指为

3,食指为 4,拇指为 5……

§ 1.2 数字始于结绳记数?

距今大约 800 年前的南美洲印加帝国利用绳扣表示“数”。一个绳扣代表 1,2 个绳扣表示 2,3 个绳扣表示 3……

这样,在表示数目多少的同时,也体现出了数字的作用。可以把绳扣看成一种数字。作为数的表示,“数字”大概就是这样在人类历史上逐渐完善起来的。

在数的表示法中有 5 进制、10 进制、12 进制、20 进制、60 进制等。

其中 5 进制、10 进制和 20 进制表示法与人的手指和脚趾数密切相关。而 12 进制、60 进制产生的原因是它们的约数较多,分东西时方便。

§ 1.3 玛雅数字和巴比伦数字

大约在公元前 3000 年,中美洲的危地马拉、墨西哥南部和尤卡坦半岛上居住着玛雅人。16 世纪初西班牙人征服了这一带。玛雅人不断抵抗,后来才服从墨西哥中央政府的管辖。

玛雅人有数的表示法的时代比古印度人早。他们使用的数字是 20 进制,用 $\cdot$ 和 $-$ 代表 1 到 19 的数字。

$\cdot$ 代表 1, $-$ 代表 5,2、3、4 分别为 $\cdot\cdot$ 、 $\cdot\cdot\cdot$ 和 $\cdot\cdot\cdot\cdot$ 。此外他们还用 $\cdot$ 代表女性, $-$ 代表男性。6 是 $\cdot-$,7 是 $\cdot\cdot-$,8 是 $\cdot\cdot\cdot-$,15 是 $\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$,16 是 $\cdot\cdot\cdot\cdot-$ 。而 20 要进位,

现在还没弄清它的书写方式。100 是 , 而 0 是 .

若把 0 看成眼睛, 100 看成“胡须和嘴”不是很有意思吗。

数的表示方法“记数法”中, 有很多种数字, 如罗马数字(I, II, III, ...), 希腊数字(I, II, III, ...), 埃及数字(0, 00, 000, ...), 巴比伦的楔形数字(, , , ...)和汉字中的数字(一, 二, 三, ...)等等。非常巧合, 它们都是十进制数字。

这些数字与阿拉伯数字不同, 它们有一大缺陷, 即没有代表空位的数字。换言之, 缺少与 0 等同的数字。

人类的祖先具体在什么时候提出了正整数 1、2、3、..., 这点不十分明确。但是现在即使文化水平最低的民族也会使用几个数词。由此状况推测, 很古的时候人类就会数数, 并且数很多的数。

现在还有一种麻将牌, 其中的数字与埃及数字表示法相同。

§ 1.4 怎样表示大的数?

公元前 3000 年到公元前 2000 年前, 古埃及和巴比伦等国已使用 100 万到 1000 万这样大的数目。

法兰西大帝拿破仑从埃及带回去刻有文字的祈祷石。由其上那些文字符号可以看出, 古埃及已使用如图 1-1 所示的象形文字表示大数字。

至于这些象形文字是什么物体的图形, 很令人费解。

若据考古学家的想象, 1 万是弯曲的手指的形状。

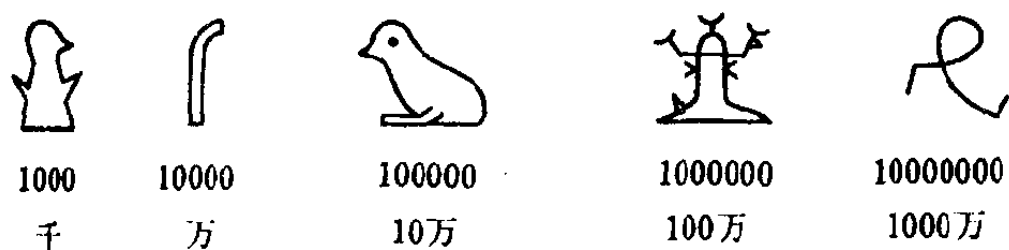


图 1-1 古埃及的象形数字

10 万是一种叫作江鳢 (burbot) 的动物的图形。100 万这个数字相当大, 人们表现出很惊讶的情景, 大概 1000 万过于大了, 大到该符号不可理解。

§ 1.5 数的分类

用专业术语可以说: “数由整数开始, 逐步发展到由有理数和无理数组成的实数。再由此扩大到复数。再发展下去是三元数或四元数等多元数。”

最初, 由数物体个数开始, 出现正整数 (即自然数), 从小的数目中扣除大的数目而出现负数。

将物体等分或分成几部分, 由此出现分数。以长度大的物体为长度单位进行测量时, 常常出现零头, 由此出现分数和小数。

当然小数是根据 10 进制方法进位的, 这与分数也有关。

不知何时出现的无理数, 在公元前, 毕达哥拉斯学派就已知道“边长为 1 的正方形的对角线长不能用正负整数表示, 也不能用分数或小数表示。”现在大家都知道, 该对角线长 $\sqrt{2}$ 。

同样, 也涉及到 π 与 $\sqrt{3}$ 。若借助专业术语, 那么“实数中除有理数外就是无理数”。

有理数可写成分数的形式, $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), 也就是采用比例的表现形式。而无理数是不能用分数形式表现的数, 即不能用比例表示。

如 $\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$, $\sqrt{3} = 1.7320508 \dots$, $\pi = 3.141592 \dots$ 那样, 无理数是无限小数。也就是说, 无理数包含在无限小数中。

在无限小数中还有 $0.333 \dots$ 或 $0.121212 \dots$ 这样的小数。它们是相同的数字不断循环的小数。值得注意, 这些无限小数不是无理数。

这是因为这些循环小数可用分数或比例来表示, 所以它们是有理数。

$$0.3333 \dots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad 0.121212 \dots = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

下面稍微离点题, 讲一下循环小数变换成分数的方法。

仔细分析循环小数后就会发现, 循环小数是由循环节不断重复而产生的。因而可写为

$$0.333 \dots = 0.\dot{3}, \quad 0.1212 \dots = 0.1\dot{2}$$

在循环节二端的数字上加上“ $\cdot$ ”。在 $0.\dot{3}$ 中只用了一个“ $\cdot$ ”, 而 $1.333 \dots$ 就可表示为 $1 + 0.\dot{3} = 1.\dot{3}$ 。小数点后有不循环部分时, 可按如下方式表示:

$$0.12323 \dots = 0.1\dot{2}\dot{3} = \frac{123 - 1}{990} = \frac{122}{990} = \frac{61}{495}$$

若不放心, 读者可亲自计算一下, $61 \div 495$ 确实是 $0.1\dot{2}\dot{3}$ 。

为将循环小数变换为分数, 首先在分母中按循环节的位数并列 9, 其后加 0, 0 的个数与不循环部分的位数相同。

再看分子。首先按顺序写下不循环部分的数字和一个循环节的数字,然后再减去不循环部分。

概括起来,可写成如下的形式

$$0.\alpha\beta\gamma\beta\gamma\cdots = 0.\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma} = \frac{\alpha\beta\gamma - \alpha}{990}$$

如前所述,毕达哥拉斯学派的人们早就认为存在有像 $\sqrt{2}$ 那样的无理数。在美索不达米亚、古加里西亚及古印度也有如此看法。但是在欧洲,那时却不认为它们是数。

把无理数作为数来使用是从印度传播各种数字后开始的。

随着解析学中极限和连续等概念的深入研究,对无理数的理解越加清晰。

到了19世纪,魏尔斯特拉斯(K. T. W. Weierstrass, 1815—1897)、戴德金(J. W. R. Dedekind, 1831—1916)和康托(G. F. L. P. Cantor, 1845—1918)等奠定了解析学基础。他们把有理数和无理数都按实数处理。从此以后,实数就分成为有理数和无理数两部分。

戴德金利用“切断”的概念,对实数下了定义。简单地说“数轴上的一切点,不是有理数就是无理数,排的满满的,毫无间隙。”

下面将实数分类小结为

$$\text{实数} \begin{cases} \text{有理数} \begin{cases} \text{正、负整数} \\ 0 \\ \text{分数(小数)} \end{cases} \\ \text{无理数} \begin{cases} \text{代数无理数}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots) \\ \text{超越数}(\pi, e, \dots) \end{cases} \end{cases}$$

如前所述,无理数是实数的一部分,是不能用 $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)形式表示的数。如 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π 以及后面将要介绍的 e ($=2.7182818284\cdots$)是数字不能循环的纯粹无限小数。其中数字的排列是无规律的。 e 和 π 也称为超越数。

包含无理数和有理数的实数可用图 1-2 的数轴表示。

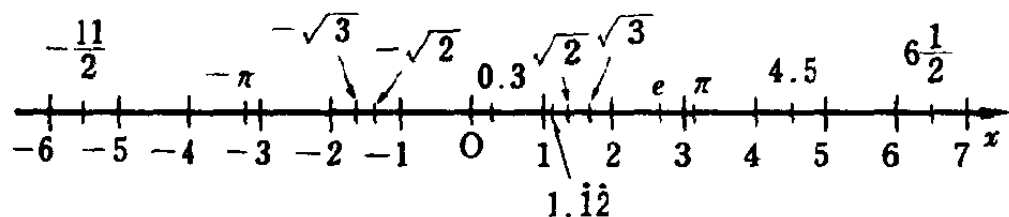


图 1-2

此直线可代表一切实数。

若使直线变化,比如用一根很锐的刀切这条直线,那么无论刀刃多锐,在刀口上总存在有某种类型的实数。这种切断叫“戴德金切断”。

在图 1-2 的数轴上,作为实例,示出了正整数 1、2、3、 $\cdots$,负整数 -1 、 -2 、 -3 、 $\cdots$ 以及 0。还有正负无理数 $\sqrt{2}$ 、 $-\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $-\sqrt{3}$ 、 π 、 $-\pi$ 、 e 、 $\cdots$ 等,也点出了有理数中循环小数 $0.\dot{3}$ 、 $0.\dot{1}\dot{2}$ 。当然图中标出了 $-\frac{11}{2}$ 、4.5 和 $6\frac{1}{2}$ 等有理数。

§ 1.6 毕达哥拉斯学派

本节稍微离题,讲述毕达哥拉斯学派。

毕达哥拉斯学派是毕达哥拉斯(Pythagoras,