钟开莱著　魏宗舒 等译

# 初等概率论

## 附随机过程

人民教育出版社

高等学校教学参考书

# 初等概率论附随机过程

钟 开 莱 著

魏宗舒 吕乃刚 王万中 汪振鹏 林举干译



人 民 教 育 出 版 社

## 内 容 提 要

本书系根据施普林格出版社(Springer-Verlag)出版的钟开莱著《初等概率论附随机过程》(Elementary Probability Theory With Stochastic Processes) 1975 年第二版译出. 原书是大学数学教科书，可作为我国高等学校有关专业的教学参考书.

高等学校教学参考书
初等概率论附随机过程
钟 开 莱 著
魏宗舒 吕乃刚 王万中 汪振鹏 林举干译
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
潜江县印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 12.25 字数 293,000
1979 年 8 月第 1 版 1980年 8 月湖北第 1 次印刷
印数 1—12,400
书号 13012 · 0382 定价 0.89 元

# 第一版序言

在过去半个世纪中，概率论从一个较小的、孤立的课题发展成为一个与数学许多其它分支相互影响，内容宽广而深入的学科.同时，它对各种应用科学，诸如统计学、运筹学、生物学、经济学和心理学的数学化起着中心作用——这里仅举几个在它们的名称前早已牢固地安上"数理"这个前缀词的科学. 概率成年的标志反映在该学科教科书内容的改变上. 在过去的日子里，这类书的大多数明显分成两种不同的类型，一种是组合的随机游戏，另一种是以正态分布为中心的"误差论". 在费勒的经典著作（见[Feller 1]①）于 1950 年问世后，这一时期就告终止. 我第一次讲授的有点份量的概率论教程就是取材于这部书的原稿. 随着时间的推移，概率论及其应用在大学课程中赢得了一个位置，成为许多领域中必修的一门数学学科. 现在，这一理论的要点在不同的水平上讲授，有时甚至在微积分之前讲授. 这本教科书是作为大学二年级水平的一门课程而写的，它并不要求对这一学科有任何事先了解，并且头上三章的大部分无需微积分的帮助就可以阅读. 接下来的三章则要求懂得如何使用无穷级数及其有关课题的知识，而对于涉及具有密度的随机变量的讨论，当然要求有某些微积分知识. 那些讲解"连续情况"的部分，是很容易与"离散情况"的部分分开的，并且可以留到以后去读. 头上六章的内容应该成为任何有意义的概率论初级导论的主要部分. 在这以后，一个合理的选择包括：§7.1（普哇松分布，它可插在本课程较前的部分），对 §7.3，7.4，7.6（正

---

① 方括号内的名字请查阅书末的一般参考文献威廉·费勒 William Feller (1906～1970).

态分布和大数定律）作某种不太深入的阅读，和§8.1（简单随机游动，这既有启发性又很有用）．所有这些，在二分制学校（一学年分为两个学期）可以一学期内完成．但对四分制学校（一学年分为四个学期）要一学期完成的话，就必须作一些削减．明确地说，对这样一个短课程，第一和第三章可以粗读一下，并把打星号的材料略去．无论哪种情况，例如在一个二分之一学年的课程或两个四分之一学年的课程中，只要时间允许，就务必对第七章的正态近似定理作扎实的讲解．最后的第八章，给出马尔可夫链一个完整而初等的描述，并且是课程主要部分在较成熟的水平上的一个推广．正态近似定理，连同打星号的§5.3，5.4（序贯抽样和卜里耶坛子模型），以及§7.2（普哇松过程），或者再包括附录中的某些补充，这些材料提供了由浅入深、稳步地进入随机过程领域的途径．把这些课题包括在内，本书适合于一门两个四分之一学年的课程，这也就是我多次对数学科学和学工程的学生讲授的内容．但是，经过头上六章的训练后，读者可以进入如上面提到的费勒专著中一些更深的专题．如果读者具有足够的数学基础，他也有资格选读一门严谨的课程，其内容有如我那本较深的书[Chung 1]中所提供的．

为了适合课堂之用，如何选择、组织和讲解材料，我确是动了一些脑筋，但我却没有试图提供一个装璜精美、适合精确的时间表或程序表的内容，就象大众对快速服务柜台要求提供的商品那样．因为教师对他的班级恰好需要什么，能作出最好的决定，所以应留给他一定程度的伸缩性和选择性．为了说明主旨和解释清楚，每章开头总包含一些容易阅读的部分，因此教师可以集中注意课文中较严格的方面．每章还包含一些略具挑战性的课题（例如§1.4，2.5）以供选择．它们并不是为了刁难初学者，而是想引导他们作进一步的研究．本书始终着重于初等概率论中基本概念和方法透

彻和细致的讨论，而修饰或复杂的技巧极少. 由于预见到初学者的困难，特地选择许多例题以引起更好的思考，这常常是用提出和回答一些诱导性的问题来实现的. 加入一些历史的、哲学的和个人的注释，可以给这一生动学科增添一点趣味. 我希望读者不但从这本书中学到一些东西，还在阅读过程中享受到一定的乐趣.

头上六章有二百多个习题，最后两章有八十多个习题. 许多是容易的，较难的都打上星号，书末附有全部答案. 带星号的节和段处理较专门或较细致的内容，可以跳过它们，但浏览一下还是值得的.

任何初等教科书的作者总得感谢无数前人. 我个人特别应该致谢的如下：Michel Nadzela 写出了我 1970 年在斯坦福大学的讲课笔记. Gian-Carlo Rota 见了这份笔记后，推动我把它改写为一本书. D. G. Kendall 对某几章初稿提了意见并进一步给予道义上的支持. J. L. Doob 自愿阅读大部分手稿并提供许多有益的建议. K. B. Erickson 在他所教的课程中用了一部分材料. A. A. Balkema 审阅了最后一稿并作了许多改进. Dan Rudolph 和我一起看了校样. Perfecto Mary 画了讨人喜欢的所有插图. Gail Lemmoud 用她一贯的高效率和可信任的态度担负打字工作. 最后，我非常高兴地感谢我的老出版商 Springer-Verlag 采纳我的新书，以开始一套新的大学教程丛书.

钟开莱

1974 年 3 月

# 第二版序言

为了改正第一版中的错误，做了坚决的努力．帮助我完成这一工作的有以下各位：Chao Hung-po, J. L. Doob, R. M. Exner, W. H. Fleming, A. M. Gleason, Karen Kafador, S. H. Polit 和 P. van Moerbeke. Kafador 女士和 Polit 博士提出了一份特别仔细的建议清单．最使人生气的错误，出现在习题的解答中．我检查了第一至第五章，Chao 先生检查了第六至第八章的所有这些错误．我强烈地希望继续残留在这一范围的错误不大可能有了．还作了一些小的改进和增加，但在这一点上并不是所有的劝告都可以遵行的．恳切希望使用这本书的人提出批评和意见，以便将来再版中研究采用．我还要感谢 Springer-Verlag 的工作人员，他们使这本书出版后这样快就出了修订版．

钟开莱

# 目　　录

JYJ 1151104

# 第一章　集　　合

## §1.1. 样本集合

近年来，小学生都要学习集合. 一个二年级小学生①曾被问到"班级中女学生集合"是什么？开出一张全体女学生的名单如

"南希，弗洛伦斯，莎莉，朱娣，安，巴巴拉，……"

就回答了这个问题. 如果有同名的怎么办？为了区别两个巴巴拉，可以指出她们的姓，或者称她们为巴巴拉一($B_1$)和巴巴拉二($B_2$). 在一个集合中，一个成员只能算一次，不能算两次.

集合的概念在数学各个分支中是常见的. 例如在几何学中，"与一已知点等距离的点的集合"是一个圆；在代数学中，"除1和它本身外没有其他整数因子的整数集合"是素数集合；在微积分学中，一个函数的定义域是一个数的集合，比如区间$(a, b)$，一个函数的值域也是一个数的集合.

在概率论中，集合的概念起着更基本的作用. 我们对很一般的集合和具体的特殊集合同样感兴趣. 对后一类集合，考虑下列例子：

(*a*) 一筐苹果；

(*b*) 接受某种医药治疗的55个癌症病人；

(*c*) 一个学院中的全体学生；

(*d*) 一个固定容器内的全体氧分子；

(*e*) 掷六颗骰子时，全体可能的结果；

---

① 指作者的儿子丹尼尔.

(*f*) 一个靶板上的全体点子.

让我们同时考虑下列“较小”的集合:

($a'$) 在那一筐苹果中的烂苹果;

($b'$) 那些对治疗有阳性反应的病人;

($c'$) 那个学院中专修数学的学生;

($d'$) 那些向上运动的分子;

($e'$) 那六颗骰子各自出现不同点子的情况;

($f'$) 那板上位于“靶心”一块小面积中所有的点子.

我们将对这些以及其他诸如此类的例子建立起一个数学模型,即对“一组事物”这个直观概念抽象化和一般化.第一我们称事物为点,而称这个组为一个空间;并在这些名称之前加上“样本”这个词以使它们跟其他含义相区别,同时也暗示了它们的统计根源.因此一个样本点是一个苹果,一个癌症病人,一个学生,一个分子,一个可能的机会结果,或者一个平常几何点的抽象.样本空间包含许多样本点;它只是一个名称,表示全体样本点的集合或总体.上面例子 ($a$)~($f$) 的任一个都可取作一个样本空间,同样($a'$)~($f'$)中任一较小的集合也可取作一个样本空间.我们取什么称为空间(宇宙)那都是相对的.

今后让我们规定用大写希腊字母$\Omega$(读作奥米伽)记一个样本空间.它可能包含任意多个点,甚至无穷多个点,但至少一个点.(可能你们早已发现数学可以是很刻板的!)其中任意一个点可用小写希腊字母$\omega$(读作奥米伽)来表示,不同的点可用各种方法如加下标或加$'$以资区别(如两个巴巴拉,而又不知道她们姓什么),例如$\omega_1$, $\omega_2$, $\omega'$, ….全部样本点的任何部分集合是$\Omega$的一个子集.由于已经规定了$\Omega$,所以我们干脆称它为一个集合.一个集合的极端情况可以是$\Omega$本身或者是没有点子的空集.当听说空集是一个重要实体并以特殊符号$\varnothing$来表示时,你们可能会觉得惊奇.

一个集合 $S$ 中点子的个数称为它的容量并记为 $|S|$, $|S|$ 是一个非负整数或 $\infty$, 特别 $|\varnothing|=0$.

如果对任何给定的点能够讲出它是属于还是不属于一个特殊集合 $S$, 则集合 $S$ 就完全确定. 属于或不属于 $S$ 分别记为

$$\omega\in S, \quad \omega\notin S$$

因此一个集合是由作为成员的规则所确定的. 例如 $(a')\sim(f')$ 中的集合除了受文字描述的限制外是完全确定的. 人们永远可以争辩"一个烂苹果"这几个字的意义，或者试图引人发笑提出什么在路边掷骰子, 有几颗滚入阴沟中去不见了, 某些假装爱思考的人可以对这些不必争辩的事例喋喋不休地争辩下去, 但我们不准备沉溺其中. 指明一种规则来确定一个集合的一个可靠方法是把集合的全体成员列出来，就象二年级小学生所做的那样. 这样做虽说不是不可能, 却往往是使人厌烦. 例如，在 § 3.1 中将表明 $(e)$ 中集合的容量等于 $6^6=46656$, 你们可以很快估计一下，要用象这样大小一本书的多少页才能记录完掷六颗骰子的全体可能结果? 在另一方面，我们可用一个系统化而又不致于产生错误的方法把它表成六元有序数组全体的集合:

$$(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)$$

其中 $S_j$ 可以取 1, 2, 3, 4, 5, 6 中任一个数, $1\leqslant j\leqslant 6$. 这个例子很好地说明了数学是很节约思想的(也节约印刷篇幅).

如果 $A$ 的每一点属于 $B$，那么 $A$ 被包含于 $B$，是 $B$ 的一个子集, 而 $B$ 是 $A$ 的一个包集. 我们用下列两式之一来表示这个事实:

$$A\subset B, \quad B\supset A$$

如果两个集合恰好有同样的点子, 则它们是相同的, 记作

$$A=B$$

叙述这问题的另一种方式是: 当且仅当 $A\subset B$ 和 $B\subset A$, $A=B$. 你们听起来好象这是不必要的绕圈子，但它却往往是验证两个集合

确是相同的唯一方法，要判断两个用不同方式定义的集合是否相同并不总是容易的. 你们知道偶数集合同方程$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0$的解的集合为什么相同吗？我们即将给出一些用这种绕圈子的方法来证明集合相同的例子.

## §1.2. 集合运算

我们通过对集合的运算来学习集合，正象通过对数的运算来学习数一样. 在后一种情况，我们还说作了数的计算：加、减、乘等等；对给出的数进行这些运算而产生的新的数，称为它们的和、差、积等等. 同样，对集合进行运算产生另外一些集合，我们也给它们新的名称. 现在我们开始讨论某些新名称的集合以及有关法则.

**余集**　集合$A$的余集是不属于$A$的那些点的集合，记作$A^c$. 记住，我们这里所讲的只是关于一个固定$\Omega$中的点！这可用符号表示如下：

$$A^c=\{\omega \mid \omega \notin A\}$$

读作，$A^c$是不属于$A$的那些$\omega$的集合. 特别有，$\Omega^c=\varnothing$和$\varnothing^c=\Omega$，这一运算有这样一个特性，如果对$A$连续两次进行这一运算，我们又重新得到$A$：

(1.2.1)　　$$(A^c)^c=A$$

**并集**　两个集合$A$和$B$的并集$A\cup B$是至少属于$A$和$B$之一的点的集合，用符号记作：

$$A\cup B=\{\omega \mid \omega\in A \text{ 或 } \omega\in B\}$$

其中“或”表示“及和或”这样刻板(合法)的意思. 以后我们总是这样理解.

**交**　两个集合$A$和$B$的交$A\cap B$是同时属于它们两个集合的

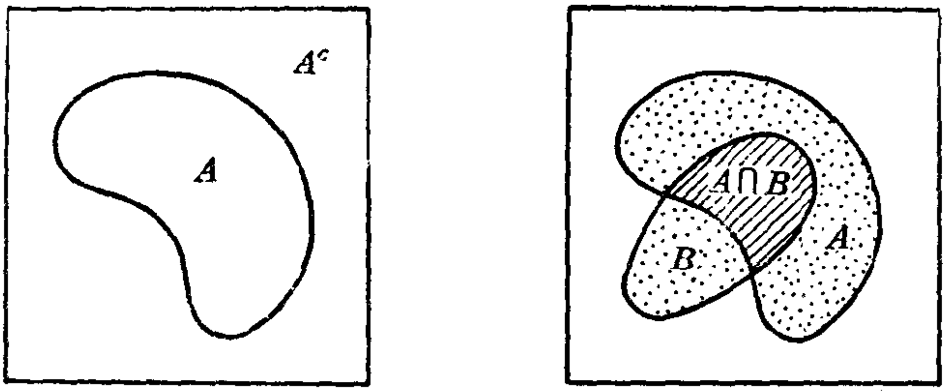



图 1

点的集合，用符号记作：

$$A\cap B=\{\omega\,|\,\omega\in A \text{ 和 } \omega\in B\}$$

下列定律的真实性是不证自明的：

**交换律** $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$

**结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

但是要看到，这些关系式是上面讲到的集合相同的例子．因此，它们应予证明．它们应与数的和及积相类似的定律

$$a+b=b+a,\quad a\times b=b\times a$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$$

作比较，但不能与之混淆．为了表示运算进行的顺序，我们需要用到括弧．但由于结合律，我们可以不用括弧写出

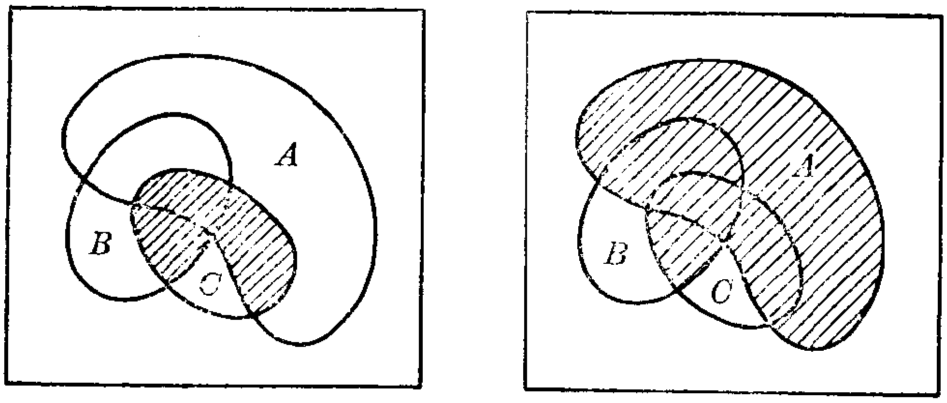
$$A\cup B\cup C,\quad A\cap B\cap C\cap D$$

然而象 $A\cup B\cap C$ 这样一串符号，由于意义不明确，因此没有定义；事实上，$(A\cup B)\cap C$ 和 $A\cup(B\cap C)$ 是不同的．你们应能用一张图很容易把这一点弄明白．

联系这两个运算的还有一组分配律如下：

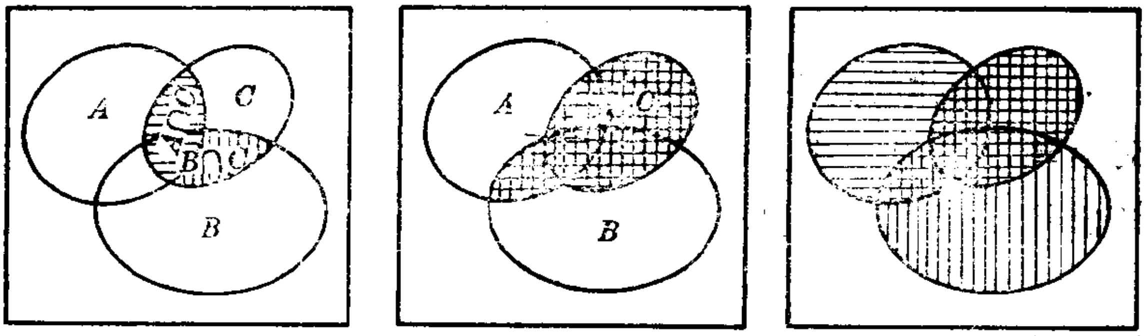
$(D_1)$ $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(D_2)$ $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$




$(A \cup B) \cap C$　　$A \cup (B \cap C)$

图 2




$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$　　$(A \cap B) \cup C$　　$=$　　$(A \cup C) \cap (B \cup C)$

图 3

有必要提几点注释．第一，$(D_1)$与算术的有相似之处：

$$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$$

但$(D_2)$却没有：

$$(a\times b)+c\neq(a+c)\times(b+c)$$

精细的读者一定注意到二者间的类似在开始的阶段已不成立．比如

$$A=A\bigcup A=A\bigcap A$$

但满足关系式 $a+a=a$ 的仅有一个数 $a=0$；而满足 $a\times a=a$ 的恰好有 0 和 1 两个数．

第二，你们可能已发现可以用图来证明或推翻关于集合的陈述．另外，用适当选择的例子来看出如$(D_1)$和$(D_2)$等公式的真实性也是一个好办法．假设

$$A=\text{便宜的东西}, B=\text{真正好的东西}$$

$$C=\text{食物(可吃的东西)}$$

那么$(A\cup B)\cap C$意味着“(便宜或真正好的)食物”，而$(A\cap C)\cup(B\cap C)$意味着“(便宜的食物)或(真正好的食物)”．因此，它们正好是同一样东西．这并不等于一个证明，因为我们不能仅凭一个实例就作出一般的结论．但是如果一个人能确信不论涉及怎样的逻辑结构或思维过程，上面的陈述并不依赖于$A, B, C$三件东西的确切本质(它们甚至可以是任何东西)，那么事实上，他得到了一个一般的证明．现在有趣的是对于$(D_2)$，同一例证不知怎么地就不那样明显(至少对于作者是如此)．为什么？可能是因为我们日常生活中某些逻辑模式比其它的较为常见．

如果人们注意到两个分配律之间的一个明显对偶性，上一注释就更有意义．把$\cup$和$\cap$两个符号互相对换一下就能从一个分配律得到另一个分配律．的确，利用这一对偶性就可从一个推出另一个(习题11)．

最后，由于$(D_2)$不那么直观，我们将趁这个机会给出公式$(D_2)$一个严格的证明，以说明怎样用上面提到的那个绕圈子的方法来表明两个集合相同．按照这一方法，我们必须证明：(i)$(D_2)$左方的每一点属于右方；(ii) $(D_2)$右方的每一点属于左方．

(i) 假设$\omega$属于$(D_2)$的左方，那么它或者属于$A\cap B$或者属于$C$．如果$\omega\in A\cap B$，则$\omega\in A$从而有$\omega\in A\cup C$；类似地，$\omega\in B\cup C$．因此$\omega$属于$(D_2)$的右方．在另一方面，如果$\omega\in C$，则$\omega\in A\cup C$同时$\omega\in B\cup C$，结果与前面一样．

(ii) 假设$\omega$属于$(D_2)$的右方，那么$\omega$可能属于也可能不属于$C$，而窍门就是要考虑这两种情况．如果$\omega\in C$，则它当然属于$(D_2)$的左方．在另一方面，如果$\omega\notin C$，那么由于$\omega$属于$A\cup C$，它必然属于$A$；同样地它必然属于$B$．因此它属于$A\cap B$，所以属于$(D_2)$的