天元研究生数学丛书

复变函数论选讲

张南岳 陈怀惠 编著

北京大学出版社

天元研究生数学丛书

复变函数论选讲

张南岳　陈怀惠　编著

北京大学出版社

北　京

新登字（京）159号

图书在版编目（CIP）数据

复变函数论选讲/张南岳，陈怀惠编著.—北京：北京大学出版社，1995.8

（天元研究生数学丛书）

ISBN 7-301-02730-3

Ⅰ．复… Ⅱ．①张… ②陈… Ⅲ．复变函数论

Ⅳ．0174.5

书　　名：复变函数论选讲（天元研究生数学丛书）

著作责任者：张南岳　陈怀惠　编著

责 任 编 辑：刘　勇

标 准 书 号：ISBN 7-301-02730-3/O·348

出　版　者：北京大学出版社

地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

电　　话：出版部 2502015　发行部 2559712　编辑部 2502032

排　印　者：北京大学印刷厂

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

850×1168毫米　32开本　13.75印张　346千字

1995年8月第一版　1995年8月第一次印刷

印　　数：0001—2,000册

定　　价：22.00元

内 容 简 介

本书主要讲授复变函数论中专题研究所应具备的基础理论和方法。全书共分十五章。内容包括：正规族，单连通、多连通区域的共形映射，单叶函数，整函数，Schwarz 引理及其应用，Gamma函数和Riemann zeta 函数，调和函数，从属性原理及其应用，极值长度，椭圆函数，亚纯函数的Nevanlinna理论，正规定则和Borel方向，单值化定理以及 Riemann 曲面上的微分。本书旨在架设从复变函数论的大学课程到专题研究之间的桥梁，为读者进行专题研究打下良好的基础。本书选材精练，说理清楚，推导严谨。既讲授复变函数论中经典的理论，又用通俗易懂的语言介绍了近代复分析中的Riemann曲面论，使读者尽快进入各专题的研究领域。

本书可作为大学数学专业高年级本科生和研究生复分析选修课的教材或参考书，也可供不专门从事复分析研究的数学工作者阅读。

《天元研究生数学丛书》书目

（标△号者表示待出版）

1.	复变函数论选讲	张南岳等编著
2.	近代分析引论	苏维宜编著
3.	高等概率论　△	程士宏编著
4.	复半单李代数引论　△	孟道骥编著
5.	群表示论　△	曹锡华等编著
6.	模形式讲义　△	陆洪文等编著

前　言

我国实行学位制度以来，研究生教育有了很大的发展。人们逐渐认识到：拓宽研究生的知识面是时代发展的需要。许多数学硕士点和博士点都要求在研究生阶段设立专业基础课程，使得不同专业、不同专题方向的研究生能对本专题以外的重要的、带基础性的近代发展也有所了解。

开设这类研究生专业基础课程的教材，当然是要介绍该方面的基本概念和基本方法。但在涉及近代的发展上不应过于专门，要照顾到各个不同分支的需要；也不能过于拘泥在技术细节上的推导，而是要在总体上、思想方法上给读者对该学科的主要内容有一个清晰的了解。因此在编写这类教材时，在深与广、精与粗、全貌与专题等方面要掌握适度才能使大多数来自不同专题方向的学生受益。

国内过去出版的大量为本科生编写的教材，因其没有反映近代的内容，不能满足需要；就是许多为研究生编写的教材，因其过分专门而不适用。可喜的是最近几年，出现了一批经过一段教学实践检验后符合上述要求的研究生专业基础课讲义。出版《天元研究生数学丛书》就是为了推动这类教材的编写，促进我国数学研究生培养水平的提高，希望得到数学界同仁们共同的关心和支持。

张恭庆

1995 年 3 月于北京

序　　言

由于复变函数论在数学中的重要地位，很多学校为数学专业的学生和研究生开设了选修课、学位课或专业课，讲授复分析中介于大学课程和专题研究之间的知识和理论。本书就是根据作者在北京大学和南京师范大学数学系多次讲授此课程的讲稿修改整理而写成的。第二作者在南开数学研究所1991—1992复分析年的讲习班上讲授Riemann曲面理论时曾以本书的最后两章作为讲稿，收到良好的效果。

本书涉及复变函数论的众多分支，包括调和函数，共形映射，单叶函数，整函数，特殊函数，值分布论和Riemann曲面，旨在架设从复变函数论的大学课程到专题研究之间的桥梁，着重讲授上述分支的最基本的知识。

本书第一章讲述从解析函数序列选取收敛子序列的Montel定理以及与之相关联的Vitali定理，它们作为工具将在很多章节中被应用。第二章证明共形映射理论的最基本的定理—— Riemann映射定理，它断言任一边界多于一个点的单连通区域都可共形映射为单位圆，同时介绍素端的概念，给出两个区域在共形映射下的边界对应关系。把多连通区域共形映射为平行割线区域和圆界区域这两类标准区域则是第四章的内容。

第三章讲授单叶函数的基础理论，除了面积定理，掩蔽定理，偏差定理和关于系数 a_2 的估计 $|a_2|\leq 2$ 外，还包括Grunsky不等式，凸函数和星形函数，Löwner微分方程以及Bieberbach猜测的de Branges证明概要。

第五章讲述整函数，它包括无穷乘积和Weierstrass因子分解定理，整函数的级和格以及零点收敛指数，有穷级整函数的

Hadamard 因子分解定理。用初等方法从Bloch定理证明 Picard定理，Schottky 定理和 Montel 正规定则（并且由此得到超越整函数的 Julia 方向）也是本章的内容。构造模函数，并且用它证明 Picard 定理和 Schottky 定理则是第九章第 3 节的内容。

在第六章中，我们介绍了单位圆以及任意平面区域的Poincaré 度量，并且用双曲几何的观点解释了经典的 Schwarz 引理，进而用超双曲度量的概念把 Schwarz 引理最终归结为十分一般的形式：所有超双曲度量中以 Poincaré 度量为最大。作为应用，给出 Schottky 定理的另一证明。

在第七章和第十一章简要介绍了一些特殊函数，包括 Gamma 函数 $\Gamma(z)$， Riemann zeta 函数 $\zeta(s)$， Weierstrass $\mathscr{P}$-函数 $\mathscr{P}(z)$，Weierstrass ζ-函数 $\zeta(z)$和σ-函数 $\sigma(z)$，以及 Jacobi 椭圆函数$\mathrm{sn}\, z$,$\mathrm{cn}\, z$ 和$\mathrm{dn}\, z$.同时还讲述一般椭圆函数的概念和性质，并且得到 Teichmüller 环形域的模的上、下界估计。

调和函数的 Poisson 公式，次调和函数和解 Dirichlet 问题的 Perron 方法，以及 Green 函数是第八章的内容。在这一章还讲述了调和测度的概念和性质并且据此证明角域上的全纯函数的Phragmén-Lindelöf 定理，它是最大模原理的改进。

第九章从 Lindelöf 原理（Green 函数关于区域的单调性）出发论述 Schwarz 引理，并且讲述与从属性有关的单叶函数的一些问题。第十章简要介绍了极值长度，拓扑四边形和环形区域的模的概念和性质，同时通过极值长度得到调和测度的一个估计并且据此把第八章的角域上的 Phragmén-Lindelöf 定理推广到曲边角域上，最终证明了 Denjoy-Ahlfors 定理：ρ 级整函数至多有2ρ个渐近值。

本书花较多的篇幅于值分布论和 Riemann 曲面理论。关于值分布论，我们讲述了 Nevanlinna 的第一和第二基本定理；并且由此出发证明了 Picard 定理，Borel 定理，亏量关系和 Schottky 定理；同时还推导出 Valiron 的基本不等式，用以证明亚纯函数的

Julia 方向和 Borel 方向的存在性。此外，还介绍了涉及导数的 Hayman 不等式，顾永兴正规定则和相应的奇异方向。在本书的最后两章，我们叙述了 Riemann 曲面，Riemann 曲面上的函数的微分和积分，以及覆盖曲面（包括正规覆盖曲面的单值性定理）的概念，并且详细地写出了单值化定理（任一单连通的Riemann 曲面都共形等价于单位圆，复平面或扩充复平面，这是 Riemann 映射定理从平面区域到一般的Riemann曲面的推广），Abel定理和 Riemann-Roch定理这三个Riemann 曲面的经典理论中最重要的定理的证明。

除了最后一章需要曲面拓扑的一些知识外，全书只要求大学复变函数论的基础，因而，本书可供大学数学专业高年级学生和研究生阅读，也可供不专门从事复分析研究的数学家以至其他学科的学者参考。

作者衷心感谢复旦大学任福尧教授，他仔细审读了书稿并提出了宝贵的意见。

由于篇幅的限制，本书不能涉及拟共形映射，Klein 群和 Teichmüller 空间这些复分析中比较近代的分支。同时，全书的选材受作者的看法的影响和水平的限制，一定有不妥之处，错误和疏忽也是难免的，敬请读者批评指正。

本书的出版得到国家自然科学基金天元基金的部分资助，没有这种资助本书的出版是难以实现的。北京大学出版社对本书的出版给予了很大的支持，责任编辑刘勇同志付出了辛勤的劳动，对此我们表示衷心的感谢。

张南岳　陈怀惠

1993年9月

目　录

第一章　正　规　族

§1　Montel 定 理

设 $f_n(z)$ $(n=1,2,3,\cdots)$是定义在区域D内的解析函数序列。称 $f_n(z)$是在D**内闭一致有界**的，如果它在D内的任一紧集E上是一致有界的，即对于任意紧集$E\subset D$，都存在一正数（与E有关），使得不等式$|f_n(z)|\leqslant M$对于一切n与E上的任意点z成立。

称解析函数序列$f_n(z)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 在区域D**内闭一致收敛**，如果它在D内任意紧集E上都是一致收敛的。

定理 1　若解析函数序列$f_n(z)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 在区域D内闭一致有界，并且在D内稠密点集A上是收敛的，则$f_n(z)$在D内闭一致收敛。

证明　设E是D内的任意有界闭集，ρ是E到D的边界的距离，ρ是一个正数。设$E_1=\{z:\ d(z,E)\leqslant\rho/2\}$。显然$E_1$也是一个有界闭集，$E\subset E_1\subset D$。由假定，$f_n(z)$在$E_1$上是一致有界的，即存在$M$，使得$|f_n(z)|\leqslant M$ 对于一切n和E_1上的任意点z成立。对于任意$z_1,z_2\in E_1$，满足条件$|z_1-z_2|<\rho/4$，我们来估计

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|.$$

以z_1为圆心作圆周γ：$|\zeta-z_1|=\rho/2$。易见，γ及其内部均在E_1内，故由 Cauchy 公式，

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z_1}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z_2}d\zeta\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{|f_n(\zeta)|\,|z_1-z_2|}{|\zeta-z_1|\,|\zeta-z_2|}|d\zeta|.$$

因为在γ上，$|\zeta-z_2|\geqslant|\zeta-z_1|-|z_1-z_2|\geqslant\dfrac{\rho}{2}-\dfrac{\rho}{4}=\dfrac{\rho}{4}$，所以

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot M|z_1-z_2|\cdot\frac{1}{\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho}{4}}\cdot 2\pi\cdot\frac{\rho}{2}$$

$$=\frac{4M}{\rho}|z_1-z_2|.$$

于是，对于任意给定 $\varepsilon>0$，若取 $\delta=\min\left(\frac{\rho}{4},\frac{\rho\varepsilon}{4M}\right)$，那么当 z_1，$z_2\in E$，且 $|z_1-z_2|<\delta$ 时，有

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|<\varepsilon,\quad n=1,2,3,\cdots. \qquad (1.1)$$

（我们称 $f_n(z)$ 在 E 上等度连续）

以 E 的每个点为圆心，以 $\delta/2$ 为半径作圆，它们构成 E 的一个开覆盖。由有限覆盖定理，可从中选出有限个圆 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_K$ 组成 E 的一个覆盖。由于 A 在 D 内稠密，所以每个 $\Delta_k(1\leqslant k\leqslant K)$ 上必有属于 A 的一点 z_k。因为 $f_n(z)$ 在 z_k 收敛，所以存在正整数 N，使得对于任意的 $m,n>N$ 及所有的 z_k（$1\leqslant k\leqslant K$）有

$$|f_n(z_k)-f_m(z_k)|<\varepsilon. \qquad (1.2)$$

今设 z 是 E 的任意一点，它必属于某一个 Δ_k，$|z-z_k|<\delta$，由 (1.1)，对于任意 $m,n>N$ 有

$$|f_n(z)-f_n(z_k)|<\varepsilon,\quad |f_m(z)-f_m(z_k)|<\varepsilon.$$

于是当 $m,n>N$ 时，

$$|f_n(z)-f_m(z)|\leqslant|f_n(z)-f_n(z_k)|+|f_n(z_k)-f_m(z_k)|$$
$$+|f_m(z_k)-f_m(z)|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.$$

所以 $f_n(z)$ 在 E 上一致收敛。证毕。

定理 2 (Montel) 若解析函数序列 $f_n(z)(n=1,2,3,\cdots)$ 在区域 D 内闭一致有界，则必有 $f_n(z)$ 的一个子序列 $f_{n_k}(z)(k=1,2,3,\cdots)$ 在 D 内闭一致收敛。

由 Weierstrass 定理，子序列的极限函数在 D 内是解析的。

证明 设 R 是 D 内的所有有理点（实部和虚部都是有理数的

点）作成的点集。R在D内是稠密的，且是可列的，记为$z_1,z_2,$ $\cdots$。由定理1，我们只要证明从$f_n(z)$（$n=1,2,3,\cdots$）可以选出子序列，它在$z_1,z_2,\cdots$收敛。因为依假设$f_n(z_1)(n=1,2,3,\cdots)$是有界的，所以有$f_n(z)$的子序列，记作

$$f_{11}(z),f_{12}(z),\cdots,$$

它在$z=z_1$是收敛的。同样，这个序列在$z=z_2$是有界的，又可从这个序列选出一子序列，记为

$$f_{21}(z),f_{22}(z),\cdots,$$

它在$z=z_2$是收敛的。如此继续下去，我们得到一串函数序列

$$\begin{array}{l} f_{11}(z),f_{12}(z),\cdots,\\ f_{21}(z),f_{22}(z),\cdots,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ f_{n1}(z),f_{n2}(z),\cdots,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

其中，后一个序列是前一个序列的子序列，且第n个序列在z_n收敛。最后取对角线序列

$$f_{11}(z),f_{22}(z),\cdots,f_{nn}(z),\cdots,$$

显然它是$f_n(z)$的子序列，并且在每一个z_n（$n=1,2,\cdots$）都是收敛的。证毕。

定理3（Vitali） 若解析函数序列$f_n(z)$（$n=1,2,\cdots$）在区域D内闭一致有界，并且在D内有一个极限点的集合A上是收敛的，则$f_n(z)$在D内闭一致收敛。

证明 首先我们证明$f_n(z)$（$n=1,2,3,\cdots$）在D内是处处收敛的。任给$z_0\in D$。若$f_n(z_0)(n=1,2,3,\cdots)$不收敛，则由它的有界性推知，必有$f_n(z_0)$的子序列$f_{n_k}(z_0)(k=1,2,3,\cdots)$与$f_{m_k}(z_0)$（$k=1,2,\cdots$），它们分别收敛到不同的数$\alpha$和$\beta$，$\alpha\neq\beta$。由Montel定理，可从$f_{n_k}(z)$（$k=1,2,\cdots$）和$f_{m_k}(z)$（$k=1,2,\cdots$）中分