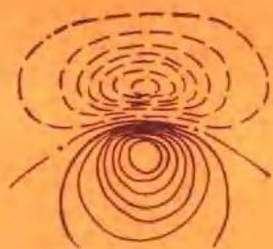


高等学校教学参考书

# 国外磁法勘探教材 选译



地质出版社

P 631.2  
001

13255

高等学校教学参考书



00289672

# 国外磁法勘探教材选译

孙克昌 阎桂林等译

程方道 等校

S27/119



200401234



地质出版社

## 内 容 提 要

本书选译了四本国外磁法教材的有关部分，第一章及第二章译自 F. S. Grant 及 G. F. West 《应用地球物理解释理论》第八章位场理论及第十二章岩石磁性；第三章及第四章分别译自 A. A. Логачев, В. П. Захаров 《磁法勘探》的第四章磁性体的磁场及其转换和第五章确定磁性体的深度及其几何和物理参数，第五章选译 B. S. Ramarao, I. V. R. Murthy 《重力及磁力勘探方法》第九章磁异常的定量解释，第六章选译 К. В. Гладкий 《重力勘探及磁法勘探》第五章重力和磁法勘探的工作方法。这些章节反映了不同的特点和风格，也可从中了解国外大学及研究生磁法教材的一般水平。本书可供地球物理勘探专业师生及有关科研、生产单位的物探人员参考。

高等学校教学参考书

### 国外磁法勘探教材选译

孙克昌 阎桂林等译

程方道 等校

地质矿产部教材编辑室编辑

责任编辑：邹新民

地质出版社出版

(北京西四)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

\*

开本：787×1092<sup>1</sup>/<sub>16</sub>印张：11<sup>1</sup>/<sub>2</sub>字数：267,000

1983年10月北京第一版·1983年10月北京第一次印刷

印数：1—2,450册 定价：1.60 元

统一书号：15038·教162

# 前 言

按照地质矿产部磁法勘探教材编委会1981年6月第一次会议的讨论结果，组织翻译了这本国外磁法勘探教材选译。我们从四种国外磁法教材中，选择了较有特色的章节，也适当考虑了整体的连贯性。目的是介绍国外大学及研究生磁法教材的基本内容，从中可以了解国外有关专业的一般水平以及苏联和欧美在磁法工作中采用的主要方法。

第一章及第二章选译 F. S. Grant 及 G. F. West《Interpretation Theory in Applied Geophysics》(1965)第八章位场理论及第十二章岩石磁性。这本书虽出版较早，但多年来美国加拿大不少学校采用此书作教材。对于磁法而言，本书第八章及第十二章写得简明扼要，特别是岩石磁性部分，至今仍是国外各种有关磁法教材中写得较好的。此二章均由阎桂林同志译，第八章由王恕铭同志校，第十二章由谭承泽同志校。

第三章及第四章选译 A. A. Логачев, В. П. Захаров《Магниторазведка》(1979)第四章磁性体的磁场及其转换及第五章确定磁性体的深度及其几何和物理参数。本书是苏联五年制地球物理勘探专业的教科书。有关反演方法的取材注重于在野外条件下的简便易行，且体系严谨，其中关于背斜褶皱的正反演方法，是一种新的有价值的解释方法。此二章由孙克昌、税蔚梅同志译，吴功建同志校。

第五章选译 B. S. Ramarao, I. V. R. Murthy《Gravity and Magnetic Methods of Prospecting》(1978)第九章磁异常的定量解释。本书是印度研究生教材，这一章重点介绍了应用特征曲线族的定量解释方法。本章由王喜臣、许延清同志译，申宁华、王启章同志校。

第六章选译 K. B. Гладкий《Гравиразведка И Магниторазведка》(1967)第五章重力和磁法勘探的工作方法。本章对工作精度的讨论较深入，至今仍有一定参考价值。由余惠祥同志译，黄国祥同志校。

各书的章节、图表已重新编排，符号则均采用原书体例。各章有相对独立性，读者可根据需要选读有关章节。全书最后由程方道统一校阅，限于译校者水平，错误、不当之处在所难免，恳请读者不吝指正。

一九八三年二月

## 目 录

<b>第一章 位场理论</b> .....	1
§ 1 位.....	1
重力位(1) 磁位(2)	
§ 2 场方程式.....	3
§ 3 等效层.....	4
§ 4 位场的延拓.....	5
§ 5 位的微分法.....	9
§ 6 重力场的多极展开.....	10
§ 7 关于矩在重力解释中的应用.....	12
§ 8 剩余质量的计算.....	14
§ 9 确定质量中心位置.....	14
§ 10 对数位.....	15
§ 11 二度体场的多极展开.....	16
§ 12 二度体剩余质量和矩的计算.....	17
<b>第二章 岩石磁性</b> .....	19
§ 1 铁磁性.....	19
§ 2 颗粒大小的影响.....	22
§ 3 磁性矿物.....	22
§ 4 磁性矿物的地球化学.....	24
§ 5 岩石的磁化强度.....	25
感应磁化强度(25) 等温剩余磁化强度(IRM)(28) 粘滞剩余磁化 强度(VRM)(28) 热剩余磁化强度(TRM)(28) 化学剩余 磁化强度(CRM)(29) 碎屑剩余磁化强度(DRM)(29)	
§ 6 古地磁.....	30
§ 7 岩石的退磁.....	30
§ 8 岩石磁化的实例.....	30
<b>第三章 磁性体的磁场及其转换</b> .....	38
§ 1 磁性体磁场强度各分量的一般解析式.....	38
§ 2 $\Delta T$ 磁场的解析式.....	43
§ 3 简单几何形体的磁场.....	45
球体(45) 垂直柱状体(46) 水平圆柱体(47) 薄板状体(48) 厚板状体(51) 水平薄板(52) 阶梯(53)	
§ 4 某些褶皱构造的磁场.....	55
§ 5 不规则几何形态磁性体上磁场强度的计算.....	59
§ 6 根据平面上给定的 $Z_a$ 场的分布计算 $H_a$ 场.....	61

## II

§ 7	高于已知磁场分布面的磁场强度的计算	64
§ 8	低于已知磁场分布面的磁场强度的计算	66
§ 9	磁场强度梯度的计算	68
<b>第四章</b>	<b>确定磁性体的深度及其几何和物理参数</b>	<b>70</b>
§ 1	球体及垂直柱状体	70
§ 2	水平圆柱体	72
§ 3	薄板状体	75
§ 4	厚板状体	85
§ 5	水平薄板	91
§ 6	台阶	92
§ 7	背斜褶皱	95
§ 8	线性变化磁化强度带的划分	97
§ 9	用简单公式计算磁性体埋深和产状要素的条件	99
§ 10	对非水平观测面上磁异常的地质解释	106
§ 11	磁场和重力场解析式间的关系	107
<b>第五章</b>	<b>磁异常的定量解释</b>	<b>111</b>
§ 1	磁异常与纬度及方位的相关性	113
§ 2	基本公式	115
§ 3	简单几何形体的磁异常 单极 (119) 倾斜偶极或双极 (121) 球体或偶极子 (125) 水平圆柱体 (130) 倾斜岩脉 (132) 断层 (141)	119
§ 4	不规则形体的磁异常	143
§ 5	航磁异常解释	146
§ 6	简单几何形体磁异常的计算机解释 球 (147) 水平圆柱体 (150) 倾斜岩脉 (150) 断层 (151)	146
<b>第六章</b>	<b>重力和磁法勘探的工作方法</b>	<b>154</b>
§ 1	方法选择	155
§ 2	观测剖面 and 观测点的布置	156
§ 3	等值线间距和观测精度	156
§ 4	选择工作必需的精度依据	161
§ 5	观测网的密度	163
§ 6	地面重力和磁力测量的大地地形测量保障	170
§ 7	航空磁测方法	172
§ 8	工作结果的图示	175

# 第一章 位场理论

重力解释的数学问题在于当某质量在一平表面上产生的重力场已知时确定该质量的分布。在磁法解释中的数学问题是当某磁化物质在一平表面上的磁场为已知时确定该磁化物质的分布。在这两种情况中,我们都遇到了位场理论的“反演”问题,即由场源的位来确定场源问题。可惜,这个问题没有单一的解,因为根据场源的位完全地、单值地确定场源的大小及形状的信息是不充足的。解的不确定性是复杂的,并表现为各种不同的方式。其主要困难表现在试图把实际体积和重力质量的密度分离开来,或者是企图把磁性物质的磁化强度和实际体积区分开来。在这点上,位场的多解性是固有的。

位场测量结果的地球物理解释主要是确定一个场源,它的大小及形状可调整到使其产生的场与所得的观测值相吻合。这在位场理论的应用和计算中需要相当程度的技巧才能做到,而本章的目的就是为这个任务提供必要的基础知识。位论方面一般的专题论文,因很少论及“反演”问题,对我们帮助不大。为此,我们把本章限制在某些正规的作法上,这些作法的结果将在后面的几章中用到。

## §1 位

### 重力位

牛顿万有引力定律可表示如下:质量为  $m_1$  和  $m_2$ , 相距为  $r$  的两个质点间相互作用的引力数值为

$$F(r) = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

并在  $r$  的方向上作用。对距  $m_1$  为  $r$  的任何一个点  $p$  上单位质量的引力被定义为  $m_1$  质点的重力场。它写为

$$F(r) = -G \frac{m_1}{r^2} r$$

这样的场是保守场,因此它是标量位函数  $U(r)$  的微商,如下所述:

$$F(r) = -\nabla U(r)$$

这里的  $U(r) = -Gm_1/r$  是  $m_1$  质量的重力位。所有其它场的量值都可以用  $U$  来表示。

因为在任意空间的位都是可加的,所以通过积分可以计算由连续分布的物质引起的体外某点处的重力位。如果质量是整个体积  $V$  以密度  $\rho(r_0)$  连续分布的话,那么在体外一点  $P$  处的重力位就是(见图1-1)

$$U_p(r) = - \int_V \frac{G dm}{|r-r_0|} = -G \int_V \frac{\rho(r_0) d^3 r_0}{|r-r_0|} \quad (1.1.1)$$

式中

$$|r-r_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma}$$

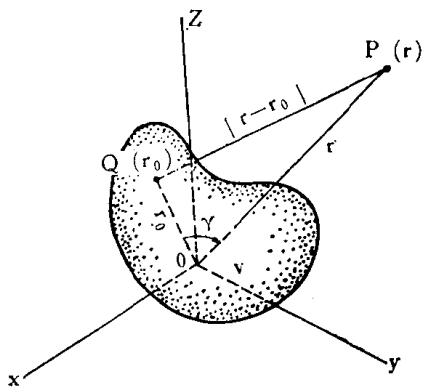


图 1-1

假如求出整个地球的体积分的话，人们就获得在任意空间处的地球的重力位，并通过重力位的微分就可求出重力场。如果  $P$  点是在地球的表面，那么该重力场用符号  $g$  表示。实际上，因为  $g$  通常取正，所以  $g$  是真正的负场强，即  $g = |-\mathbf{F}(\mathbf{r})| = |\nabla U_p|$ 。尽管实际上测量到的  $g$  是作用在单位质量上的力，而不是一个加速度，但  $g$  仍常被称为重力场，重力加速度，或自由落体加速度等。 $g$  的单位是伽 ( $=1\text{cm/s}^2$ )，其方向处处为铅直的。在重力场中一静止状态质量  $m$  的重量是力向量，其量值为  $mg$ ，方向为垂直向下。

$g$  的数值取决于 (a) 地球质量的体分布。如通过密度函数  $\rho(\mathbf{r}_0)$  所表示的；(b) 地球的实际形状。象由积分限所表明的那样，按平方反比规律，近  $P$  点处  $\rho(\mathbf{r}_0)$  的变化要比远处  $\rho(\mathbf{r}_0)$  的变化对  $g$  所产生的影响要大得多。而且事实上，在  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|=0$  附近积分将表现出是奇异的。因此，当地下较浅处的物质中密度甚至有较小的变化时，常常引起能观测到的  $g$  的变化。

## 磁位

磁偶极子通过它们的磁场也能作用于在一定距离上的另一磁偶极子。

磁矩为  $m$  的一磁偶极子对相距  $r$  处的一单磁极（假设它存在的话）作用时，单位磁极强度所受到的力是

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{2m\cos\theta}{r^3} \mathbf{r}_1 + \frac{m\sin\theta}{r^3} \theta_1$$

这里  $\theta$  是由  $m$  到  $r$  量得的角度， $\mathbf{r}_1$  和  $\theta_1$  分别为  $r$  及  $\theta$  的增加方向上的单位向量。 $\mathbf{H}$  称为  $P$  点处的磁场强度。

据该力场的构造，显然磁场强度也可从一个标量位函数导出。我们可写作

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla A(\mathbf{r})$$

这里的

$$A(\mathbf{r}) = \frac{m\cos\theta}{r^2}$$

并且显然有

$$A(\mathbf{r}) = -m \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right)$$

$A(\mathbf{r})$  称为磁矩为  $m$  的偶极子的标量磁位。

导磁性物质放在一外磁场，如地磁场中时，获得一种感应磁性，该磁性的强度取决于该物质的磁化率。有些物质显示一种与周围环境无关的永久磁性。上述情况，无论哪一种我们都可以假设，充满体积  $V$  的物质具有单位体积磁矩为  $\mathbf{M}(\mathbf{r}_0)$  的连续分布。这样，通过位的叠加原理，在  $V$  外一  $P$  点处的磁标量位是

$$A(\mathbf{r}) = - \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d^3r_0 \quad (1.1.2)$$

在  $P$  点处的总磁场强度为  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla A(\mathbf{r})$ 。将  $A(\mathbf{r})$  代入这个等式，我们得到



$$H(\cdot) = \int_V (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d^3r_0$$

如果我们假设磁化强度方向在整个体积  $V$  内处处是相同的, 并用  $\alpha$  符号表示, 因为  $\mathbf{M} \cdot \nabla = M(\partial/\partial\theta)$ , 所以该表达式变成

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \frac{\partial}{\partial\alpha} \int_V M(\mathbf{r}_0) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d^3r_0 \quad (1.1.3)$$

当我们取 (1.1.1) 式和 (1.1.3) 式中的  $\rho$  及  $M$  为常量时, 可导出由一均匀质量分布所产生的重力场和磁场之间的一个有趣的关系式。其结果原来是

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{M}{G\rho} \frac{\partial}{\partial\alpha} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (1.1.4)$$

这个关系式是由泊松首先发现的。根据这个公式, 均匀物体产生的磁场的的所有参数都可从重力场导出。这个事实, 对以后的磁性解释理论的发展非常有用。

## § 2 场方程式

在体积  $V$  外的地方, 位函数  $U(\mathbf{r})$  和  $A(\mathbf{r})$  的体积积分是非奇异的, 并且显然满足拉普拉斯方程。因此, 在自由空间的场方程就是

$$\text{重力场} \quad \nabla^2 U = 0$$

$$\text{磁 场} \quad \nabla^2 A = 0$$

反之, 当在  $V$  内时, 在  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  处积分变为奇异的。为了孤立这个奇异点, 我们用一半径为  $\epsilon$  体积为  $v$  的小球把它包围起来。这样位  $U$  便可写为

$$U(\mathbf{r}) = -G \int_{V-v} \frac{\rho(\mathbf{r}_0) d^3r_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - G \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}_0) d^3r_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

现在第一项是非奇异的, 并且在任何地方它都是调和的。在第二项中, 假如我们让  $\epsilon$  足够小的话, 则我们就可把  $\rho(\mathbf{r}_0)$  看作常量。这样就允许我们写为

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}_0) = -G\rho(\mathbf{r}_0) \int_v \nabla \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d^3r_0$$

根据高斯定理, 它又可写为

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}_0) = -G\rho(\mathbf{r}_0) \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d^2r_0$$

这里的  $S$  是半径为  $\epsilon$  的小球体的表面, 所以在上述的积分中  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \epsilon$  及  $\mathbf{n} \cdot \nabla = \partial/\partial\epsilon$ 。这样在  $\epsilon \rightarrow 0$  取极限时,

$$\begin{aligned} \Delta^2 U(\mathbf{r}_0) &= -G\rho(\mathbf{r}_0) \left( \frac{d}{d\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \right) 4\pi\epsilon^2 \\ &= 4\pi G\rho(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

类似地有

$$\nabla^2 A(\mathbf{r}_0) = 4\pi \nabla_0 \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \quad (1.2.1a)$$

在由质量体或磁性物体所占据的空间里, 是处处满足这些众所周知的泊松方程的。

### § 3 等效层

我们现在来看看,已知某一水平面上重力场的法向分量,如何建立该水平面上面密度分布与重力场的关系。把一物质看作是在  $z=0$  的水平面上以面密度为  $\sigma(x, y)g/cm^2$  的分布。当计算这个密度层在  $z=0$  的水平面上某一  $Q$  点处的重力场时,我们选择了一套圆柱坐标系  $(r, \theta, z)$ , 坐标系的轴是垂直的, 原点置于  $Q$  点处 (图 1—2)。在垂直轴上的某一  $P$  点处, 重力位应是

$$U_p = -G \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(r, \theta)}{\sqrt{r^2 + z^2}} r d\theta dr$$

而重力场在  $P$  点处为  $-\nabla U_p$ ,

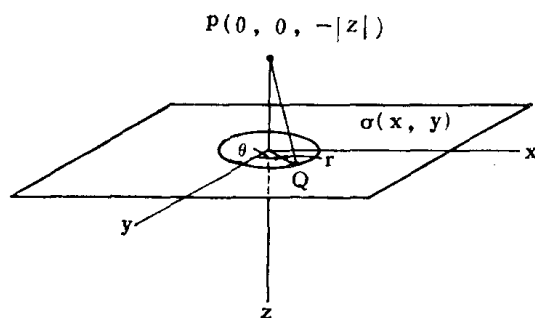


图 1—2 等效层

这里我们必须注意重力场和重力效应二者之间的主要区别。地球的重力场仅仅有一个方向,事实上我们的参考系统的取向就是按照这个场定的。垂直方向是按照  $g$  的方向定义的,垂直于  $g$  方向的就是水平。事实上,实际中的水平是利用水平仪由当地的水准面定出。由于异常体的重力场能在相对于垂直方向的各种方向上作用,该方向取决于我们相对异常体所在的地点。但是,这些细小的、局部的干扰与非常大的地球重力场混合在一起而被观测到。测量仪器的调节是在总的重力场中,因而仅能对总场  $g$  的方向上的干扰场分量,或者换句话说干扰场的垂直分量产生响应。在描述这个分量时,我们用了重力效应这个术语,它是真正由局部质量所产生的地球重力场强度的变化。我们必须记住这个事实,假如习惯用符号  $\Delta g$  表示重力效应的話,那么符号  $g$  就专供用来表示地球的重力场强度。无疑在我们的叙述中,  $\Delta g$  是在沿正常场  $g$  的方向上被测到的,而正常场  $g$  的方向假定是不受局部质量存在的影响,或换言之,在异常区域内垂直方向实际上仍保持着未受干扰。这一点只有当  $\Delta g \ll g$  时才成立,在实际中这条件总是满足的。

因为位  $U$  是由  $z=0$  平面上局部分布的质量引起的,所以对于  $P$  点处的重力效应写为

$$\Delta g_p = \frac{\partial U_p}{\partial z} = Gz \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(r, \theta)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} r d\theta dr \quad z < 0$$

由于  $\Delta g$  是在  $g$  的方向上被测得的,所以现在是正号。我们希望求得当  $z \rightarrow 0$  时的这个积分值。通常,这积分在  $Q$  点处将产生奇异,因此我们把积分区间分为二部分:在  $Q$  点处半径为  $\epsilon$  的一个小圆部分以及  $z=0$  平面的其它剩余部分。如果半径  $\epsilon$  取得十分小,小到以致于整个小圆中的  $\sigma(r, \theta)$  在  $Q$  点的值没有明显地变化,则第一部分积分成为

$$T_1 = G\sigma(Q)z \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} \frac{rd\theta dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= 2\pi G\sigma(Q) \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{\epsilon^2+z^2}} \right)$$

虽然  $\epsilon$  可以是象我们所说的那样小, 但我们假设它是有限的, 结果  $\lim_{z \rightarrow 0} T_1 = 2\pi G\sigma(Q)$ 。此外, 第二部分的积分是非奇异的, 结果  $\lim_{z \rightarrow 0} T_2 = 0$ 。因此我们最后得到

$$\Delta g(Q) = 2\pi G\sigma(Q)$$

但是,  $Q$  点在  $z=0$  平面上的位置是任意的, 所以我们可以写出

$$\Delta g(x, y) = 2\pi G\sigma(x, y) \quad (1.3.1)$$

现在我们假设在  $z=0$  平面上的重力效应  $\Delta g$  是由该平面下某一未知的质量分布所产生的。那么不管质量实际上是怎样分布的, 它在  $z \leq 0$  空间任意一点处的作用, 都和以  $z=0$  面上由 (1.3.1) 式所给定的面密度分布来代替的作用完全一样。因而这种密度层被称为在  $z > 0$  空间未知质量分布的等效层。

## § 4 位场的延拓

格林定理表明, 如果  $U$  和  $W$  在某一体积  $V$  内是连续的函数, 并且它们的一阶和二阶微商是连续可积的话, 则有

$$\int_V (U\nabla^2 W - W\nabla^2 U) d^3r_0 = \int_S \mathbf{n} \cdot (U\nabla W - W\nabla U) d^2r_0 \quad (1.4.1)$$

这里  $S$  面包围着体积  $V$ 。如果我们让  $U$  代表  $V$  内质量产生的重力位,  $W$  表示函数  $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|=1/R$ , 这里的  $\mathbf{r}$  是  $V$  外  $P$  点的位置向量,  $\mathbf{r}_0$  是  $V$  内  $Q$  点的位置向量, 那么对  $U$  和  $W$  的限制就被满足。

在  $V$  外任一点  $P$  处有

$$U_p(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}_0) d^3r_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

在  $V$  内时, 从 (1.2.1) 式出发, 因

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}_0) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}_0)$$

所以替换式中的  $\rho(\mathbf{r}_0)$ , 我们求得

$$U(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla^2 U(\mathbf{r}_0) d^3r_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

因为  $P$  点位于  $V$  外, 所以处处  $\nabla^2 W = 0$ , 并且 (1.41) 式的左边变成

$$-\int_V \frac{\Delta^2 U(\mathbf{r}_0)}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} d^3r_0 = 4\pi U(\mathbf{r})$$

于是

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right) \right] d^2r_0 \quad (1.4.2)$$

现在, 如果我们假定所有质量位于  $z > 0$  半空间的一个有限的区域内, 那么就可让  $S$

面取作为一个很大的,在  $z > 0$  空间被  $z = 0$  平面封闭的半球 (图 1—3)。假如半径取作足够大的话, (1.4.2) 式中的被积函数在  $S$  曲面上处处以  $R^{-3}$  的形式趋于零, 则该积分简化成,

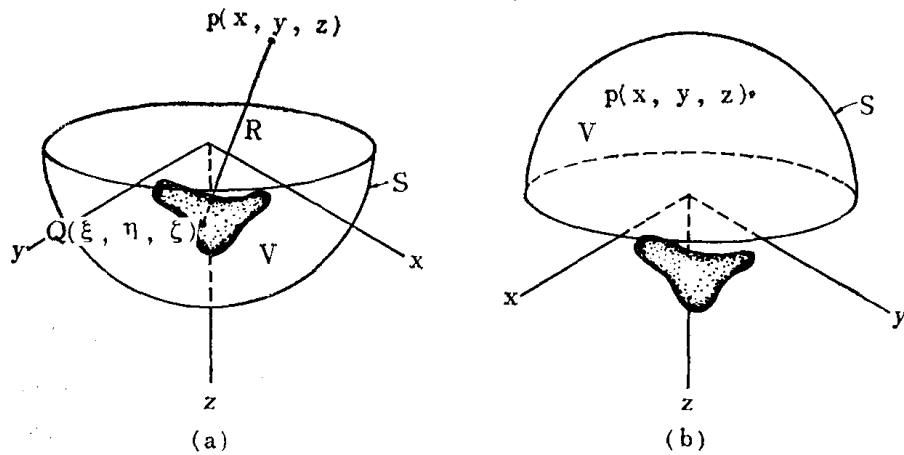


图 1—3 延拓原理

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -U \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \right]_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad z \leq 0 \quad (1.4.3)$$

式中  $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ 。相反, 因为  $z < 0$  空间没有质量分布, 所以在这个区域内处处有  $\nabla^2 U = 0 = \nabla^2 W$ ; 因此, 如果我们在  $z = 0$  平面之上封闭  $S$  面的话, 则发现 (1.4.2) 式变成

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ U \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \right]_{\zeta=0} d\zeta d\eta \quad (1.4.4)$$

因此, 如果我们将 (1.4.4) 与 (1.4.3) 式相加, 得到\*

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} d\xi d\eta$$

[\* 对于这个结果的一个比较严格的证明, 可参看 Kellogg<sup>(1)</sup>, 第五章] 因为  $U$  是由位于  $z > 0$  空间内的质量所产生的重力位, 所以我们可以给出

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \Delta g$$

并因此有

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(\xi, \eta)}{R} d\xi d\eta \quad z \leq 0 \quad (1.4.5)$$

通过对 (1.4.5) 式的微分, 我们求得

$$\Delta g(\mathbf{r}) = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} = \frac{|z|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(\xi, \eta)}{R^3} d\xi d\eta \quad z \leq 0 \quad (1.4.6)$$

该式表明, 如果  $\Delta g$  在  $z = 0$  平面上处处已知, 则在  $z \leq 0$  空间任何地方的  $\Delta g$  都可自然而然地被确定。通过 (1.4.6) 式计算出地面之上任何水平面上的  $\Delta g$  就是通常所称之的向上延拓, 而它由一个地面数据的简单数值积分组成

尽管有许多疑问，但(1.4.6)式的一个更实际的应用在于，假设在地面与该水平面之间没有质量分布的话，求 $z=0$ 之下某一水平面上 $\Delta g$ 的分布，该 $\Delta g$ 在 $z=0$ 平面上产生所观测到的重力效应，这就是通常所谓的向下延拓。但需要把(1.4.6)式反转过来，因为等式的左边现在是已知的，相反，积分号内的函数是要被确定的。这一反转可通过下面傅氏积分来实现。我们用脚标 $o$ 及 $z$ 相应表示地面( $z=0$ )上的和 $z$ 深度面上的 $\Delta g$ 值。那么，取1.4.6式两边对于 $x$ 和 $y$ 的傅氏变换，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g_o(x, y) e^{i(px+qy)} dx dy = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g_z(\xi, \eta) d\xi d\eta \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{-3/2} e^{i(px+qy)} dx dy$$

将公式右边的变量 $x$ 及 $y$ 分别变换为 $x-\xi=r \cdot \cos\theta$ 及 $y-\eta=r \cdot \sin\theta$ ，并且在积分区间内使 $\rho = u \cos\varphi$ ,  $q = u \cdot \sin\varphi$ ，则公式右边的第二项积分变成

$$e^{i(p\xi+q\eta)} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (r^2+z^2)^{-3/2} e^{iur \cos(\theta-\varphi)} r d\theta dr \\ = 2\pi e^{i(p\xi+q\eta)} \int_0^{\infty} J_0(ur) (r^2+z^2)^{-3/2} r dr \\ = 2\pi e^{i(p\xi+q\eta)} \frac{e^{-uz}}{z}$$

因为 $u = \sqrt{p^2+q^2}$ ，所以我们最后得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g_o(x, y) e^{i(px+qy)} dx dy \\ = e^{-\sqrt{p^2+q^2} \cdot z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g_z(\xi, \eta) e^{i(p\xi+q\eta)} d\xi d\eta$$

如果我们用 $F_o(p, q)$ 代表 $\Delta g_o(x, y)$ 相对 $x$ 和 $y$ 的傅氏变换，用 $F_z(p, q)$ 代表 $\Delta g_z(x, y)$ 的傅氏变换，那么，上方程式可简化为符号的形式，

$$F_o(p, q) = \exp(-\sqrt{p^2+q^2}z) F_z(p, q)$$

这个等式的指数项移项，因此我们求得

$$F_z(p, q) = \exp(\sqrt{p^2+q^2}z) F_o(p, q) \quad (1.4.7)$$

这样一来

$$\Delta g_z(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_o(p, q) \exp[\sqrt{p^2+q^2}z - i(p\xi+q\eta)] dp dq$$

因为 $F_o(p, q)$ 由 $\Delta g_o(x, y)$ 算得，所以这个公式就成为向下延拓问题的正式解。

然而，由于积分中指数因子的出现，给这个解的收敛性造成了严重的困难。除非 $F_o(p, q)$ 函数衰减得比 $\exp(-\sqrt{p^2+q^2} \cdot z)$ 来得更快，否则 $\iint |F_z(p, q)| dp dq$ 积分不存在，而向下延拓积分没有解。因此，地表重力效应 $\Delta g_o(x, y)$ 应为平滑的函数，该函数的傅氏频谱在较短波长范围的衰减要比指数项的增加更快，这点是绝对必要的。假如做不到这

点, 那是由于近地表质量产生了重力效应, 而该重力效应根据我们的基本假定是应当被消除掉的。为此, 在延拓之前, 通常需要设计一个低通滤波器用以压制近地表对剩余重力场的影响。滤波器的截止波长由  $z$  值确定。

在实际处理重力资料中常采用两种低通滤波方法。其一是将剩余重力图数字化, 用一套在  $x$ 、 $y$  的等间距点上取得的数据替代等值线值。这就自动地在  $\Delta g$  的傅代变换中排除了所有比二倍测点间距更短的波长的信息。这个截止点的位置通过调节测点间距来控制, 这样使这个方法考虑到大量准备研究的数据时多少有点不便。另一方法由一数学滤波器构成。假若我们规定

$$\overline{\Delta g_0}(x, y) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g_0(\xi, \eta) e^{-[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] / 4\gamma} d\xi d\eta \quad (1.4.8)$$

取二边的傅氏变换, 我们求得

$$\overline{F_0}(p, q) = e^{-\gamma(p^2 + q^2)} F_0(p, q)$$

于是, (1.4.8) 式的积分变换能使  $F_0(p, q)$  在比较短的波长时有必需的衰减。如果我们以  $\overline{\Delta g_0}(x, y)$  取代 (1.4.6) 式中的  $\Delta g_0(x, y)$ , 然后两边做傅氏变换, 那么我们得到

$$e^{-\gamma(p^2 + q^2)} F_0(p, q) = \exp(-\sqrt{p^2 + q^2}z) F_z(p, q)$$

它的傅氏反变换为

$$\Delta g_z(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(p, q) \exp[\sqrt{p^2 + q^2}z - \gamma(p^2 + q^2) + i(p\xi + q\eta)] dp dq \quad (1.4.9)$$

这新的积分在  $z$  的有限范围内完全收敛, 并能求值。这样, 向下延拓问题的解是存在的, 但它不是对剩余重力场本身, 而是根据 (1.4.8) 式定义的  $\overline{\Delta g_0}(x, y)$  量值, 该  $\overline{\Delta g_0}(x, y)$  量值是  $\Delta g_0(x, y)$  经过圆滑的。在这种情况下, 滤波由给定的  $\gamma$  值控制,  $\gamma$  通常根据据  $z$  值而定。

圆滑技术的应用在向下延拓中起重要的作用。它们的用途完全为事实所证实, 如果没有圆滑技术向下延拓的解就不能求出。仅仅重力场的圆滑部分可向下延拓到任何一个相当的深度; 剩余的就留在地表。这种说法并不暗示  $\Delta g_0$  较圆滑部分就必定源于更深处, 只是它有这个可能。任何位场的源到这个范围总是多解的。计算该积分的过程将在下章中详细讨论。

因为磁标量位在自由空间中也是调和的, 所以磁位根据重力场中应用的同一理论原理也能做向上或向下的延拓。首先指出, 如果我们由 (1.4.4) 式减去 (1.4.3) 式的话, 那么我们将获得下面位的向上延拓公式:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{|z|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, \eta)}{R^3} d\xi d\eta \quad z \leq 0$$

这个积分在重力解释中实际用得很少, 因为与等效层有关的量值是  $\Delta g$ , 而不是  $U$ 。然而, 在磁法中等效层与标量位  $A(\mathbf{r})$  有关, 因此, 标量位  $A$  和场强垂直分量  $Z$  二者都在延拓中被使用。该积分公式是

$$A(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(\xi, \eta, 0)}{R} d\xi d\eta \quad (1.4.10)$$

式中  $Z = -\frac{\partial A}{\partial z}$ , 所以积分又可写作

$$A(x, y, z) = \frac{|Z|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\xi, \eta, 0)}{R^3} d\xi d\eta \quad (1.4.10a)$$

两公式在  $z \leq 0$  时都是正确的。无论总场强度  $H$ , 还是它的水平分量  $X$  都不能直接地用于向上延拓或向下延拓。对于磁场延拓的详细讨论见后面章节。

## § 5 位的微分法

借助于 (1.4.5) 式或 (1.4.10) 式, 任何一点处的位的微商值可通过  $z = 0$  平面上的  $\Delta g$  或  $Z$  的数值积分而被计算出。在  $z \leq 0$  的半空间内, 微商值可直接依据积分式 (1.4.5) 式或 (1.4.10) 式本身求得, 但是在  $z > 0$  的半空间内, 该积分必须首先经过转换, 然后再微分。现举例说明这一点, 我们来计算  $z = 0$  平面之上或下的重力效应的一阶垂向导数。

当  $z \leq 0$  时, 我们从 (1.4.5) 式得到

$$-\frac{\partial \Delta g_z}{\partial z} = -\frac{\partial^2 U}{\partial^2 z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g_0}{R^3} dx dy - \frac{3|z|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g_0}{R^5} dx dy$$

把  $P$  点直接放置在坐标系的原点上并不失去普遍性, 因为原点可取在任何地方。然后, 转换成极坐标

$$-\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial z}\right)_P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - 2z^2)}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \Delta g_0(r, \theta) r d\theta dr \quad (1.5.1)$$

当  $z \rightarrow 0$  极限时计算该表达式的值常常是有用的。但这时产生一个困难, 因为当  $z = 0$  时该积分在  $r = 0$  处是奇异的。为了回避这点, 我们围绕原点画一半径为  $\epsilon$  的小圆圈, 并将公式写为

$$-\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial z}\right)_P = \int_0^{\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{r^2 - 2z^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \Delta g_0(r) r dr$$

式中

$$\Delta g_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g_0(r, \theta) d\theta$$

即在半径为  $r$  的圆圈上的  $\Delta g_0$  的平均值。如果  $\epsilon$  取得足够的小, 以致  $\Delta g_0$  与它在  $0$  点处的数值无明显改变, 那么等式右边的第一项将近似为

$$\Delta g_0(0) \int_0^{\epsilon} \frac{(r^2 - 2z^2)}{(r^2 + z^2)^{5/2}} r dr = \Delta g_0(0) \left[ \frac{z^2}{(\epsilon^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(\epsilon^2 + z^2)^{1/2}} \right]$$

因此有

$$\lim_{z \rightarrow 0} -\frac{\partial \Delta g}{\partial z} = -\frac{\Delta g_0(0)}{\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\Delta g_0(r)}{r^2} dr \quad (1.5.2)$$

至少就原理而论, 含有非数学函数  $\Delta g_0$  的 (1.5.1) 或 (1.5.2) 积分式, 通过构制具有合适的  $r$  和  $\theta$  间隔的量板, 并标出每一扇形区内的  $\Delta g_0$  的平均值, 将能近似地求得。实际上, 由于扇形量板包括不了在离原点有一定距离以外处对积分的影响, 这些计算的精度受

到限制。

然而，还有一个困难，甚至是一个更大的问题，即在(1.5.2)式中用的加权函数太强调了参考点周围近邻的值，这实际上把图的其余部分排除掉了。这不只是对制图的精度要求太高，而是使计算对近地表不均匀的作用太灵敏。为了压制这个有害的倾向，与此同时保留微分图上更多有意义的细节，使用一个相应的低通滤波器，象向下延拓所起的作用那样，通常是可行的。这个滤波器一方面为了压制地面以下不均匀的影响，而另一方面尽可能地保存有意义的地质效应。

当  $z > 0$  时为计算  $-\frac{\partial \Delta g}{\partial z}$  值，我们简单地取(1.4.7)式两边对  $z$  微分，得到

$$\frac{\partial}{\partial z} F_z(p, q) = \sqrt{p^2 + q^2} \exp(\sqrt{p^2 + q^2} z) F_0(p, q)$$

该等式右边的傅氏变换就是这个问题的数学解，但是，该积分是发散的。为了恢复好的特性，首先要从  $F_0$  中消除由位于某一极大值以外的  $p$  及  $q$  值带来的影响，而该极大值在很大程度上取决于  $z$  值。当然，这样将通过再一次的滤波。该滤波器像向下延拓的滤波器一样是基于同样原理设计的，因为具有相同的运算函数。这样，结果是清楚的，实际上无论从上还是从下接近  $z = 0$  平面都无关紧要，微商的数学表达式是相同的。这个表达式的求导在后面章节将予更详细的讨论。

## §6 重力场的多极展开

在整个体积  $V$  内密度以  $\rho(\mathbf{r}_0)$  分布，该物体之外任意点上的重力位为

$$U(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}_0) d^3 r_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

现在 
$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^l P_l(\cos \gamma) \quad r_0 \leq r$$

这里  $P_l$  是  $l$  阶的勒让德多项式。因此

$$U(\mathbf{r}) = -G \sum_{l=0}^{\infty} r^{-(l+1)} \int_V \rho(\mathbf{r}_0) r_0^l P_l(\cos \gamma) d^3 r_0 \quad (1.6.1)$$

根据叠加原理，勒让德函数为

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} y_l^m(\theta_0, \varphi_0) y_l^m(\theta, \varphi)$$

式中的

$$y_l^m(\theta, \varphi) = \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} e^{im\varphi} P_l^{|m|}(\cos \theta)$$

$\theta$  和  $\varphi$  是  $\mathbf{r}$  矢量的球极角度(图1-4)。函数  $y_l^m$  称为  $l$  阶的面调和函数， $P_l^{|m|}$  是连带勒让德函数，它由下式确定

$$P_l^{|m|}(z) = (1-z^2)^{|m|/2} \left(\frac{d}{dz}\right)^{|m|} P_l(z)$$

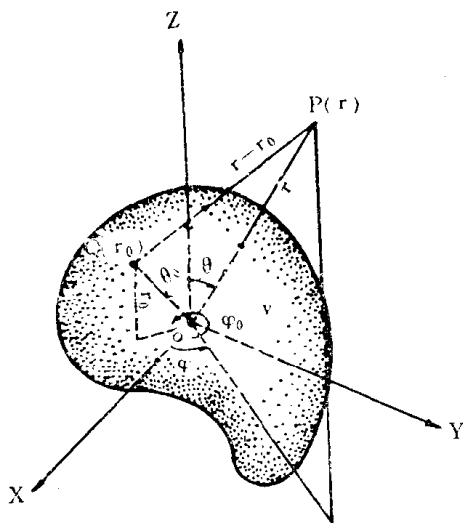


图 1-4 重力场的多极展开中所用的球坐标系。



将此式代入 (1.6.1) 式后得出

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{r}) &= -4\pi G \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^{-1} r^{-(l+1)} \sum_{m=-l}^{m=l} y_l^m(\theta, \varphi) \int_V \rho(\mathbf{r}_0) \\
 &\quad r_0^l y_l^{-m}(\theta_0, \varphi_0) d^3r_0 \\
 &= - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} b_l^m y_l^m(\theta, \varphi) r^{-(l+1)} \quad (1.6.2)
 \end{aligned}$$

式中 
$$b_l^m = 4\pi G (2l+1)^{-1} \int_V \rho(\mathbf{r}_0) r_0^l y_l^{-m}(\theta_0, \varphi_0) d^3r_0$$

对于一定的  $l$ , 这些  $b_l^m$  就构成该物体的  $(2l+1)$  个可能的简化多极矩。它们取决于体积  $V$  的形状, 而且因为它们原则上根据  $V$  外的位场可被唯一地确定, 所以它们可被用作一种直接解释的手段。因为存在无限多个矩, 所以无论怎样, 它们显然不可能全都被确定下来。在实际情况下, 式 (1.6.2) 级数是迅速收敛的, 并且前三项通常就足以满足测量精度。

把 (1.6.2) 式的级数变成各项都是实数的常常更为方便, 并被写为

$$U(\mathbf{r}) = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{B_l^m y_l^m}{r^{l+1}} \quad (1.6.3)$$

式中的

$$B_l^m y_l^m = b_l^{-m} y_l^{-m} + b_l^m y_l^m$$

那么

$$\begin{aligned}
 y_l^m(\theta, \varphi) &= \cos m\varphi P_l^{|m|}(\cos\theta) \\
 B_l^m &= \frac{G(l-m)!}{(l+m)!} \int_V \rho(\mathbf{r}_0) r_0^l \cos m\varphi_0 P_l^{|m|}(\cos\theta_0) d^3r_0
 \end{aligned}$$

假如这个级数在第  $n$  项之后舍去, 它就写为

$$-U(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^l \frac{B_l^m Y_l^m}{r^{l+1}} + R_n$$

那么, 我们就如下述那样, 可计算余项  $R_n$  的上限值: 令  $a$  为  $V$  的最大半径, 令  $\rho_m$  为  $V$  内平均密度的上限值。那么, 因为  $|\cos m\varphi P_l^{|m|}(\cos\theta)| \leq 1$ , 由此得出

$$\begin{aligned}
 |B_l^m| &\leq 4\pi G \rho_m \int_0^a r_0^{l+2} dr_0 \\
 &= \frac{3GMa^l}{l+3}
 \end{aligned}$$

假设  $M$  是  $V$  内所含的总质量。因此有,

$$\left| \frac{B_l^m y_l^m}{r^{l+1}} \right| \leq \frac{3GMa^l}{(l+3)r^{l+1}} \leq \frac{GM}{r} \left( \frac{a}{r} \right)^l$$

并且必然有

$$R_n \leq \frac{GM}{r} \sum_{l=n+1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^l = \frac{GM}{r} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \left( 1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} \quad (1.6.4)$$

(1.6.4) 式提供了一个估计 (1.6.3) 式级数收敛性以及舍去第  $n$  项之后部分所产生的误差大小的一种方法。