高等学校试用教材

高等数学

上册

南京工学院数学教研组编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高 等 数 学

上 册

南京工学院数学教研组编

人 民 教 育 出 版 社

高等学校试用教材

高　等　数　学

上　册

南京工学院数学教研组编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海群众印刷厂印装

*

1978年3月第1版　1978年7月第1次印刷

书号 13012·0142　　定价 1.00 元

前　言

1．本书是根据1977年10月在北京召开的全国高等学校工科基础课教材座谈会的精神和同年11月在西安召开的全国高等学校工科数学教材编写会议所制订的编写大纲，并基本上按照西安会议提出的“高等数学内容深广度的建议”而编写的．

2．全书分上、下两册．上册介绍了集合和映射的一些基本概念，并运用集合和映射的观点对一些重要概念和内容如函数、导数、定积分、微分方程等，作了初步的描述．

3．我们将基本初等函数图形、双曲函数、常用的初等数学公式、微积分的基本公式、积分表等都列入附录．以供选用．书末附有习题答案．

4．参加本书审稿会议的有华东水利学院任荣祖（主审）、石根弟、张敦穆，哈尔滨工业大学杨克劭，华南工学院罗家洪，成都工学院徐荣中，西南交通大学黄成清，镇江农机学院杨庆霄，南京邮电学院叶章钊，哈尔滨建筑工程学院吴登青，华东工程学院王观寿等同志．对他们所提的宝贵意见，我们表示深切谢意．

5．本书是在我组过去所编高等数学的基础上进行编写的．参加这次编写的有陶永德、高金衡、唐鸿龄、王文蔚、刘鑑明、黄新芹、罗庆来等同志．

由于我们对马列主义、毛泽东思想学习不够，业务水平不高，时间短促，因此，本书中存在缺点、错误一定很多，希望同志们批评指正．

编　者

1978年3月

目　　录

上　　册

第一章　集合与函数

§1-1　集合的概念

集合是现代数学中一个十分重要的概念，这不仅由于集合论已经发展成为内容极其丰富的一个数学分支，主要由于它已渗透到数学的各个领域，其中包括初等数学、解析几何、微积分学等基础课程．因此，我们在本书开始，简单地介绍一下集合的一些基本知识．

1．集合的概念

集合是一种最原始的概念，我们不可能找到更简单的概念来给它下个定义，只能给它一种描述．一般可以把集合了解为具有某种共同性质的一些对象组成的全体．例如，某班全体学生，某页书中的所有字，一克水所含有的氧原子，一已知方程式所有的根，所有的三角函数，正切为 $\sqrt{3}$ 的所有角等都可以说是集合．其实，我们很早就遇到过集合的事例了．例如，我们在开始学习计数时就遇到自然数 1，2，3，……所成的集合，在几何里遇到的圆周为平面上到一已知点等距的所有点的集合等．

我们把组成某一集合的那些对象，叫做这个集合的**元素**．因此，上面所述的许多集合事例中，学生、字、原子、数、函数、角等等都分别为相应集合的元素．可见集合的元素可以是各种各样的对象，因此，可以看出集合具有广泛性的特色．

习惯上用大写字母 A、B、C 等表示集合，而用小写字母 a、b、c 等表示集合的元素．如果 a 是集合 A 的元素，就记为 $a\in A$，读作"a 属于 A"，否则记为 $a\notin A$，读作"a 不属于 A"．

如果一个集合的元素可以一一例举出来，我们就用一个花括

弧{ }把这些元素括起来以表示这个集合. 例如集合 S 包含1, 2, 3, 4 这四个数,就可记为

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

仅含有限多个元素的集合叫做**有限集合**, 含有无限多个元素的集合叫做**无限集合**. 例如, 由全体自然数 1, 2, 3, ……所成的集合就是一个无限集合,这个集合今后常遇到,我们用一个特定的字母 N 表示它,即

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}.$$

如果一个集合 S 是由具有某种共同性质 p 的元素 x 组成, 这时集合 S 仍可以用{ }记为

$$S=\{\text{元素 } x \mid x \text{ 具有性质 } p\},$$

或者省去"元素"两字,简记为

$$S=\{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

例如, 全体偶数所成的集合 E 可以记为

$$E=\{x \mid x=2n,\ n\in N\},$$

用这种记号描述集合,可以起简化作用.

例 1 xOy 平面内在直线 $x+y=3$ 上的一切点所成的集合 A 可以记为

$$A=\{\text{点}(x,\ y) \mid x+y=3\}.$$

例 2 xOy 平面上一切平行于直线 $x+y=3$ 的直线 l 所成的集合 B 可以记为

$$B=\{\text{直线 } l \mid l \parallel \text{直线 } x+y=3\}.$$

例 3 所有实系数二次多项式的集合 P_2, 可以记为

$$P_2=\{ax^2+bx+c \mid a,\ b,\ c \text{ 为实数},\ a\neq 0\}.$$

只含一个元素 x 的集合叫做**单元素集**,记为 $\{x\}$. 不含任何元素的集合叫做**空集**, 记为 ϕ. 例如, 方程 $x^2+1=0$ 的实数解的集合就是一个空集.

2. 子集

定义1 如果集合 A 的每一个元素都属于 B，便称 A 为 B 的子集，记为

$$A\subset B \quad \text{或} \quad B\supset A,$$

读作 A 包含于 B 或 B 包含 A(图1-1).

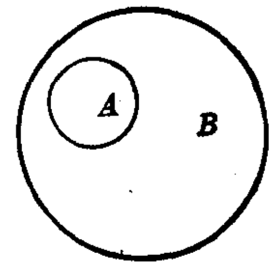

图 1-1

例4 设 A 表示某校某班级全体学生的集合，B 表示该校全体学生的集合，则 $A\subset B$，即 A 为 B 的子集.

例5 设 A 表示平面上所有等边三角形的集合，B 表示平面上所有三角形的集合，则 $A\subset B$，即 A 为 B 的子集.

由定义可知，任何一个集合的本身是它的子集，即 $A\subset A$；空集是任何一个集合的子集.

定义2 设有集合 A 与 B，如果 $A\subset B$，$B\subset A$，便称 A 与 B 相等，记作

$$A=B.$$

很明显，含有相同元素的两个集合相等.

例如，$A=\{2, 3\}$，B 为方程式

$$x^2-5x+6=0$$

的根所组成的集合，则 $A=B$.

读者在中学已经学过实数，都知道实数对于不等号具有这样性质：若 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$，其中 a、b、c 是三个实数. 集合对于"包含"关系具有类似的性质，即

若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$，其中 A、B、C 为三个集合. 事实上，设任意一个 $x\in A$，因为 $A\subset B$，所以 $x\in B$，又因为 $B\subset C$，所以 $x\in C$，即 $A\subset C$.

例如，某系某班全体学生所成的集合，包含于该系全体学生所成的集合，后者又包含于全校学生所成的集合，因此某班全体

学生的集合包含于全校学生所成的集合．在考虑某集合 S 的一切子集时，要注意把 S 本身及空集 ϕ 都要算在内．例如，集合 $S=\{0, 1, 2\}$ 的一切子集是

$$\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}.$$

这里要注意 0 是一个数，所以 $\{0\}$ 是一个单元素集，而不是空集 ϕ，不能把 $\{0\}$ 和 ϕ 混为一谈．

3．区间

如果所讨论的一些集合都是某一集合 U 的子集，则称 U 是**母集**．例如，R 是全体实数的集合（以后一律用 R 表示全体实数集），A 是由满足不等式 $-1<x<2$ 的一切实数 x 的集合，则 A 可记为

$$A=\{x \mid -1<x<2,\ x\in R\}.$$

如果已经明确母集是 R，则可简记为

$$A=\{x \mid -1<x<2\}.$$

今后在讨论实数组成的集合问题时，都假定 R 是母集．下面来介绍一些以后常遇到的实数集．

设 a, b 为任意两实数，且 $a<b$．我们把

(1) 满足不等式

$$a<x<b$$

的所有实数 x 的集合

$$I_1=\{x \mid a<x<b\}$$

叫做**开区间**，并记为 (a, b) 或 $a<x<b$；

(2) 满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的所有实数 x 的集合

$$I_2=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

叫做**闭区间**，并记为 $[a, b]$ 或 $a\leqslant x\leqslant b$；

(3) 满足不等式

$$a<x\leqslant b$$

的所有实数 x 的集合

$$I_3=\{x|a<x\leqslant b\}$$

叫做**左开区间**，并记为$(a,\ b]$或 $a<x\leqslant b$;

(4) 满足不等式

$$a\leqslant x<b$$

的所有实数 x 的集合

$$I_4=\{x|a\leqslant x<b\}$$

叫做**右开区间**，并记为$[a,\ b)$或 $a\leqslant x<b$.

在数轴上，这些区间都可以用一线段来表示．其中 a, b 叫做区间的**端点**，端点之间的距离叫做区间的**长度**，区间的长度为有限数的，叫做**有限区间**．上面 I_1、I_2、I_3、I_4 都是有限区间．不过有的包括两个端点在内如(2)，有的不包括端点如(1)，有的只包括一个端点如(3)、(4)．

除了有限区间外，还有无限区间，现规定下列符号的意义：

(1) $(a,+\infty)$或 $a<x<+\infty$ 表示集合

$$\{x|x>a\};$$

(2) $(-\infty,\ a)$或 $-\infty<x<a$ 表示集合

$$\{x|x<a\};$$

(3) $(-\infty,+\infty)$或 $-\infty<x<+\infty$ 表示全体实数集 R.

同样可以规定$[a,+\infty)$和$(-\infty,\ a]$.

明了区间概念后，我们知道集合

$$A=\{x|-1<x<2\},$$

就是区间$(-1,\ 2)$.

习　题　一

1．设母集是实数集，指出以下集合是怎样的集合，并给出它们的几何图示．

(1) $A=\{x|x^2=9\}$;

(2) $B=\{x|x+2=4\}$;

(3) $C=\{x|x^2<9\}$;

(4) $D=\{x|x^2-x-6=0\}$.

2. 在 xOy 平面上下列集合是怎样的集合，并给出它们的几何图形：

(1) $A=\{点(x, y)|1<x^2+y^2<4\}$;

(2) $B=\{点(x, y)|2xy=1\}$.

3. 设 $U=\{a, b, c\}$，下列记法哪些是正确的，为什么？

(1) $a\in U$;　　(2) $a\subset U$;

(3) $\{a\}\in U$;　　(4) $\{a\}\subset U$.

4. 用集合的记号表示以下各个集合：

(1) 小于 100 的正整数集合；

(2) 圆 $x^2+y^2=1$ 的内部一切点的集合.

§1-2 集合的运算

如同几个实数结合起来(例如通过加法或乘法)可以产生其它的数一样，几个集合也可以按一定的方式结合起来产生其它的集合. 下面介绍集合的几种基本运算——并，交以及差.

1. 集合的并

定义 1 把集合 A 的元素与集合 B 的元素全部集中起来所成的集合，叫做 A 与 B 的**并**(图 1-2)，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A \quad 或 \quad x\in B\}.$$

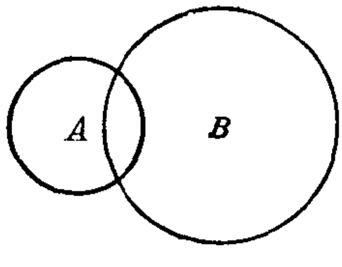

图 1-2

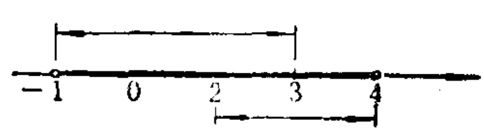

图 1-3

例如，$\{1, 3, 2\}\cup\{6, 3, 4, 2\}=\{1, 2, 3, 4, 6\}$;

$\{1,\ 3,\ 2\}\cup\{7,\ 8,\ 9\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9\}$;

$(-1,\ 3)\cup(2,\ 4)=(-1,\ 4)$(图 1-3).

很明显,集合的并具有以下简单性质(图 1-2):

(1) $(A\cup B)\supset A$;　　　　(2) $(A\cup B)\supset B$.

集合的并的概念可以推广到三个以至更多个集合上去, 例如

$\{1,\ 3,\ 2\}\cup\{2,\ 4,\ 6\}\cup\{9,\ 7\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9\}$.

2. 集合的交

定义 2 把既属于 A 又属于 B 的元素集中起来所成的集合叫做 A 与 B 的**交**(图 1-4), 记为 $A\cap B$, 即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\ \text{同时}\ x\in B\}.$$

如果 $A\cap B=\phi$, 就说 A, B 不相交. 例如

$\{1,\ 3,\ 2\}\cap\{2,\ 4,\ 6,\ 1\}=\{1,\ 2\}$;

$\{2,\ 4,\ 6\}\cap\{5,\ 7\}=\phi$;

$[-1,\ 2)\cap(0,\ 3]=(0,\ 2)$(图 1-5).

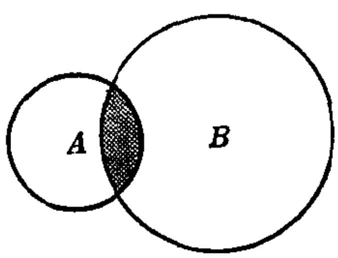

图 1-4

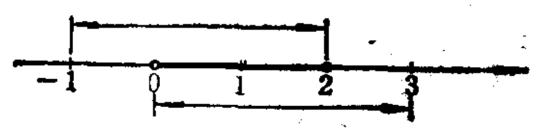

图 1-5

很明显,集合的交具有以下简单性质(图 1-4):

(1) $(A\cap B)\subset A$;　　　　(2) $(A\cap B)\subset B$.

3. 集合的差

定义 3 由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合,叫做 A 与 B 的**差**(图 1-6), 记为 $A\setminus B$, 即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\ \text{但}\ x\notin B\}.$$

注意,在差的定义中并没有要求 $B\subset A$. 例如

$\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}\setminus\{3,\ 4,\ 5,\ 7\}=\{1,\ 2\}$;

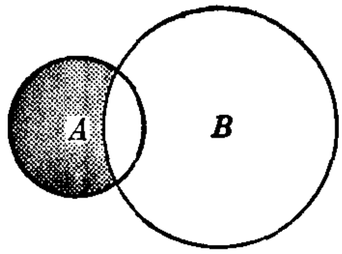

图 1-6

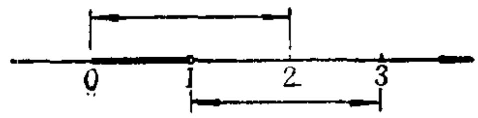

图 1-7

$[0,2]\setminus[1,3]=[0,1)$ (图 1-7).

4. 并与交的一些基本性质

集合的并与交具有许多与初等代数里加法与乘法相似的性质,我们列几条如下:

(1) 可交换性 $A\cup B=B\cup A$;

$$A\cap B=B\cap A.$$

(2) 可结合性 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(3) 可分配性 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

性质(1)、(2)成立是明显的,现就(3)证明如下:

设 $x\in A\cap(B\cup C)$, 则 $x\in A$, $x\in(B\cup C)$, 因此: $x\in A$ 同时 $x\in B$, 或 $x\in A$ 同时 $x\in C$, 也就是 $x\in(A\cap B)$ 或 $x\in(A\cap C)$, 即 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, 所以 $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$; 另一方面,设 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, 则 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$, 因此 $x\in A$ 同时 $x\in B$, 或 $x\in A$ 同时 $x\in C$, 也就是 $x\in A$ 同时 $x\in B\cup C$, 即 $x\in A\cap(B\cup C)$, 所以 $A\cap(B\cup C)\supset(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 由 §1-1 定义 2, 性质(3)成立.

习 题 二

1. 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,c,e,f\}$, $C=\{a,b,d,f,g\}$.

(1) 求 $A\cup B$, $B\cup C$, $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $A\setminus B$, $B\setminus C$;

(2) 验证 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$$A\cup(B\cap C)\neq(A\cup B)\cap C.$$

2．求下列各题集合的并、交与差:

(1) $A=[0, 1]$,　　$B=[1, 3]$;

(2) $A=[-1, 4]$,　$B=[2, 4]$.

3．设 A 为母集 U 的一个子集，由属于 U 而不属于 A 的元素所构成的集合,叫做 A 的余集,记为 A'. 试证明

(1) $A\cup A'=U$;　　(2) $A\cap A'=\phi$;

(3) $\phi'=U$.

4．设 $U=\{a, b, c, d, e, f\}$, $A=\{a, b, c\}$, $B=\{a, c, f\}$, 求

(1) A';　　(2) B';

(3) $A'\cup B'$;　　(4) $A'\cap B'$.

§1-3　集合的映射

映射的概念是有关集合的一个重要的概念,在这里,我们对它作一个简单介绍.

1．映射的概念

定义 1　若有两个已知集合 A 与 B, 设 f 表示某种确定的对应规律，使得对于每一个元素 $x\in A$, 通过 f 都有一个唯一的元素 $y\in B$ 与之对应,记为

$$x\xrightarrow{f}y \quad 或 \quad f(x)=y,$$

便说 f 是一个由 A 到 B 的映射①. y 叫做 x (在 f 下)的象,而 x 叫做 y (在 f 下)的原象图 1-8.

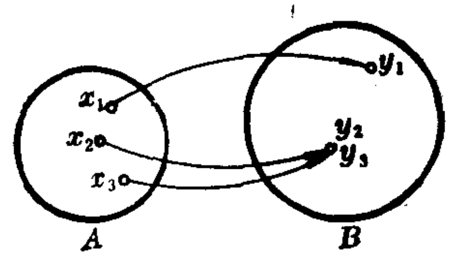

图　1-8

例 1　设 A、B 分别表示某校全体学生与他们的学号所成的集合，f 表示对于 A 中每一个元素（学生）取他的学号的对应规律,则 f 就是一个由 A 到 B 的映射.

① 要注意：映射是由 A, B, f 三者统一确定. 如果 A, B 已经明确之后, f 就可简称为映射.

例 2 设 T 表示平面上所有三角形的集合，R_+ 表示所有正实数的集合，f 表示对于 T 中每一个元素(三角形)取它的面积的对应规律，则 f 便是一个由 T 到 R_+ 的映射.

例 3 R 为实数集，对于每一个 $x \in R$，映射

$$x \xrightarrow{f} x^2 \quad \text{或} \quad f(x) = x^2 = y$$

是一个由 R 到 R 的映射.

$x=0$ 的象是 $y=0$；$x=1$，$x=-1$ 的象都是 $y=1$. 反过来，$y=0$ 的原象是 $x=0$；而 $y=1$ 的原象有两个，即 $x=1$，$x=-1$. 这个例子说明不同的 x 可以有相同的象.

例 4 仍用 R_+ 表示正实数的集合，R 为实数集合，对于每一个 $x \in R_+$，则映射

$$x \xrightarrow{f} \lg x \quad \text{或} \quad f(x) = \lg x$$

是一个由 R_+ 到 R 的映射.

现在再来谈谈定义中应注意的几个问题：

(1) 记号"f"与"$f(x)$"是有区别的，f 表示由 $x(x \in A)$ 产生 $y(y \in B)$ 的对应规律，$f(x)$ 表示在映射 f 下 x 的象 y，即 $f(x) = y$；

(2) x 可以遍取 A 中的元素，但它对应的 y 未必能遍取 B 中的元素. 如果 y 不能遍取 B 中的元素，便说映射 f 是由 A 到 B 内的映射，如例 3；如果 y 能遍取 B 中的元素，便说映射 f 是由 A 到 B 上的映射，如例 1，例 4；

(3) 如果 B 中每一个元素 y 都有原象 x 而且只有一个原象，这时便称映射 f 是一一映射或一一对应，如例 1.

2. 映射的机械模拟

由上述几个例子可以看出映射这一概念的广泛适应性. 为了形象地理解这一概念，我们再用机械模拟的方法来解释一下. 我