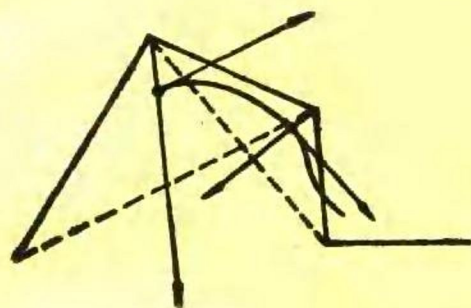


苏步青 华宣积 编著



大学应用数学丛书

应用几何教程

复旦大学出版社

大学应用数学丛书

应用几何教程

苏步青 华宣积 编著

复旦大学出版社

内 容 简 介

本书是根据复旦大学的教材改编而成的，全书共分六章，主要介绍坐标系统、变换、机构运动的数学表示，曲线模型、曲面模型、共轭曲面等内容，本书可供高等学校有关专业用作应用几何课程的教材，也可供从事应用数学工作以及计算机辅助设计和制造的科技工作者参考。

大学应用数学丛书 应 用 几 何 教 程

苏步青、华宣积 编著

复旦大学出版社出版

(上海国权路579号)

新华书店上海发行所发行 复旦大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张8.75 字数20,000

1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷

印数1—3,000

ISBN7-309-00562-7/O·82

定价 2.30元

《大学应用数学丛书》

编审委员会

名誉主任 苏步青

主任 谷超豪

委员 (按姓氏笔划为序)

叶敬棠 李大潜 李立康 季训经

吴立德 汪嘉冈 俞文泐 欧阳甽

蒋尔雄

责任编辑 陈毓卿

责任校对 马金宝

出版者的话

近年来，随着我国现代化建设事业的发展，许多高等学校创办了一大批重视数学理论和应用的专业和系科，如：应用数学、应用力学、计算数学、控制科学、信息科学、系统科学、运筹学、统计学、计算机科学、应用物理、管理科学等。为了满足这类专业数学教学的需要，我们组织编写和出版了一套“大学应用数学丛书”。本书即为这套丛书中的一本。

“大学应用数学丛书”重视现代数学的基本理论，强调数学的实际应用，反映现代科技的先进成果，并便于课堂教学和自学。我们希望，这套丛书的出版将有助于我国应用数学教学与研究的展开，促进数学更好地为国民经济和现代化建设服务。

在组织编写这套丛书的过程中，我们曾得到陈开明、陈有根、柳兆荣、徐公权等同志的热情帮助，在此特表谢忱。

复旦大学出版社

1987年1月

前 言

本书原先是复旦大学数学系的讲义，可供一学期每周讲授三学时之用。自 1986 年起，已经用过三次，来听课的主要是应用数学和计算数学专业的学生，也有一些研究生和其它专业的学生。计算几何方向的几个研究生曾经自学并做过报告。在这些教学过程中，我们对讲稿不断地修改，最后写成此书，奉献给广大读者。

我们希望本书对学习和从事应用数学工作的人有些用处，使他们了解一些工程中的问题及现有的常用方法；对工科学生和从事机械工程研究，特别是从事 CAD 和 CAM（计算机辅助设计和制造）研究的人有所裨益，使他们了解一些数学方法和它们在工程问题中所起的作用。

全书共分六章。第一、二章介绍坐标系和变换。它们是几何学中最基本的概念。为了使工科学生和工程技术人员能够顺利地阅读以后几章，这点基础知识是必要的。对于数学基础较好的学生，这两章可以讲得快一些。在密切联系机构运动学的第三章里，介绍了 Denavit-Hartenberg 方法，并将它用到机器人操作手的运动分析中去。第四章和第五章介绍了曲线和曲面的各种实用的表示方法，特别是，我们不必通过曲面的截线来表示曲面。和曲线一样，我们采用方程表示的方式。第六章叙述共轭曲面。我们所要考察的是一对曲面在各自运动作用下始终保持接触的情形。这样一对曲面的形状之间的关系以及接触处的曲率关系是我们讨论的对象。

书中包含了我们自己的一些研究和应用成果，但更多内容是将文献资料和专著整理加工而成的。所引用的论文有些只在正文中指明，而大多数则未予列举。主要的参考书有：

D.F.Rogers and J.A.Adams (1976)

Mathematical Elements for Computer Graphics, McGraw-Hill

- Hill Book Company, New York.
- C.H. Suh and C.W. Radcliffe (1978)
Kinematics and Mechanisms Design, John Wiley & Sons INC.
- I.D. Faux and M.J. Pratt (1979)
Computational Geometry for Design and Manufacture, Ellis Horwood Limited, Chichester, England.
- 苏步青、刘鼎元(1981)
计算几何, 上海科学技术出版社。
- 吴大任、骆家舜(1985)
齿轮啮合理论, 科学出版社、北京。
- 陈志新(1985)
共轭曲面原理基础, 科学出版社, 北京。
- 苏步青、华宣积、忻元龙(1986)
实用微分几何引论, 科学出版社, 北京。

我们向上面提到的专家和学者表示感谢, 我们还感谢曹沅讲师和许虹、许丽卿、蔡志杰、吴洪忠等学生, 他们在教学过程中提出了许多宝贵意见, 使本书的质量有所提高。翟贵生、朱晨、葛武跃冒着1988年的酷暑抄写了全部讲稿, 复旦大学出版社为本书的出版作了很大努力, 我们在此一并表示感谢。

编 者

1989年11月

目 录

前 言

第一章 坐标系	1
§ 1 齐次坐标、无穷远点.....	1
§ 2 直线的Plücker 坐标.....	6
§ 3 对偶数.....	14
§ 4 重心坐标.....	22
§ 5 曲线的活动标架.....	33
 第二章 变换	 42
§ 1 平面上的仿射变换.....	42
§ 2 空间的绕轴旋转.....	51
§ 3 刚体运动.....	61
§ 4 空间的仿射变换.....	69
§ 5 透视与投影.....	73
§ 6 射影变换与交比.....	81
 第三章 机构运动的数学表示	 91
§ 1 坐标变换的 Denavit-Hartenberg表 示法.....	91
§ 2 空间旋转的三种表示.....	95
§ 3 微分矩阵.....	102
§ 4 运动方程.....	106
§ 5 空间连杆曲线的曲率.....	113
§ 6 机器人操作手的运动分析.....	115
§ 7 直线坐标的变换.....	124
§ 8 操作手的运动的极距.....	129

§ 9 机器人操作手运动的奇性	131
-----------------	-----

第四章 曲线模型 137

§ 1 三次样条函数	137
§ 2 三次参数曲线段	146
§ 3 三次参数样条曲线	153
§ 4 双圆弧逼近及其拓广	159
§ 5 Bézier 曲线	169
§ 6 有理Bezier曲线	177
§ 7 B样条曲线	182

第五章 曲面模型 192

§ 1 双三次样条函数	192
§ 2 Coons曲面	199
§ 3 张量积Bezier曲面	204
§ 4 有理Bézier面曲	211
§ 5 B样条曲面	215
§ 6 三角域上的Bézier曲面	220
§ 7 广义柱面	229

第六章 共轭曲面 231

§ 1 共轭运动与共轭曲面	231
§ 2 活动标架	234
§ 3 线接触共轭曲面	238
§ 4 Euler-Savary 公式的一个推广	246
§ 5 两类广义共轭曲面问题	254
§ 6 一类混合型共轭曲面的例子	262

第一章 坐标系

在解析几何里，我们已经学过平面直角坐标系、仿射坐标系、极坐标系，空间直角坐标系、仿射坐标系，球面坐标系和柱面坐标系。利用坐标系，在点与数组之间建立起一个对应，从而在几何图形与方程之间建立起一个对应，使得我们能够用代数方法解决几何问题。

把几何知识应用到各个领域中去的时候，首先碰到的问题就是要选取适当的坐标系。然后，才能用方程来表示几何图形。坐标系在这里起着桥梁作用。另一方面，我们所需要的几何图形的性质一般与坐标系无关。曲线的长度、闭曲线所围成的面积等等就是例子。明确这两方面是十分重要的。

最重要而且最常用的是直角坐标系。我们假定本书的读者已经熟悉且能够运用这种坐标系，本书中用以讨论问题的主要也是直角坐标系。在这一章里将引进齐次坐标的概念作为补充。这种坐标在计算机图形学和机构运动学中有着广泛的应用。本章还介绍本书中需要用到的其它坐标系。

§1. 齐次坐标、无穷远点

1.1 平面上的齐次坐标、无穷远点

设 (x, y) 是平面上一点 P 的直角坐标，令

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y, \quad (1.1)$$

则 P 点对应着一个拼三小组 (x_1, x_2, x_3) 。当 $x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : x_2 : x_3$ 时， (x'_1, x'_2, x'_3) 也与 P 点对应。我们把拼三小组 (x'_1, x'_2, x'_3) 看成是与

(x_1, x_2, x_3) 等同的, 记为 $(x'_1, x'_2, x'_3) \sim (x_1, x_2, x_3)$ 。反过来, 从任一拼三小组 (x_1, x_2, x_3) , $x_3 \neq 0$ 可以得到 $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, 于是确定一个点 $P(x, y)$ 。这样, 平面上的点 $P(x, y)$ 与拼三小组 (x_1, x_2, x_3) ($x_3 \neq 0$) 建立了一一对应, 称 (x_1, x_2, x_3) 为 P 点的齐次坐标。

采用齐次坐标, 平面上的直线方程

$$Ax + By + C = 0$$

就可以写成

$$A \frac{x_1}{x_3} + B \frac{x_2}{x_3} + C = 0.$$

两边同时乘以 x_3 就变成线性齐次方程

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0. \quad (1.2)$$

求两点的联线和两直线的交点都是简单的问题。下面举两个例子来说明。

例1 求过两点 $(1, 0, 1)$ 和 $(0, 1, 1)$ 的直线方程。

解 设所求的直线方程为

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

将 $(1, 0, 1)$ 和 $(0, 1, 1)$ 代进去, 得到

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B + C = 0. \end{cases}$$

最后得

$$A = -C, \quad B = -C,$$

所求的直线方程为

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

例2 求直线 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 和 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 的交点。

解 解联立方程

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

得

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = 0,$$

所求的交点是 $(1, 0, -1)$ 。

考察两条平行线, 例如 $x - y + 1 = 0$ 和 $x - y + 2 = 0$ 。方程组

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0, \end{cases}$$

是无解的。这说明两条平行线是不相交的。如果把它们写成齐次坐标的形式, 我们便得到线性齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

它有解 $(1, 1, 0)$ 。在普通平面上找不到 $(1, 1, 0)$ 的对应点。为了解决代数方程组有解而普通平面上无交点的这种不和谐的现象, 我们采用如下的办法: 把 $(1, 1, 0)$ 看成是直线 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 和 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ 上的公共的“理想点”或无穷远点的齐次坐标。我们假定任一条直线 l

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$$

上有且只有一个无穷远点 $(B, -A, 0)$, $(B, -A)$ 是这直线的方向向量, 并且与 l 平行的所有直线都与 l 相交于这个无穷远点, 它们形成了一个直线束。不平行的两条直线 l_1 和 l_2 相交于一个有限点 (非无穷远点), l_1 与 l_2 具有不同的无穷远点。因此, 平面上有无穷多个无穷远点。这些无穷远点满足 $x_3 = 0$ 。我们说 $x_3 = 0$ 代表一条由无穷远点组成的直线, 称为无穷远直线。

添加了无穷远点和无穷远直线的平面称为扩大的欧氏平面, 或称为仿射平面。在这平面上, 任何两条不同的直线都有一个交点, 也只有一个交点。不全为零的三个数 (x_1, x_2, x_3) 表示这平面上的一个点。当 $x_3 \neq 0$ 时, 表示通常点; 当 $x_3 = 0$ 时, 表示无穷远点。

1.2 空间的齐次坐标

和平面上点的齐次坐标相类似, 我们可以引进空间的点的齐次坐标。由不全为零的四个数 (x_1, x_2, x_3, x_4) 组成的拼四小组表示空间中的一个点。当 $x_4 \neq 0$ 时, 这个点的直角坐标 (非齐次坐标) 是

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

当 $x_4=0$ 时, $(x_1, x_2, x_3, 0)$ 表示一个无穷远点. 它代表了以 (x_1, x_2, x_3) 为方向的所有平行直线的公共点. 不平行的两直线各有不同的无穷远点. 空间中有无穷多个无穷远点, 它们在一个无穷远平面上. 无穷远平面的方程是

$$x_4=0.$$

添加了无穷远点和无穷远平面的空间称为扩大了欧氏空间, 或仿射空间. (x_1, x_2, x_3, x_4) (它们不全为零) 称为空间中点的齐次坐标.

采用齐次坐标, 平面在齐次坐标下的方程是齐次方程

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0. \quad (1.3)$$

这里的 A, B, C 和 D 不全为零. 任何两个平面都相交于一条直线:

$$\begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1x_4 = 0, \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2x_4 = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

当这两个平面平行时, 它们的交线便落在无穷远平面上.

三个平面必有交点. 过三个不共线的点可唯一地决定一个平面.

例3 求过点 $(0, 1, -1, 0)$ 、 $(-1, 0, 0, 1)$ 和 $(0, 1, 2, -3)$ 的平面方程.

解 设所求平面为

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0.$$

把已知的三点的齐次坐标代进去, 得到

$$\begin{cases} B - C = 0, \\ A - D = 0, \\ B + 2C - 3D = 0. \end{cases}$$

这方程组的解是

$$A = D, \quad B = D, \quad C = D.$$

所求的平面方程为

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

用非齐次坐标来表达, 此题变为: 求过 $(-1, 0, 0)$ 和 $(0, -\frac{1}{3},$

$-\frac{2}{3})$ 两点, 而且平行于方向 $(0, 1, -1)$ 的平面, 它的解是

$$x + y + z + 1 = 0.$$

例4 求三平面

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$, $8x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 = 0$
的交点.

解 解联立方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 8x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 = 0, \end{cases}$$

得

$$x_1 = x_4 = 0, \quad x_2 = -x_3.$$

所求的交点是 $(0, 1, -1, 0)$. 它是一个无穷远点.

用非齐次坐标来表达时, 可看出这三个平面

$$x + y + z + 1 = 0, \quad 3x + y + z + 4 = 0, \quad 8x + y + z + 9 = 0$$

都平行于方向 $(0, 1, -1)$, 它们是两两相交的. 交线的方向都是 $(0, 1, -1)$.

习 题 1.1

1 在平面上求下列各点的齐次坐标:

$$(0, 0), \quad (3, 4), \quad (1/3, 1/4).$$

2 在平面上求斜率为 $4/3$ 的直线上的无穷远点.

3 求下列各点的非齐次坐标:

$$(3, 5, -1), \quad (0, 0, 9).$$

4 求两直线

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \text{ 和 } 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$$

的交点.

5 判别三条直线

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0, \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \quad 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$

是否共点.

6 在平面上求两点 $(1, -1, 2)$ 和 $(0, 1, 4)$ 的连线。

7 在空间中, 求下列各点的齐次坐标:

$$(0, 0, 0), (0, 1, 2), (3, 4, 5).$$

8 求三平面

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0$$

的交点。

9 求过三点 $(0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0)$ 和 $(1, -1, 2, 0)$ 的平面。

§ 2. 直线的Plücker 坐标

2.1 平面上的直线坐标

用齐次坐标表达的直线 l 的方程是

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

为了对称起见, 我们用 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 来代替 (A, B, C) , 把直线 l 的方程写成

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0.$$

(ξ_1, ξ_2, ξ_3) 是不全为零的三个数组成的拼三小组, 当它们被确定时, 以它们为系数的直线 l 的方程也完全地确定了。如 $\lambda \neq 0$, 拼三小组 $(\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \lambda \xi_3)$ 也确定同一条直线 l 的方程。所以这两个拼三小组是等同的, 记为

$$(\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \lambda \xi_3) \sim (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

称 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 是直线 l 的坐标。直线坐标是 Plücker 最早提出来的。

2.2 空间直线的 Plücker 坐标

空间的情形和平面有些不同, 不能简单地从直线方程引出直线坐标的概念来。设一条直线 g 的方程是

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

一点 (x_0, y_0, z_0) 和方向 (l, m, n) 完全决定了它。但 g 上任何一点都可以代替 (x_0, y_0, z_0) , 所以不能用 x_0, y_0, z_0, l, m, n 这六个数来作为 g 的坐标。

直线 g 也可以由它上面的两个点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $\overline{P}_0(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0)$ 来决定。它的方向向量是 $v(l, m, n)$, 其中

$$l = \overline{x}_0 - x_0, \quad m = \overline{y}_0 - y_0, \quad n = \overline{z}_0 - z_0.$$

这个向量 (起点在 P_0) 关于原点 O 的矩是 $\overrightarrow{OP}_0 \times v$. 因为

$$\overrightarrow{OP}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}; \quad v = l \mathbf{i} + m \mathbf{j} + n \mathbf{k},$$

所以

$$-\overrightarrow{OP}_0 \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ \overline{x}_0 - x_0 & \overline{y}_0 - y_0 & \overline{z}_0 - z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ \overline{x}_0 & \overline{y}_0 & \overline{z}_0 \end{vmatrix} = p \mathbf{i} + q \mathbf{j} + r \mathbf{k},$$

这里已令

$$p = \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ \overline{y}_0 & \overline{z}_0 \end{vmatrix}, \quad q = \begin{vmatrix} z_0 & x_0 \\ \overline{z}_0 & \overline{x}_0 \end{vmatrix}, \quad r = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ \overline{x}_0 & \overline{y}_0 \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

如果 P_0 与 $\overline{P}_0$ 用齐次坐标表示:

$$P_0(x_0, y_0, z_0, 1), \quad \overline{P}_0(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, 1),$$

则

$$l = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & \overline{x}_0 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & \overline{y}_0 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & \overline{z}_0 \end{vmatrix}. \quad (1.6)$$

显然, p, q, r, l, m, n , 这六个数, 恰恰是矩阵

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ \overline{x}_0 & \overline{y}_0 & \overline{z}_0 & 1 \end{pmatrix}$$

的所有二阶子行列式。下面我们要证明, 这六个行列式的比值是同 P_0 和 $\overline{P}_0$ 的选取无关的。设 Q_0 和 $\overline{Q}_0$ 是 g 上的另外两点。假定它们的坐标分别是

$$((1-\lambda)x_0 + \lambda\overline{x}_0, (1-\lambda)y_0 + \lambda\overline{y}_0, (1-\lambda)z_0 + \lambda\overline{z}_0),$$

和

$$((1-\mu)x_0 + \mu\overline{x}_0, (1-\mu)y_0 + \mu\overline{y}_0, (1-\mu)z_0 + \mu\overline{z}_0),$$

$\lambda \neq \mu$. 由矩阵

$$\begin{pmatrix} (1-\lambda)x_0 + \lambda\overline{x_0} & (1-\lambda)y_0 + \lambda\overline{y_0} & (1-\lambda)z_0 + \lambda\overline{z_0} & 1 \\ (1-\mu)x_0 + \mu\overline{x_0} & (1-\mu)y_0 + \mu\overline{y_0} & (1-\mu)z_0 + \mu\overline{z_0} & 1 \end{pmatrix}$$

的相应的二阶子行列式构成的六个数 $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}, \overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$, 是很容易计算的。例如

$$\begin{aligned} \overline{r} &= \begin{vmatrix} (1-\lambda)x_0 + \lambda\overline{x_0} & (1-\lambda)y_0 + \lambda\overline{y_0} \\ (1-\mu)x_0 + \mu\overline{x_0} & (1-\mu)y_0 + \mu\overline{y_0} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (1-\lambda)x_0 & (1-\lambda)y_0 \\ \mu\overline{x_0} & \mu\overline{y_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda\overline{x_0} & \lambda\overline{y_0} \\ (1-\mu)x_0 & (1-\mu)y_0 \end{vmatrix} \\ &= [\mu(1-\lambda) - \lambda(1-\mu)] \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ \overline{x_0} & \overline{y_0} \end{vmatrix} \\ &= (\mu - \lambda)r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{l} &= \begin{vmatrix} 1 & (1-\lambda)x_0 + \lambda\overline{x_0} \\ 1 & (1-\mu)x_0 + \mu\overline{x_0} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - \mu)x_0 + (\mu - \lambda)\overline{x_0} \\ &= (\mu - \lambda)l. \end{aligned}$$

同理还有

$$\begin{aligned} \overline{p} &= (\mu - \lambda)p, & \overline{q} &= (\mu - \lambda)q, \\ \overline{m} &= (\mu - \lambda)m, & \overline{n} &= (\mu - \lambda)n. \end{aligned}$$

于是

$$p:q:r:l:m:n = \overline{p}:\overline{q}:\overline{r}:\overline{l}:\overline{m}:\overline{n}.$$

这就是说, 直线 g 的方向向量 (l, m, n) 和它关于原点的矩向量 (p, q, r) (作用点在 g 上), 除了一个比例因子外是完全确定的。因为方向向量与矩向量是垂直的, 所以它们必须满足关系式

$$lp + mq + nr = 0, \quad (1.7)$$

此式称为 Plücker 恒等式。

反过来, 假设已知满足 Plücker 恒等式 (1.7) 的六个数 l, m, n, p, q, r , 且前三个数不全为零, 那末便可唯一确定一条直线 g 。事实上,

• • •