

初等綫性代數

問題與習題詳解

H. 安東 原著

鞠鴻飛 譯著

曉園出版社
世界圖書出版公司

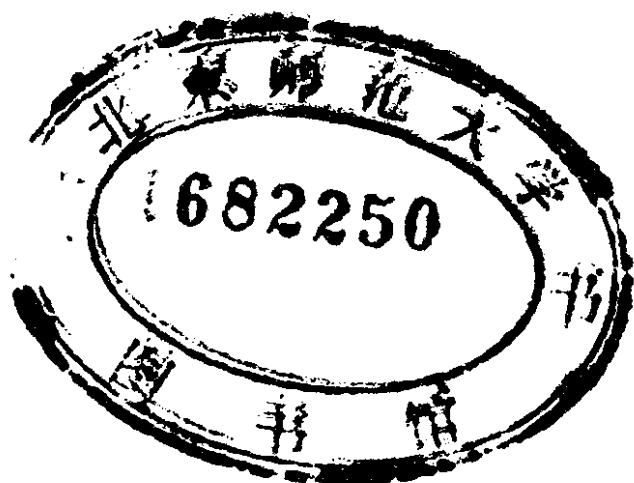
Jy 1651-7

前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。



初等线性代数问题与习题详解

H. 安东 原著

鞠鸿飞 译著

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1995 年 5 月第 一 版 开本: 711×1245 1/24

1995 年 5 月第一次印刷 印张: 31

印数: 0001-500 字数: 590 千字

ISBN: 7-5062-1819-4/O · 153

定价: 53.00 元 (WB9409/1819)

世界图书出版公司向台湾晓园出版社购得重印权限国内发行

初等線性代數詳解

(目 錄)

第一章	線性方程組和矩陣.....	1
第二章	行列式.....	89
第三章	2 維和 3 維空間的向量.....	139
第四章	向量空間.....	185
第五章	內積空間.....	255
第六章	特徵值，特徵向量.....	341
第七章	線性轉換.....	407
第八章	應 用.....	505
第九章	線性代數之數值方法的介紹.....	593
第十章	複數向量空間.....	653

第一章 線性方程組和矩陣

習題 1-1

下列何者是含 x_1 , x_2 和 x_3 的線性方程式？

- (a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$ (b) $x_1 - 3x_2 + x_1x_3 = 2$ (c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$
 (d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$ (e) $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$ (f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

解 $\therefore$ 一線性方程是不包含任一變數之相互乘積或平方根，而且所有變數僅能以一次方幂出現。因此只有(a)、(c)、(f)為含 x_1 , x_2 及 x_3 之線性方程。

2. 若 k 為常數，則以下何者為線性方程式：

- (a) $x_1 - x_2 + x_3 = \sin k$ (b) $kx_1 - \frac{1}{k}x_2 = 9$ (c) $2^k x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

解 由題 1. 的判斷方法知(a)、(b)、(c)皆是。

3. 求出下列各式之解集合：

- (a) $7x - 5y = 3$ (b) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$
 (c) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$ (d) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

解 (a) $x = \frac{3}{7} + \frac{5}{7}t$, $y = t$

(b) $x_1 = \frac{5}{3}s - \frac{4}{3}t + \frac{7}{3}$, $x_2 = s$, $x_3 = t$

(c) $x_1 = \frac{1}{4}r - \frac{5}{8}s + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}$, $x_2 = r$, $x_3 = s$, $x_4 = t$

(d) $v = \frac{8}{3}q - \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}s - \frac{4}{3}t$, $w = q$, $x = r$, $y = s$, $z = t$

4. 求出下列各線性方程組之增廣矩陣。

- (a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3 \\ 7x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$
 (c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

解 (a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2 初等線性代數詳解

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. 找出對應於下列各增廣矩陣之線性方程組。

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

解 (a) $2x_1 = 0$
 $3x_1 - 4x_2 = 0$
 $x_2 = 1$

(b) $3x_1 - 2x_3 = 5$
 $7x_1 + x_2 + 4x_3 = -3$
 $-2x_2 + x_3 = 7$

(c) $7x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 5$
 $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$

(d) $x_1 = 7$
 $x_2 = -2$
 $x_3 = 3$
 $x_4 = 4$

6. (a) 找出一線性方程式，其通解為 $x = 5 + 2t$ ， $y = t$ ，變數為 x, y 。

(b) 證明 $x = t$ ， $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$ 也是(a)的通解。

解 (a) $x = 5 + 2t$ ①
 $y = t$ ②

① - 2 × ②，可得

$$x - 2y = 5$$

(b) 將 $x = t$ ， $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$ 代入

$$x - 2y = 5 \quad \text{得} \quad t - t + 5 = 5$$

所以 $x = t$ ， $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$ 亦為 $x - 2y = 5$ 之通解。

7. 圖二的曲線 $y = ax^2 + bx + c$ 通過點 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) 和 (x_3, y_3) 。
 證明係數 a ， b 和 c 是增廣矩陣為

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix} \quad \text{的線性方程式的解。}$$

解 各點符合曲線方程式

$$\therefore \begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$

以 (a, b, c) 為變數，上式可化為

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

其增廣矩陣為

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

所以 a, b, c 為其解。

8. 那些常數 k 的值會使下列線性方程組無解？恰有一解？無限多解？

$$x - y = 3$$

$$2x - 2y = k$$

解 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & k-6 \end{bmatrix}$

① 無解 $\Rightarrow k-6 \neq 0 \Rightarrow k \neq 6$

② 無限多解 $\Rightarrow k-6=0 \Rightarrow k=6$

③ 沒有 k 值使其恰有一解

9. 考慮方程組 $ax + by = k$

$$cx + dy = l$$

$$ex + fy = m$$

討論直線 $ax + by = k$ ， $cx + dy = l$ 和 $ex + fy = m$ 的相對位置

當：(a) 此方程組無解

(b) 此方程組恰有一解

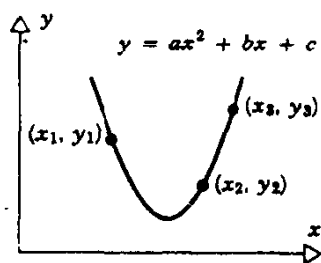
(c) 此方程組有無限多解

解 (a) 三線無共同交點。

(b) 三線交於一點。

(c) 三線重合。

10. 試證若習題 9 之方程組為相容，則至少有一方程可自方程組中移去而其解集合不變。



圖二

4 初等線性代數詳解

解 $\because$ 方程組 $ax + by = k$ 為相容，即恰有一解或有無限多解，

$$cx + dy = l$$

$$ex + fy = m$$

$\therefore$ 以任兩線或任一線就可得其恰有的一解或無限多解，

故至少有一方程可自方程組中移去而其解集合不變。

11. 令習題 9 中 $k = l = m = 0$ ；證明此方程組必相容。若此方程組恰有一解，此三線之交點有何特性？

解 $\because k = l = m = 0$ 且 a, b, c, d, e, f 為常係數，

$\therefore$ 可得 $(0, 0)$ 為其方程組之解，此方程組必為相容。

若此方程組恰有一解，很明顯此三線之交點為原點 $(0, 0)$ 。

12. 考慮方程組 $x + y + 2z = a$

$$x + z = b$$

$$2x + y + 3z = c$$

試證為了使此方程組為相容， a, b ，和 c 必須滿足 $c = a + b$ 。

解
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a-b+c \end{bmatrix}$$

$\because$ 方程組相容 $\Rightarrow -a-b+c=0 \Rightarrow c=a+b$

13. 證明：若線性方程 $x_1 + kx_2 = c$ 和 $x_1 + lx_2 = d$ 有相同的解集合，則此二方程恆等。

解 $\because x_1 + kx_2 = c$ ，令 $x_2 = s$ ，其中 $s \in R$

則 $x_1 = c - ks$ ，即 $(c - ks, s)$ 為其解

同理 $(d - ls, s)$ 為 $x_1 + lx_2 = d$ 的解

已知二方程有相同的解集合， $\therefore d - ls = c - ks \Rightarrow d = c, l = k$

故此二方程為恆等。

習題 1-2

1. 下列何者為縮減列-梯形式 (row-echelon form)？

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

解 由定義知(a)(b)(c)(d)(h)(i)為縮減的列-梯陣。

2. 下列各矩陣，何者為列橫式矩陣。

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(f)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

解 由定義知(a)(b)(d)(e)為列-梯陣。

3. 試決定下列矩陣為縮減的列梯型式或列橫式或二者皆不是。

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} & \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} & \text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(f)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

解 (a)縮減的列梯型式。

(b)皆不是。

(c)縮減列梯型式。

(d)列橫式。

(e)皆不是。

(f)縮減列梯型式。

註：一矩陣為縮減列梯型式必為列橫式。

4. 每一小題中假設線性方程組之增廣矩陣都已經由列運算化簡為所給之縮減列-梯形式。解各方程組。

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} & \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \\ \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

解 由增廣矩陣可得線性方程組

6 初等線性代數詳解

$$(a) \begin{cases} x_1 & = -3 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 & = 7 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 7$$

$$(b) \begin{cases} x_1 & -7x_4 = 8 \\ x_2 & +3x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 & = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 8 + 7t, x_2 = 2 - 3t, x_3 = -5 - t, x_4 = t$$

$$(c) \begin{cases} x_1 - 6x_2 & + 3x_5 = -2 \\ x_3 & + 4x_5 = 7 \\ x_4 + 5x_5 & = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 6s - 3t - 2, x_2 = s, x_3 = -4t + 7, x_4 = -5t + 8, x_5 = t$$

$$(d) \begin{cases} x_1 - 3x_2 & = 0 \\ x_3 & = 0 \\ 0 & = 1 \end{cases}$$

$$0 = 1$$

$\therefore$ 第三列 $0 = 1$ 矛盾 $\Rightarrow$ 此方程組為不相容，故無解。

5. 每一小題中假設線性方程組之增廣矩陣都已經由列運算化簡為所給之列-梯形形式。解各方程組。

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解 由增廣矩陣可得線性方程組

$$(a) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = -37, x_2 = -8, x_3 = 5$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + 8x_3 - 5x_4 = 6 \\ x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 3 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 13t - 10, x_2 = 13t - 5, x_3 = 2 - t, x_4 = t$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 8x_5 = -3 \\ x_3 + x_4 + 6x_5 = 5 \\ x_4 + 3x_5 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = -7s + 2t - 11, x_2 = s, x_3 = -3t - 4, x_4 = -3t + 9, x_5 = t$$

(d) ∵ 最後一列為 $0=1$ ，矛盾，∴ 無解

6. 用 Gauss-Jordan 消去法解下列各方程組。

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned} \\ \text{(b)} & \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(c)} & \begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x & - 3w = -3 \end{aligned} \\ \text{(d)} & \begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned} \end{array}$$

解 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{-1}{7} - \frac{3}{7}t \\ x_2 &= \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x & - w = -1 \\ y - 2z & = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = s - 1, y = 2r, z = r, w = s$$

8 初等線性代數詳解

$$(d) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

由最後一列知無解。

7. 用 Gaussian 消去法解習題 6. 中的各方程組。

解 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_2 - 5x_3 = -9 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -x_2 - 2x_3 + 8 \\ x_2 = 5x_3 - 9 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{4}{7}x_3 = \frac{1}{7} \end{array}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t, x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t, x_3 = t$$

(c)(d) 參考(a)(b)。

8. 用 Gauss-Jordan 消去法解下列各方程組。

(a) $2x_1 - 3x_2 = -2$ (b) $3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15$

$2x_1 + x_2 = 1$ $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$

$3x_1 + 2x_2 = 1$ $3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$

$-6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 30$

(c) $4x_1 - 8x_2 = 12$ (d) $10y - 4z + w = 1$

$3x_1 - 6x_2 = 9$ $x + 4y - z + w = 2$

$-2x_1 + 4x_2 = -6$ $3x + 2y + z + 2w = 5$

$-2x - 8y + 2z - 2w = -4$

$x - 6y + 3z = 1$

解 (a)
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{13}{2} & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{3}{4}, 0 = -\frac{7}{8} \text{ 矛盾}$$

$\Rightarrow$ 此方程組為不相容，故無解。

(b) 參考(a).

(c)
$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 3$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 + 2t, x_2 = t$$

(d) 參考(c)

9. 用 Gaussian 消去法解習題 8. 中各方程組。

解 (a)
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{13}{2} & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 - \frac{3}{2}x_2 = -1, x_2 = \frac{3}{4}, 0 = -\frac{7}{8} \text{ 矛盾}$$

$\Rightarrow$ 此方程式為不相容，故無解。

(b) 參考(a)

(c)
$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 3$$

$$\Rightarrow x_1 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = 2t + 3, x_2 = t$$

(d) 參考(c)

10. 11. 參考問題 8. 9。

12. 解下面的聯立方程式

10 初等線性代數詳解

$$\begin{cases} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 = 9 & \text{.....①} \\ I_1 - 2I_3 + 7I_4 = 11 & \text{.....②} \\ 3I_1 - 2I_2 + I_3 + 5I_4 = 8 & \text{.....③} \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 = 10 & \text{.....④} \end{cases}$$

解 ①+④ $4I_1 + 7I_3 + 8I_4 = 19$ ⑤

③+2×④ $7I_1 + 9I_3 + 13I_4 = 28$ ⑥

② $I_1 - 2I_3 + 7I_4 = 11$ ⑦

⑥-⑤+⑦ $4I_1 + 12I_4 = 10$ ⑧

⑥×2+⑦×9 $23I_1 + 89I_4 = 155$ ⑨

由⑧、⑨解得 $I_1 = -1, I_4 = 2$

代入②⇒ $I_3 = 1$

代入①⇒ $I_2 = 0$

⇒ $I_1 = -1, I_2 = 0, I_3 = 1, I_4 = 2$

13. 解下列方程組，其中 a, b, c 為常數。

(a) $2x + y = a$ (b) $x_1 + x_2 + x_3 = a$
 $3x + 6y = b$ $2x_1 + 2x_3 = b$
 $3x_2 + 3x_3 = c$

解 (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 6 & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{3a}{2} + b \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3}a - \frac{1}{9}b \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}a + \frac{2}{9}b \end{bmatrix}$

⇒ $x = \frac{2}{3}a - \frac{1}{9}b, y = -\frac{a}{3} + \frac{2}{9}b$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 2 & b \\ 0 & 3 & 3 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & \frac{b}{2} - a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{c}{3} \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a - \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{3} - a + \frac{b}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= -a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \\ x_2 &= a - \frac{b}{2} \\ x_1 &= a - \frac{c}{3} \end{aligned}$$

14. 那些 a 的值會使下列方程組無解？恰有一解？無限多解？

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

解 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 16 - a^2 & 4 - a \end{bmatrix}$

① 無解 $\Rightarrow 16 - a^2 = 0$ 但 $4 - a \neq 0 \Rightarrow a = -4$

② 恰一解 $\Rightarrow 16 - a^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm 4$

③ 無限多解 $\Rightarrow 16 - a^2 = 0$ 且 $4 - a = 0 \Rightarrow a = 4$

15. 化簡 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ 成為縮減列-梯形式，並且不使用任何分數。

解 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & -37 \end{bmatrix}$

16. 找出 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 的兩個不同之列-梯形式。

解 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 為 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 的兩個列-梯陣。

17. 解下列包含未知角 α, β, γ 之非線性方程組，

12 初等線性代數詳解

其中 $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$, $0 \leq \gamma < \pi$

$$2 \sin \alpha - \cos \beta + 3 \tan \gamma = 3$$

$$4 \sin \alpha + 2 \cos \beta - 2 \tan \gamma = 2$$

$$6 \sin \alpha - 3 \cos \beta + \tan \gamma = 9$$

$$\boxed{\text{解}} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \sin \alpha = 1 & \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \cos \beta = -1 & \Rightarrow \beta = \pi \\ \tan \gamma = 0 & \gamma = 0 \end{array}$$

18. 解 x 、 y 、 z 之非線性方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad \text{..... ①}$$

$$x^2 - y^2 + 2z^2 = 2 \quad \text{..... ②}$$

$$2x^2 + y^2 - z^2 = 3 \quad \text{..... ③}$$

$$\boxed{\text{解}} \quad \text{①} - \text{②} \quad 2y^2 - z^2 = 4 \quad \text{..... ④}$$

$$\text{①} \times 2 - \text{③} \quad y^2 + 3z^2 = 9 \quad \text{..... ⑤}$$

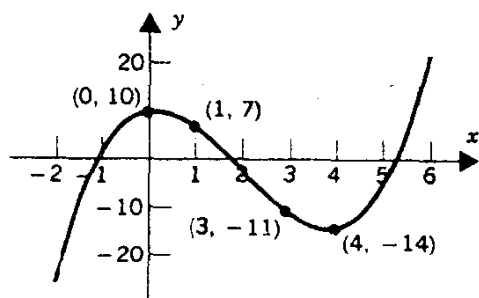
$$\text{④} - \text{⑤} \times 2 \quad -7z^2 = -14$$

$$z^2 = 2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{2}$$

$$y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

19. 圖一為三次方程式, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 之圖形, 求係數 a 、 b 、 c 、 d 。



圖一

$$\begin{cases} 10 = d \\ 7 = a + b + c + d \\ -11 = 27a + 9b + 3c + d \\ -14 = 64a + 16b + 4c + d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 = d \\ -3 = a + b + c \\ -21 = 27a + 9b + 3c \\ -24 = 64a + 16b + 4c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10 = d \\ -4 = 8a + 2b \\ -3 = 15a + 3b \end{cases}$$

$$a = 1, b = -6, c = 2, d = 10$$

20. 描述出 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ 的可能縮減列-梯形式。

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 1 & \frac{e}{d} & \frac{f}{d} \\ 1 & \frac{h}{g} & \frac{i}{g} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & \frac{ae - bd}{ad} & \frac{af - cd}{ad} \\ 0 & \frac{ah - gb}{ag} & \frac{ai - gc}{ag} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{af - cd}{ae - bd} \\ 0 & 0 & \frac{ai - gc}{ah - gb} - \frac{af - cd}{ae - bd} \end{bmatrix}$$