

初等几何

北京市《初等数学》编写组编

人民教育出版社

初 等 几 何

北京市《初等数学》编写组编

541/224/25

人 民 教 育 出 版 社

1975·北京

内 容 提 要

这套《初等数学》共分五册，即《初等代数》、《初等几何》、《三角函数》、《解析几何》及《公式和数表》，是一般科学技术读物。

各册内容努力选取三大革命运动中普遍需要的数学知识，并且注意突出基本规律及其辩证发展的线索。为了便于自学，叙述力求详细，同时各章一般有小结，每册有总结，还配置了一定数量的练习题。

《初等几何》这一册共有以下六章：基础知识，三角形，相似三角形，解三角形，圆，空间平面和直线。

这套《初等数学》可供广大工农兵、知识青年、中小学教师阅读参考。

初 等 几 何

北京市《初等数学》编写组编

*

人民教育出版社出版
北京人民教育出版社重印
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印装

*

1975年6月修订第1版 1978年1月第1次印刷

书号 13012·02 定价 0.54 元

毛主席语录

中国人民有志气,有能力,一定要在不远的将来,赶上和超过世界先进水平。

事物矛盾的法则,即对立统一的法则,是自然和社会的根本法则,因而也是思维的根本法则。

人们为着要在自然界里得到自由,就要用自然科学来了解自然,克服自然和改造自然,从自然里得到自由。

读书是学习,使用也是学习,而且是更重要的学习。

目 录

引言	1
第一章 基础知识	4
第一节 线段、角和圆	4
线段、射线和直线	4
角	8
圆	12
第二节 相交和平行	16
相交直线的夹角	16
平行线的判定	19
平行线的性质	22
第三节 证题举例	26
小结	30
第二章 三角形	33
第一节 三角形的内角和	34
第二节 全等三角形	38
画三角形	38
全等三角形的判定	43
第三节 等腰三角形	49
等腰三角形的对称性	50
轨迹	53

第四节	直角三角形	57
	勾股定理	57
	两类特殊的直角三角形	63
第五节	平行四边形和梯形	65
	平行四边形	65
	梯形	70
	小结	76
第三章	相似三角形	78
第一节	成比例的线段	79
	平行截割定理	79
	比例线段	81
	平行截割比例线段	84
第二节	相似三角形	87
	相似三角形的判定	87
	相似三角形的性质	93
第三节	测量知识简介	100
	测绘平面图	100
	水准测量的原理和方法	103
	渠道纵断面水准测量	107
	平整土地的测量	110
	小结	113
第四章	解三角形	115
第一节	锐角三角函数	115
	锐角三角函数的概念	115
	三角函数值	120
第二节	解直角三角形	123
第三节	解斜三角形	134
	正弦定理	135

	余弦定理	143
小结		148
第五章 圆		153
第一节 一般性质		153
三点定一圆		153
圆的对称性		154
圆心角和圆周角		156
第二节 等分圆周		164
等分圆周和正多边形		164
正多边形和圆周率		168
第三节 相切问题		171
圆和直线相切		171
两圆相切		179
第四节 弧长 弧度制		187
弧长和扇形面积		187
弧度制		191
小结		197
第六章 空间平面和直线		200
第一节 基本性质		200
第二节 平行问题		204
直线和平面平行		204
平面和平面平行		207
第三节 直线和平面相交		209
异面直线的夹角		209
直线和平面垂直		211
直线和平面斜交		214
第四节 平面和平面相交		217
二面角		217

* 垂面	219
小结	221
总结	223

引 言

生产各种产品，如六角螺帽、燕尾槽、滚珠轴承等(图 1)，都要求有一定的形状和大小。

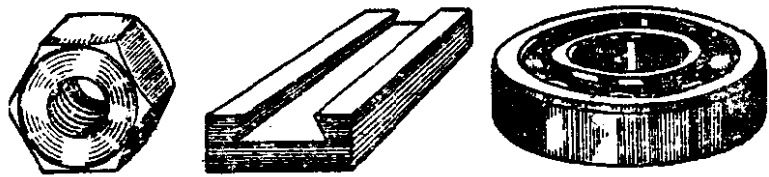


图 1

考察各种物体的形状、大小和位置关系，就产生了各种图形的概念。如图 2，一个是木块，一个是铁块。它们的物理性质截然不同：一个轻，一个重；一个软，一个硬；等等。

但是撇开这些物理性质，只比较它们的形状和大小，则是一样的。人们在实践中反

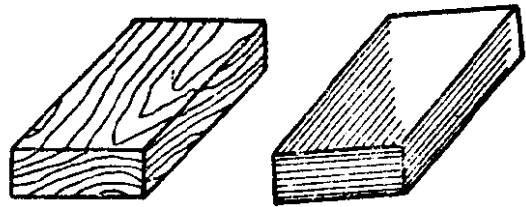


图 2

复多次见到这种形状的物体，就形成了“长方体”的概念。这就是说，抽去物体的物理性质，只考察物体的形状和大小，就得到了几何体或几何图形。正如恩格斯指出的：“和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。”

几何研究的对象就是从现实世界中抽象出来的各种几何图形。

实际的物体都是立体的，如一根阶梯形的轴就是立体的（图3）。为了研究物体的形状，需要从不同侧面去观察它，这样就得到了各种平面图形，如图4和图5。从这些平面图形的形状和大小，就能了解这个物体的形状和大小。



图 3

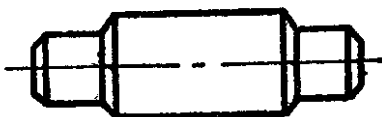


图 4

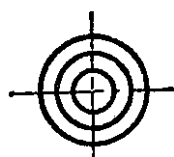


图 5

初等平面几何主要研究最基本、最常用的平面图形——直线形（由直线段组成的图形）和圆。

研究什么问题，这要从生产实践的需要来看。制造产品，测量地形，建筑房屋等等，都提出了下面的问题：

首先要根据形状定尺寸。例如，一根阶梯形的轴，定出哪些尺寸，形状大小就确定了呢？就是说，要研究确定图形的条件。

其次要根据尺寸去划线。钳工师傅加工一个工件时，往往要先在材料上划线。就是说，要根据所给的条件去作图。

另外，加工和检验时，往往还要根据知道的尺寸去求出不知道的尺寸。就是说，要根据图形的性质，从已知的长度、角度去推求未知的长度和角度。

总之，就是要研究确定图形的条件和图形的性质，研究作图的方法，研究从已知推求未知的方法。其中，研究确定图形的条件和图形的性质，是最基本的问题。

现实世界的图形是多种多样的，就是由直线和圆组成的图形也是变化万千，当然不可能一个个地去研究。那么怎么去研究呢？

劳动人民在生产实践中积累了丰富的图形知识，也创造了研究图形的方法。如农民丈量土地，遇到不规则的地块时，总是把它分成几个规则的地块来丈量。这样的实践经验说明了一个道理：复杂的图形可以分解为简单的图形来研究。

平面几何在研究图形时也是这样，“为要决定并且比较一切直线形的面积，人们就把它们分成三角形。”（马克思：《资本论》，人民出版社1963年版，第一卷第7—8页）如阶梯形轴的平面图，就可以分解成长方形和梯形（图6），而长方形和梯形，又可以分解成三角形（图7）。可见，组成直线形的基本图形是三角形。抓住这个基本图形来研究，其他直线形问题就好解决了。圆形的研究，也要借助于三角形。因此，在平面几何中，主要研究三角形。

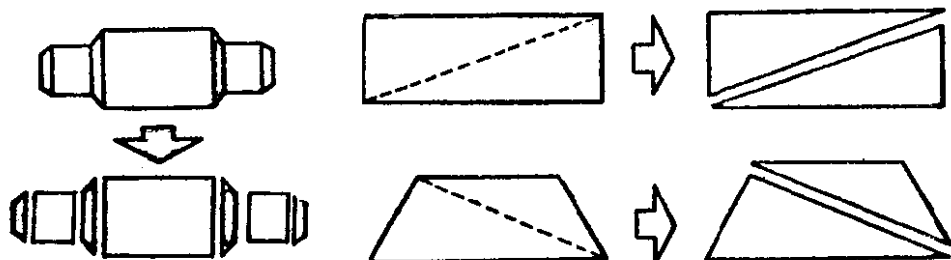


图 6

图 7

在第一章里，先讲一些有关线段、角、圆弧的基本概念和图形中角的分析方法。在后几章里，就以三角形为基本线索进行研究。

第一章 基础知识

第一节 线段、角和圆

初等几何研究的平面图形是由线段、角和圆弧构成的。我们先来学习关于线段、角和圆的概念。

线段、射线和直线

1. 线段

“人的认识，主要地依赖于物质的生产活动”。

建筑工人砌墙时用的标线，贫下中农插秧时拉紧的秧绳，等等，都是线段的形象。当我们用直尺把两点连接起来，就得到一条线段。这两个点叫做线段的端点。



图 1-1

一个点用一个大写字母表示。一条线段可以用表示它的两个端点的大写字母来表示，如线段 AB ；也可以用小写字母来表示，如线段 a (图 1-1)。

把 A 、 B 两点用不同形状的线连接起来(图 1-2)，可以看到线段的一个基本性质：在连接两点的线中，线段最短。 (简称两点之间，线段最短。)

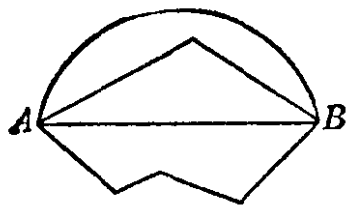


图 1-2

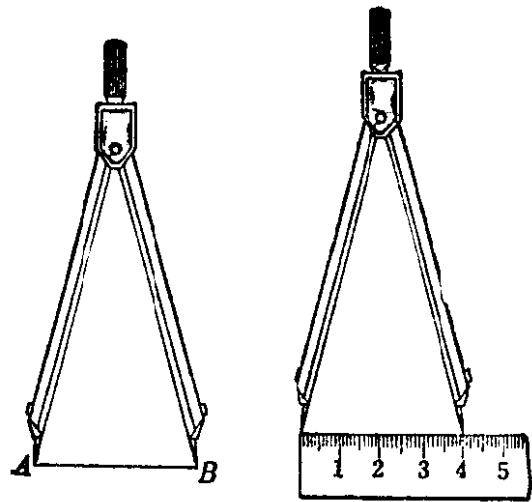


图 1-3

连接两点的线段的长度，叫做这两点间的距离。

线段的长度，除了用刻度尺直接度量外，还可以用两脚规配合刻度尺来量(图 1-3)

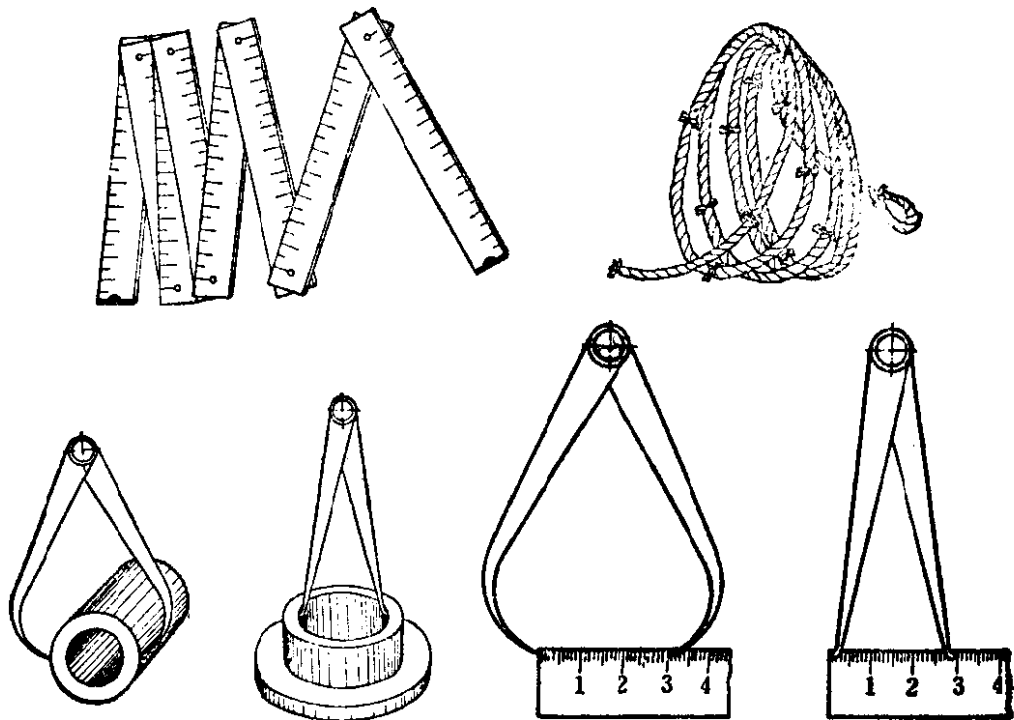


图 1-4

在农村和工厂，经常用到的度量长度的工具有折尺、测绳、卡钳等(图 1-4)。

当零件的精度要求较高时，常用游标卡尺(图 1-5)、分厘卡(图 1-6)等来测量。

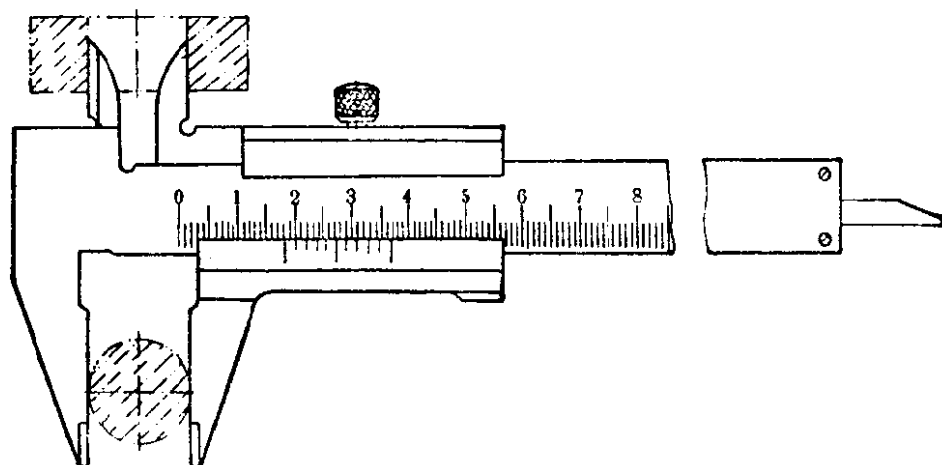


图 1-5

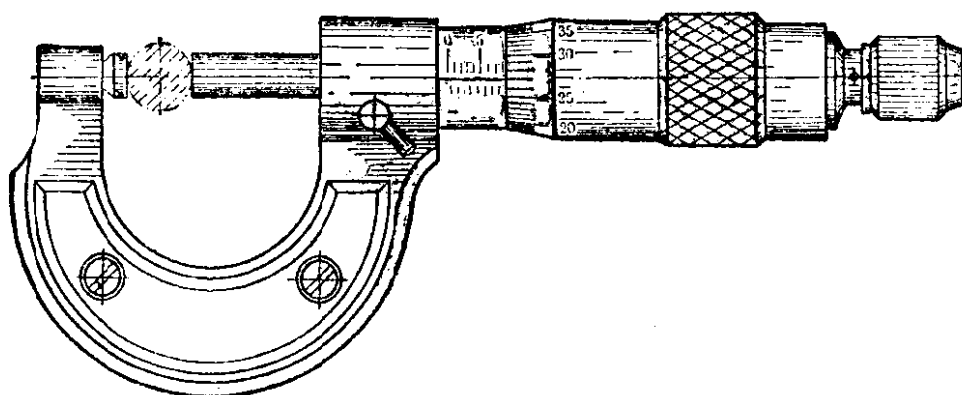


图 1-6

毛主席教导我们：“许多东西单从书本上学是不成的，要向生产者学习，向工人学习，向贫农下中农学习”。我们要结合实际需要，到工厂、农村去，向有实践经验的工人、贫下中农学习量具的使用方法。

2. 射线

把线段从一端无限延长，就得到一条射线。射线只有一个端点。像手电筒、探照灯射出的光线都可以看成是射线。



图 1-7

射线用表示它的端点和射线上任意一点的大写字母来表示，表示端点的字母写在前面，如“射线 OC ”(图 1-7)。

3. 直线

把线段从两端向外无限延长，就得到一条直线。直线没有端点。

直线可以用表示它上面任意两个点的大写字母来表示，如“直线 AB ”；也可以用一个小写字母表示，如“直线 l ”(图 1-8)。



图 1-8

直线有一个基本性质：经过两点只能引一条直线。（也称两点定一直线。）

根据这个性质，架线工人在立电线杆时，只要定出两根杆的位置，就能定出一行电线杆所在直线上的位置；木工师傅在

木板上弹墨线时,先定两个点,也是利用了这个基本性质。

角

在生产和日常生活中,经常会看到角,如五角星的五个角,木工师傅用的角尺两边所成的角,等等(图 1-9)。

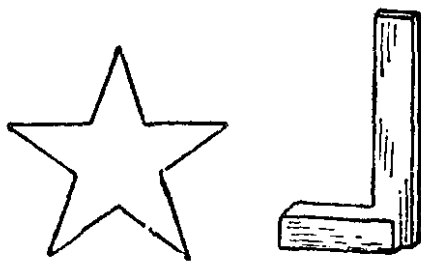


图 1-9

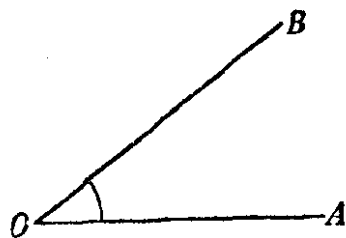


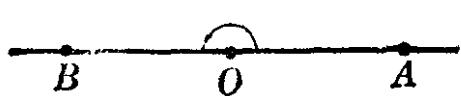
图 1-10

从一点引出的两条射线所组成的图形叫做角。

如图 1-10, 两条射线的共同端点 O 叫做角的顶点, 这两条射线 OA 和 OB 都叫做角的边。

一个角也可以看成是由一条射线 OA 绕着它的端点 O , 从原来的位置 OA 转到另一个位置 OB 而形成的。

如果射线绕着它的端点 O 旋转, 转到和原来位置构成一条直线, 这时所得的角叫做平角(图 1-11(1)); 再旋转下去, 到这条射线回到它原来的位置, 这时所得到的角叫做周角(图 1-11(2))。



(1)



(2)

图 1-11

平角的一半叫做直角, 小于直角的角叫做锐角, 大于直角

而小于平角的角叫做钝角(图 1-12)。

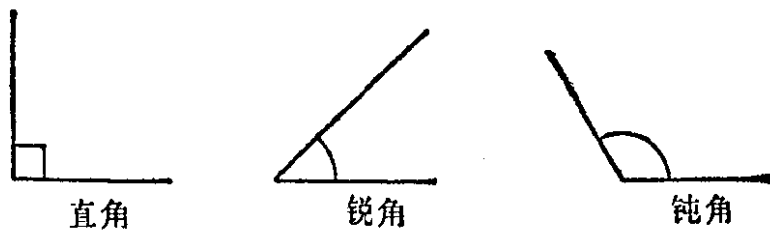


图 1-12

角用符号“ \angle ”表示，如图 1-10 中的角记作 $\angle AOB$ 或 $\angle BOA$ 。注意：表示顶点的字母 O 必须写在其他两个字母的中间。如果不会和其他角发生混淆时， $\angle AOB$ 可以简写为 $\angle O$ 。为了简便，有时在角的里面标上数字或希腊字母来表示角，如图 1-13 中的 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle \alpha$ 、 $\angle \beta$ 等。



图 1-13

通常度量角的单位是度、分、秒。把周角分成 360 等份，每一份就是 1 度，记作 1° 。每 1 度又分成 60 等份，每一份是 1 分，记作 $1'$ 。每 1 分再分成 60 等份，每一份是 1 秒，记作 $1''$ 。它们是 60 进制的。

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 60', & 1' &= 60'' \\ 1' &= \frac{1^\circ}{60}, & 1'' &= \frac{1'}{60} \end{aligned}$$

度量角用量角器(也称半圆仪)，如图 1-14。

直角等于 90° ，平角等于 180° ，周角等于 360° 。