ZhXShX

中学数学丛书

概率统计初步

钱吉林

湖北人民出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

HONGXUE SHUXUE CONGSHU

ZhXShX

中学数学丛书

概率统计初步

钱 吉 林

湖 北 人 民 出 版 社

中学数学丛书
概率统计初步
钱吉林

湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行
黄冈报印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　8.75印张　198,000字
1982年11月第1版　1982年11月第1次印刷
印数：1—17,600

统一书号：7106·1654　定价：0.73元

内 容 提 要

本书前三章介绍概率论初步知识，后三章介绍数理统计初步知识。全书包含了全国中学统编数学教材中有关概率统计的全部内容，并且适当作了拓宽、引深。本书编入了丰富的例题和习题，便于学生自学，同时，也适合中学数学教师教学时参考。

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》．根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》．我们认为，这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合湖北人民出版社已组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深．编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和教学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概

念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的．丛书中每本小册子既相对独立又互相联系．同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用．学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读．另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便于同学们自学，同时对中学教师教学亦有一定的参考作用．

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好．同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见．

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象规律性的一门科学．它是数学中一个重要而又活跃的分支．主要因为：第一，随机现象是普遍存在的；第二，随着科学技术的发展，概率统计方法已逐渐渗透到物理、化学、生物、地理等各自然科学中去；第三，概率统计对工业、农业、军事以及国民经济各部门，都有广泛的应用．由于这些原因，目前各高等院校都开设了概率统计课．在中学讲点概率统计初步，也成为世界各国的普遍现实．

本书共分六章．前三章介绍概率论初步知识，后三章介绍数理统计初步知识．本书就内容而言，包含了现行中学课本中有关概率统计的全部内容，并且是它的补充和深入．另外，还由于本书包含了较多的例题和习题，因而对中学生和中学教师，可能会有一定的帮助．阅读本书只需要具有高中一年级的数学程度，所以，高中学生阅读本书是不会有困难的．

在本书编写过程中，陆秀丽副教授给予了指导并审阅了全稿．同时，还得到陈森林副教授的鼓励，以及汪志文、栾长福、李桃生、李麟雄等同志的帮助．汪成伟同志为本书绘制了全部插图，谨在此表示感谢．

由于编者水平有限，错误缺点难免，欢迎广大读者批评指正．

作　者

1982 年 3 月

目　　录

第一章　概率及其计算

本章主要介绍三个问题：随机现象；概率的定义以及几个求概率的基本公式.

§1.　随机现象与非随机现象

在日常生活中，大家经常遇到两种不同的现象，一种称为**非随机现象**，一种称为**随机现象**.

什么叫非随机现象呢？它是指在一定条件之下，必然发生某一结果的现象．譬如：

例 1　在标准大气压下，水加热到 100℃，就必然沸腾．这就是说，“水沸腾”是必然的唯一结果．习惯上把这种非随机现象，又称为**必然现象**.

有时候非随机现象还可以有另一种说法，由于它只能发生唯一的结果，对这个结果而言是必然的，对其它结果就可认为是不可能发生的．譬如在上面条件下，“水不沸腾”就是不可能发生的结果．因而从相反的角度来说，必然现象又可叙述为**不可能现象**.

必然现象与不可能现象总称为**非随机现象**．它是同一个问题，从两个不同角度说的．换句话说，必然现象的反面是不可能现象，不可能现象的反面是必然现象.

例 2　在$\triangle ABC$中，如果$\angle A=\angle B=\angle C$，那么这个三角形的“三边相等”是必然的，因而也是一种非随机现象.

例 3 把篮球往上一抛，那么抛上去的篮球“往下落”也是必然的，“不下落”是不可能的，也是一种非随机现象.

下面再来解释什么叫做随机现象？它是指在同一条件下，可能出现的结果不止一个. 事先不能断定会出现哪一个结果，可能这次出现这一结果，下次出现那一结果，随机而变化. 譬如：

例 4 一个射手打靶，他可能打中 10 环，也可能打中 9 环，…，甚至还可能打中 0 环，结果不是唯一的. 谁也不能预先断定他会中几环，结果是随机而变化的，因而是一种随机现象.

例 5 某灯泡厂生产 $15W$ 灯泡，如果每个灯泡能点 1000 小时以上的称为合格品，那么一个灯泡是否为合格品，预先不能断定，也是一种随机现象.

例 6 两运动员赛乒乓球，裁判员为了决定让谁先发球，他就抛掷一个均匀圆塑料片. 它一面涂红色(称为正面)，一面涂绿色(称为反面). 事先不能断定哪一面朝上，这也是随机的. 这样的例子还可以举出很多来.

非随机现象是有规律可寻的，这一点大家是不会有怀疑的，这些规律被人们称为定理或公式. 譬如上面例 2，在平面几何中，被称为等边三角形的判定定理.

现在的问题是随机现象有没有规律可寻呢？先看上面的例 6，尽管我们不能预先断定哪一个面朝上，但从生活经验告诉我们，正、反面朝上的可能性，大约都是$\frac{1}{2}$. 这就是一种规律性，人们也正是利用这种规律性，来公正地判断发球权的. 关于这种规律性研究，历史上有许多数学家进行过试验，他们掷的是钱币，结果如下表 1—1.

由表 1—1 可见，出现正面与出现反面的可能性，确实呈现着一定的规律，即各占$\frac{1}{2}$. 而且随着试验次数的增加，规律更

表 1—1

试验者	掷钱次数	掷出国徽次数	出现国徽所占百分比
迪摩根(*DeMorgan*)	2048	1061	0.518
蒲丰(*Buffon*)	4040	2048	0.5069
皮尔逊(*Pearson*)	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

加明显.

我们一定会问，研究随机现象出现某一结果的可能性大小，有没有意义呢？答案是肯定的. 譬如例 5 中，生产 15W 灯泡，为了科学管理生产，我们就要掌握次品率是多少(即生产次品的可能性大小)，次品率高低，不仅反映一个厂生产水平的高低，对改进生产也有重要的价值. 至于怎样求出次品率，这将留在下一节进行讨论.

由上面讨论可知，随机现象也是有规律的，概率论和数理统计就是一门研究随机现象规律性的科学. 由于随机现象无处不有，因而概率统计对于工业、农业、气象、水文、建筑、通讯、医学及经济等各部门，对于物理、化学、生物等各学科，都有广泛的应用. 正由于这样，国内外的中学数学教材，对概率统计都作了介绍.

练　习　1.1

1. 什么叫随机现象？什么叫非随机现象？
2. 试举出几个非随机现象与随机现象的例子来。

§2. 频率与概率

在上节我们说过，随机现象在同一条件下，它可能出现的结果不尽相同．为了便于研究，我们把每一可能的结果，称为**随机事件**，简称为**事件**，并用英文大写字母 A，B，C，…等来表示．

显然，随机事件在一定条件下，可能发生，也可能不发生．下面来举几个例子．

例 1 在 0，1，2，…，8，9 这十个数字中，任选一个．令 A 表示"取得的数为 0"，B 表示"取得的数为 5"，C 表示"取得的数为偶数"，D 表示"取得的数不超过 6"．那么 A，B，C，D 等都是随机事件．

例 2 电话局每天接到用户叫电话的次数，不是固定不变的，是随机的．用 A 表示"次数为 5000"，B 表示"次数大于或等于 10000"，C 表示"次数介于 5000 到 8000 之间"．这时，A、B、C 也是随机事件．

例 3 长江在武汉每年的最高水位，与武汉人民的生命财产有密切的关系，但最高水位也是随机的．设 H 表示"最高水位 $\leqslant 27$ 米"，M 表示"最高水位 >29 米"，R 表示"最高水位 $\geqslant 30$ 米"．那么 H、M、R 等也是一些随机事件．

这样的例子还可以举出很多，这里不再一一列举了．

下面再介绍**必然事件**与**不可能事件**这两个概念．所谓必然事件，是指在一定条件下，必然发生的随机事件．不可能发生的随机事件，称为不可能事件．必然事件记为 U，不可能事件记为 V．譬如在例 1 中，再令 U 表示"所得的数 $\leqslant 9$"，V 表示"所得的数为负"．那么 U 是必然事件，V 为不可能事件．

为了便于今后讨论，我们把必然事件与不可能事件，都作为随机事件的特殊情况来对待.

为使大家进一步加深对事件的认识，下面再引进基本事件的概念，并用集合论的语言来阐述它.

我们把不可能再分的事件称为**基本事件**. 譬如上面例1中，“取得的数是0”，“取得的数是1”，……，“取得的数是9”都是基本事件. 如果用 e_i 表示“取得的数是 i”这一基本事件 $(i=0, 1, 2, \cdots, 9)$. 那么基本事件有10个：e_0, $e_1, \cdots$, e_9. 再令全体基本事件组成的集合为 Ω. 即

$$\Omega=\{e_0, e_1, \cdots, e_9\}$$

现在要问这一随机现象除了上面10个基本事件之外，还有哪些随机事件呢？它们与 Ω 之间有什么关系呢？我们先把例1中的一些事件用集合表示出来：

$$A=\{e_0\}$$

$$B=\{e_5\}$$

$$C=\{e_0, e_2, e_4, e_6, e_8\}$$

$$D=\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

并把由两个或两个以上基本事件组合而成的事件，称为**复合事件**. 上面 A、B 是基本事件，C、D 是复合事件. 从集合论观点来看，一切事件都是 Ω 的一个**子集**. Ω 的单元素子集就是基本事件，Ω 的子集所含元素多于1个，就是复合事件.

例1中 Ω 一共包含多少个随机事件呢？这就要看 Ω 可组成多少个不同子集.

首先，它有10个基本事件：$\{e_0\}$, $\{e_1\}, \{e_2\}$, ……, $\{e_9\}$.

此外，还有 $C_{10}^2=45$ 个含两个元素的复合事件：$\{e_0, e_1\}$, $\{e_0, e_2\}, \cdots, \{e_8, e_9\}$. 再有 C_{10}^3 个由三个基本事件组成的复合事件，C_{10}^4 个由四个基本元素组成的复合事件，……，以及由全体

基本元素组成的复合事件 Ω. 最后还有一个由空集组成的不可能事件.

换句话说，例 1 中 Ω 的一切可能子集，就构成了一切随机事件,每一子集就是一个随机事件. 所以上面随机事件的个数为

$$C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \cdots + C_{10}^{10} = (1+1)^{10} = 2^{10}.$$

一般地说，如果某随机现象由 n 个基本事件组成，则所有随机事件组成集合的元素个数为 2^n. 换句话说，有 2^n 个随机事件，其中由全体基本事件组成的就是必然事件，不含任何基本事件的空集就是不可能事件.

下面再举一个例子,它包含基本事件数为无穷多个的情况.

例 4 平面上有一个圆 O，如图 1.1 所示. 现在向圆内任意丢一个点，由于这个点可能落的位置在圆内是任意的，因此可能的结果为无穷多个. 这样，全体基本事件为圆内一切点所组成，有无穷多个基本事件，随机事件当然也有无穷多个. 事实上，由圆内若干个（有限或无限）点组成的集合，都是这一随机现象中的一个随机事件.

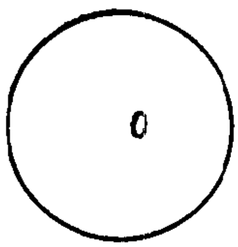

图 1.1

下面再来介绍本节的两个主要概念：**频率与概率**.

我们知道，随机事件 A 在一次试验中是否会发生，预先是不知道的. 但是如果大量的重复试验，就会呈现出一定的规律性，即所谓频率的稳定性. 为了说明这个问题，先来介绍一下什么叫做频率?

设随机事件 A 在 n 次试验中，共发生了 m 次，则 $\frac{m}{n}$ 称为 A 发生的频率，记为 $W(A)$. 其中 m 称为 A 发生的频数，n 称为总试验次数，所以

$$W(A)=\frac{m}{n} \quad ①$$

例 5 对 1000 粒黄豆进行发芽试验，结果有 906 粒发了芽．用 A 表示"发芽"这一事件，由题设可知 $n=1000, m=906$．所以

$$W(A)=\frac{906}{1000}=90.6\%$$

即发芽率为 90.6%．这个数字在一定程度上，可以反映这批种子的好坏．

例 6 对某校 15 名男子篮球队员，进行了身高测量．具体数字如下(单位：米)

1.81	1.85	1.86	1.89	1.75	1.91
1.80	1.70	1.78	1.90	1.83	1.76
1.70	1.85	1.84			

用 A 表示"身高在 1.90 米以上(包含 1.90 米在内)"这一事件，B 表示"1.80 米≤身高<1.90 米"求 $W(A)$ 与 $W(B)$．

解：先求 $W(A)$．$n=15$，m_A 表示 A 发生的频数，由题设知 $m_A=2$．所以

$$W(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{2}{15}.$$

同理可求

$$W(B)=\frac{8}{15}.$$

下面来叙述频率的一些主要性质，在①式频率的定义中，由于 $0\leqslant m\leqslant n$，所以对任意随机事件 A，都有

$$0\leqslant W(A)\leqslant 1 \quad ②$$

特别地，对于必然事件 U 与不可能事件 V，有

$$W(U)=1,\ W(V)=0. \quad ③$$

其次，频率还有一个重要性质，即所谓频率的稳定性．我们先举一个例子来看．

例 7 对某种黄豆进行发芽试验，抽了十批，试验结果如下表 1—2．

表 1—2

试验序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
发芽率	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

从表 1—2 可以看出，尽管每批试验的种子粒数不同，发芽率也有变化，然而呈现出一种规律，即发芽率稳定在 0.9 这个常数左右摆动．我们把这种频率稳定在某个常数左右摆动的现象，叫做频率的稳定性．从表 1—2 可以看出：这种稳定性表现在两个方面．首先，随着试验次数增加，这种摆动幅度愈变愈小．其次，这种规律性，随着试验批数增多，才会明显表露出来．例如只做五批试验，从表 1—2 可知得到五个频率值，即 1，0.8，0.9，0.857，0.892，还不能很好看出稳定在哪个常数左右摆动．但试验十批后，就可发现稳定在 0.9 左右摆动了．

再来介绍概率．由随机事件的频率的稳定性，可以看出随机事件 A 的频率 $W(A)$，固定在一个常数左右摆动．这个常数我们称为事件 A 的概率，记为 $P(A)$．因而概率 $P(A)$ 是一个数，它刻划事件 A 发生的可能性的大小．

由于必然事件 U，$W(U)=1$，所以 $P(U)=1$．即必然事件发生的可能性是 100%．类似地有 $P(V)=0$．对任意随机事