有限群和紧群的表示论

丘维声 著

北京大学出版社

有限群和紧群的表示论

丘维声　著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

有限群和紧群的表示论/丘维声著. 一北京：北京大学出版社,1997.12

ISBN 7-301-03430-X

Ⅰ. 有… Ⅱ. 丘… Ⅲ. ①有限群-群表示-高等学校-教材 ②紧拓扑群-群表示-高等学校-教材 Ⅳ. 0152.6

书　　名：有限群和紧群的表示论
著作责任者：丘维声　著
责 任 编 辑：刘　燕
标 准 书 号：ISBN 7-301-03430-X/O・395
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　　话：出版部　62752015　发行部　62559712　编辑部　62752032
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168　32开本　10.875印张　275千字
1997年12月第一版　1997年12月第一次印刷
印　　　数：0001—3,000册
定　　　价：15.50元

谨以此书庆贺著名代数学家
段学复院士八十华诞

内 容 简 介

本书是作者在北京大学数学系多次讲授群表示论课程的基础上写成的，详细阐述了有限群在特征不能整除其阶的域上的表示理论和特征标理论，也介绍了紧致拓扑群的表示理论.全书共分六章，内容包括：群表示论的基本概念和 Abel 群的表示；有限群的表示与群代数上的模；群的特征标；表示的张量积，分裂域，群的直积的表示；诱导表示和诱导特征标；紧致群的线性表示.

本书叙述开门见山，由易到难，循序渐进，条理清楚，论证严谨，讲解详细，注意应用.各章中有许多例题，并且几乎每一节也都配有习题，较难的习题有提示.

本书可作为数学系研究生和高年级大学生的教材、物理系和化学系研究生的教学参考书，还可以作为数学工作者和科技工作者进行科研工作的参考书，也可以供学过线性代数和抽象代数的读者自学使用.

序

群表示论，特别地，群指标（特征标）理论，是研究有限群的最强有力的工具之一．有限群的常指标（即常特征标）首先由 G. Frobenius 于 1896 年引进，随后 G. Frobenius 和 W. Burnside 把有限群的常指标理论和复表示论发展到相当完善的地步．他们还给出了有限群的常指标理论对有限群结构的应用；例如，Burnside 关于 $p^a q^b$ 阶的群的可解性定理和 Frobenius 关于真正规子群存在的一个充分条件．1905 年，I. Schur 用后人称之为 Schur 引理为工具，把 Frobenius 和 Burnside 所建立起来的复杂理论做了巨大简化．他们三人使用的方法是矩阵表示和常指标．本世纪 20 年代 E. Noether 以有限维结合代数的结构理论为工具，用模论的观点统一处理了有限群的常表示论和有限维半单结合代数的表示论，从而使有限群的常表示论更为简洁、漂亮．本世纪的数学发展说明，有限群的表示论除用于研究有限群的结构以外，在众多的数学分支和其他自然科学分支都有重要应用．

本世纪初，略迟于 Frobenius，Burnside 和 Schur 关于有限群的复表示论的研究，L. E. Dickson 考察了有限群的模表示论．他证明，当素数 p 不整除有限群的阶时，用于研究有限群复表示的方法无需做重大修改，即可用来讨论有限群在特征 p 的域上的表示，并得到同样的结论．但是，当 p 整除有限群的阶时，情况截然不同．人们把这后一情形的研究称之为有限群模表示论的研究．1935 年 R. Brauer 开始研究有限群的模表示论．在此后近 60 年中，Brauer 和他的学生们以及追随者们在模表示论上取得了丰硕的成果，同时模表示论在有限单群的分类中也起着重要的作用．今天模表示论仍是在蓬勃发展中的一个重要而深刻的数学分支．

我国有限群表示论，特别是模表示论的研究是从段学复教授开始的，例如本世纪 40 年代初，他就在有限群的模表示论及其对有限单群和线性群的应用上做出了重要贡献．他除了从事研究之外，还曾在北京大学举办过多次群表示论讨论班，培养了许多学生．他的讨论班大都编印了讲义，只是这些讲义未能整理成书出版．本书作者丘维声教授在北京大学多次讲授群表示论这一课程，在此基础上编写了这本书，内容包括有限群的常表示理论和拓扑群表示的导引．我们欢迎这本书的出版，它将有助于群表示论在我国的传播．希望今后更能看到有限群模表示论的专著在我国出版．

万哲先

1994 年 10 月 27 日

前　言

作者在北京大学给数学系研究生多次讲授群表示论课程. 1990 年作者在讲稿的基础上编写了群表示论讲义,又使用该讲义讲了几遍. 从 1994 年开始,把讲义修改整理,写成了这本书.

本书内容丰富,着重阐述有限群的常表示理论,还介绍了紧致拓扑群的表示理论. 本书在内容体系的安排上开门见山,由易到难,循序渐进,条理清楚.

本书的第一章介绍群表示论的基本概念以及 Abel 群的表示. 这一章的内容除了特别指明了有限群外,其余对于有限群和无限群都适用.

第二章阐述有限群的常表示理论. 把研究有限群的表示问题归结为研究群代数上的模的问题,通过研究有限维半单代数的结构解决了有限群的常表示问题.

第三章阐述群的特征标理论. 群的特征标是研究群的表示的一个有力工具.

第四章利用模的张量积介绍了表示的张量积;绝对不可约表示;群的分裂域;群的直积的表示等内容. 这些又是从已知的表示构造新的表示的一些方法.

第五章讲诱导表示和诱导特征标. 这是研究群 G 的表示与子群的表示之间的关系,包括 Frobenius 互反律;Mackey 的子群定理以及诱导特征标不可约性的判定;Clifford 定理;Brauer 关于诱导特征标的定理;分裂域的进一步讨论等内容.

第六章介绍紧致群的线性表示,包括紧致群上的不变积分;表示的完全可约性;正交关系;关于完备性的 Peter-Weyl 定理等内容. 这一章讨论的群是无限群.

由于本书内容的上述安排，并且论证严谨、讲解详细、内容的内在联系阐述清楚，要研究的问题的来龙去脉都有明确的交代，因此听过作者讲课的几届研究生(包括高年级本科生)都反映群表示论好懂好学，教学效果是好的.

本书还特别注意介绍群表示论的应用，除了用群表示论证明 Burnside 关于可解群的判定定理以及 Frobenius 关于真正规子群的存在性定理(这些是用群表示论研究有限群的结构的最典型的两个例子)以外，还用群表示论证明 360 阶单群同构于交错群 A_6；还决定了 SU(2)和 SO(3)的全部不可约复表示，它们在物理中有重要应用.

本书各章有许多例题，并且几乎每一节后面都配有习题，较难的习题均有提示.

本书可作为数学系研究生或高年级大学生的教材，讲授一个学期，周学时 3，总学时 51. 在目录上加 * 号的内容不作为教学要求，供有兴趣的读者自学.

本书还可供学过线性代数和抽象代数的读者自学.

此外，作者还要特别提及：

著名代数学家段学复院士是我国最早从事有限群表示论研究的学者，他在有限群的模表示论上做了奠基性工作，在这一领域做出了重要贡献. 1994 年是段学复院士的八十岁生日，作者在 1994 年完成本书初稿，谨以此书庆贺他的八十华诞，衷心感谢他多年来对自己的指导.

作者衷心感谢著名代数学家万哲先院士为本书作序；衷心感谢群表示论专家石生明教授审阅本书的初稿并且提出了许多宝贵意见. 作者还要感谢朱烈教授对本书第五章第 15 节提出的建议和有益的讨论.

本书获得北京大学教材出版基金，特向北京大学教材建设委员会表示感谢. 本书还获得北京大学 1996 年度研究生课程建设经费的资助，特此向北京大学研究生院表示感谢.

本书的责任编辑刘燕副编审付出了辛勤的劳动，作者向她表示衷心感谢. 作者还要感谢北京大学出版社的邱淑清编审和刘勇副编审对本书的出版给予的大力支持.

作者热诚欢迎使用本书的教师和读者提出宝贵意见.

丘 维 声

1997 年 2 月于北京大学

目　　录

引　言

群是认识现实世界最深刻的规律性之一——对称性的有力武器. 譬如,一个平面图形 E 的对称性,可以用平面上保持图形 E 不变的正交变换(旋转、反射以及它们的合成)组成的集合对于映射的乘法形成的群来刻画,这个群称为图形 E 的对称群. 等边三角形比等腰三角形更对称,就是因为等边三角形的对称群的阶(即,元素的数目)比等腰三角形的对称群的阶大.

研究群的结构的一个重要方法是考虑群 G 在一个集合 Ω 上的作用,也就是通过群 G 到集合 Ω 上的全变换群 $S(\Omega)$(它由 Ω 到自身的所有双射组成)的同态来研究群 G 的结构. 这是因为同态的核是 G 的正规子群,同态的像是 $S(\Omega)$的子群,并且它与 G 对于同态核的商群同构;此外,Ω 内一点 x 的稳定子群(G 中保持 x 不动的元素组成的集合)是 G 的子群,等等. 有限群理论中十分重要的 Sylow 定理,就可以利用群 G 在适当的集合上的作用得到.

如果把集合 Ω 换成域 K 上的向量空间 V,去考虑群 G 在向量空间 V 上的作用,也就是考虑群 G 到向量空间 V 上所有可逆线性变换形成的群 $GL(V)$的同态,那么效力会更大. 这是因为这样做除了具有群在集合上的作用的各个优点以外,还具备新的优点:域上的向量空间有漂亮的结构,并且域 K 上 n 维向量空间 V 上的可逆线性变换群 $GL(V)$同构于域 K 上 n 级可逆矩阵形成的一般线性群 $GL_n(K)$,而对于矩阵的各种技巧,我们已非常熟悉.

群表示论就是研究任意给定的一个群在向量空间上作用的各种方式. 通过研究群 G 在各个向量空间上的作用来研究群 G 的结构,是一条富有成效的途径. 例如,Burnside 关于 p^aq^b 阶群可解的定理和 Frobenius 关于真正规子群存在的一个充分条件,早在本

世纪初就用群表示论证明了，然而前者迟至 1960 年左右才有纯粹群论的证法，后者则至今还没有其他证法．应当特别指出的是，群表示论在研究有限单群的分类问题中起了重要作用．到 80 年代初期，有限单群分类问题基本解决，现在正继续研究有限单群分类定理的证明的简化，对此群表示论仍将起作用．

群表示论还在数学的许多分支以及其他自然科学分支中有重要应用．譬如，人们早已知道，在结晶学、量子力学、量子化学等领域里，群表示论是一个强有力的工具．又如，在纯粹数学的分支中，抽象调和分析本质上是群表示论．再如，在最近几十年，计算机技术的发展日新月异，计算机在社会中迅速普及，由此引起离散数学的勃兴，作为离散数学的重要分支组合数学，在最近几年也越来越多地使用群表示论这一有力工具．还有，信息时代需要的编码和密码，也要用到群表示论．可以预料，群表示论的应用范围将越来越广泛．

有限群的表示论与向量空间的基域 K 有密切关系．如果域 K 的特征不能整除有限群 G 的阶，那么群 G 在域 K 上的向量空间上的作用比较容易研究，结果比较简洁，人们称之为有限群的常表示论．如果域 K 的特征 p 整除有限群 G 的阶，群 G 在域 K 上向量空间上的作用变得复杂得多，人们称之为有限群的模表示论．有限群的常表示论的研究始于 1896 年，由 Frobenius 开始研究．而有限群的模表示论则是于 1935 年由 R. Brauer 开始研究的．限于篇幅，本书主要阐述有限群的常表示理论．

对于无限群的表示论的研究，需要在无限群中加进拓扑结构．本书第六章将介绍一类无限群——紧致拓扑群的表示理论．

本书中凡是只对有限群适用的概念和结论都会加以指明，否则对有限群和无限群都适用．

第一章 群表示论的基本概念和 Abel 群的表示

§1 群的线性表示的定义和例

设 V 是域 K 上的向量空间，V 上所有可逆线性变换组成的乘法群记作 $\mathrm{GL}(V)$.

定义 1 设 G 是群，$V\neq\{0\}$ 是域 K 上的向量空间. G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个群同态 φ 称为 G 在域 K 上的一个**线性表示**(简称为 G 的一个 K-表示或者 G 的一个表示). V 称为**表示空间**(或 G **模**). 若 V 是有限维的，则 V 的维数 $\dim_K V$ 称为表示的**次数**(或**维数**)，记作 $\deg\varphi$；若 V 是无限维的，则称 φ 是 G 的无限维表示.

从定义 1 看出，群 G 的一个线性表示是由表示空间 V 和群同态 φ 组成的二元组 (φ,V)，它使得

$$\varphi(g)\in\mathrm{GL}(V),\quad \forall\, g\in G;$$
$$\varphi(gh)=\varphi(g)\varphi(h),\quad \forall\, g,h\in G;$$
$$\varphi(e)=1_V,$$

其中 e 是 G 的单位元，1_V 是 V 的恒等变换. 由此可见，群 G 的一个线性表示就是 G 用线性变换群 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群来实现. 这样做至少有三个好处：(1) $\mathrm{GL}(V)$ 的子群是具体的群，向量空间及其线性变换的许多性质可以用上；(2) 同态 φ 的核是 G 的正规子群，从而可利用同态的核研究 G 的结构；(3) 当 φ 是 1 次表示时，φ 是 G 上的函数(这一点在下面将会解释)，可以利用它来研究 G 的结构.

群 G 的表示 φ 称为**忠实的**，如果同态 φ 的核 $\mathrm{Ker}\varphi=\{e\}$；$\varphi$ 称为**平凡的**，如果 $\mathrm{Ker}\varphi=G$. G 的 1 次平凡表示称为 G 的**主表示**或**单**

位表示,记作 1_G.

域 K 上的所有 n 级可逆矩阵组成的乘法群称为**一般线性群**.记作 $\mathrm{GL}_n(K)$ 或者 $\mathrm{GL}(n,K)$.

定义 2 群 G 到 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的一个群同态 Φ 称为 G 在域 K 上的一个 n 次**矩阵表示**.

显然,若给了群 G 的一个 n 次线性表示 (φ,V),在 V 中取定一个基,对于 $g\in G$,把线性变换 $\varphi(g)$ 在这个基下的矩阵记作 $\Phi(g)$,则

$$\begin{aligned}\Phi:\ G &\to \mathrm{GL}_n(K),\\ g &\mapsto \Phi(g)\end{aligned}$$

是 G 的一个 n 次矩阵表示,称 Φ 是由 φ 提供的.

本书中用小写希腊字母 $\varphi,\psi,\cdots$ 作为线性表示的符号;用大写希腊字母 $\Phi,\Psi,\cdots$ 作为相应的矩阵表示的符号(对于给定的基).

定义 3 群 G 在域 K 上的两个线性表示 (φ,V) 和 (ψ,W) 称为是**等价的**(或**同构**),如果存在向量空间的一个同构 $\sigma:V\to W$ 使得

$$\psi(g)=\sigma\varphi(g)\sigma^{-1},\forall\ g\in G, \tag{1}$$

此时记作 $\varphi\approx\psi$.

定义 4 群 G 在域 K 上的两个矩阵表示 Φ 和 Ψ 称为是**等价的**(记作 $\Phi\approx\Psi$),如果它们有相同的次数并且存在域 K 上一个可逆矩阵 S 使得

$$\Psi(g)=S^{-1}\Phi(g)S,\quad \forall\ g\in G. \tag{2}$$

设 (φ,V) 是群 G 的 n 次 K-表示,它对于 V 中不同的基提供的矩阵表示必等价(因为 $\Phi_2(g)=S^{-1}\Phi_1(g)S,\forall\ g\in G$,这里 S 是第一个基到第二个基的过渡矩阵).反之,群 G 的等价的矩阵表示可看成是由 G 的同一个线性表示对不同基提供的.

不难证明:群 G 的两个有限维线性表示等价当且仅当它们提供的矩阵表示等价.

下面我们来看一些重要的线性表示.

1. 置换表示

设群 G 在集合 $\Omega=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上有一个**作用**,即,存在 $G\times\Omega$ 到 Ω 的一个映射:$(g,x_i)\mapsto gx_i$ 满足:

$$(gh)x_i=g(hx_i),\quad \forall\, g,h\in G,\forall\, x_i\in\Omega;$$

$$ex_i=x_i,\quad \forall\, x_i\in\Omega.$$

取一个域 K,在所有形式和

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,\quad a_i\in K(i=1,2,\cdots,n)$$

组成的集合 V 中规定

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i=\sum_{i=1}^n b_ix_i \Longleftrightarrow a_i=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i+\sum_{i=1}^n b_ix_i := \sum_{i=1}^n (a_i+b_i)x_i,$$

$$k\sum_{i=1}^n a_ix_i := \sum_{i=1}^n (ka_i)x_i,$$

则 V 成为域 K 上 n 维向量空间. 我们把 $0x_1+\cdots+0x_{i-1}+1x_i+0x_{i+1}+\cdots+0x_n$ 与 x_i 等同,则$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 V 的一个基. 对于 $g\in G$,规定 $\varphi(g)\left(\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i\right) := \sum\limits_{i=1}^n a_i(gx_i)$,显然 $\varphi(g)$是 V 的线性变换. 设 $i\neq j$,假如 $gx_i=gx_j$,则 $g^{-1}(gx_i)=g^{-1}(gx_j)$,从而$(g^{-1}g)x_i=(g^{-1}g)x_j$,即,$ex_i=ex_j$,于是 $x_i=x_j$,矛盾. 因此$\{gx_1,gx_2,\cdots,gx_n\}=\Omega$,从而$(gx_1,gx_2,\cdots,gx_n)$也是 V 的一个基,这表明 $\varphi(g)$是可逆的. 所以 φ 是 G 到 $\mathrm{GL}(V)$的映射. 显然 $\varphi(gh)=\varphi(g)\varphi(h)$,$\forall\, g,h\in G$. 因此 φ 是 G 在域 K 上的一个线性表示. 称这样得到的表示 φ 为 G 的**置换表示**. 对于这个基$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,φ 提供的矩阵表示 Φ 使得对于每个 $g\in G$ 都有 $\Phi(g)$是**置换矩阵**,即每行每列恰有一个元素是 1,其余元素全为零的矩阵.

2. 有限群的正则表示

设 G 是有限群,群 G 通过左平移作用于集合 G 上:$(g,h)\mapsto gh$. 由这个作用得到的 G 在域 K 上的置换表示称为 G 的**正则 K**