高等数学
习题课指导书

高等数学习题课指

唐钰其　编

重庆大学出版社

内容提要

本书根据高等数学课程的教学要求，以通行大纲为线索，编写了53学时的习题课教学内容。着重介绍了高等数学常用的和新颖的解题方法。全书按2[illegible]次习题课安排，每次课的内容有：目的要求，复习与提问，例题分析，课堂练习，课外作业；习题均附有提示及答案。每次课自成系统，课与课之间又互相联系，融成一体。选择例题既有广泛性又有型性。例题安排，前后呼应，多次见面，逐步深化。例题解法，侧重于思路分析与技巧介绍并能举一反三，一题多解部分习题的难度，略高于现行教学大纲的要求。

本书对从事高等数学教学的老师，以及高等院校，电大，职大学生，准备报考研究生的人员和广大自学青年等都有一定的参考价值和指导作用。

高等数学习题课指导

唐镒其　编

责任编辑　谢晋洋

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆大学出版社印刷厂印刷

开本：787×1092　1/16　印张：20.25　字数：505千

1988年8月第1版　　1988年8月第1次印刷

印数：1—1[illegible]000

标准书号：ISBN 7-5624-0045-8 / O·14　　定价：2.75元

前　言

高等数学习题课，目的在于培养学生的解题能力，是提高教学质量的一个至关重要的教学环节。编者在20多年的教学过程中，深感需要有一本上好高等数学习题课的指导书，作为教师掌握该课深广度的大体依据和选取内容的借鉴。为此，编者在同行们的鼓励下，根据长期积累的资料，特别是近几年教学改革中的正反两方面的经验，编写成本书。望本书能给高等数学教师在实施习题课教学时，有一定的参考价值；同时，能给各类学校学生在学习高等数学时，提供一定的指导；还能给准备报考研究生的广大考生，在复习高等数学过程中，得到一定的帮助。

本书根据高等数学通行的教学大纲要求，编写了28次（56学时）习题课的教学内容。每次课按照理论课与习题课结合、讲与练结合、课堂练习与课外练习结合的原则，编有：目的要求，复习与提问，例题分析，课堂练习，课外作业等五部分。本书的"复习与提问"提出了学生在学习过程中容易产生的疑难问题和模糊概念。"例题分析"列举了约350道典型例题。这些例题的选择，既有广泛性，便于在教学中选择，又具有典型性，便于举一反三。即注意理论性习题，又注意选择与实际结合的习题，以利于提高解决实际问题的能力。在例题安排上，既注意由浅入深，循序渐进，又有意识地让部分典型例题在前后课次中多次出现，反复地与学生见面，起到不断巩固，逐步深化的作用。在例题分析中，着重分析题意，指出解题思路和解题步骤，具有一定的启发性；大部分例题还根据实际可能作了多种解法，体现了解题的灵活性。"课堂练习"与"课外作业"部分，选取了约1000道习题，并且都附有提示与答案。课堂练习题的选取，主要着眼于培养学生基本的解题技能，和当堂检验学生的接受程度。课外作业题的选取，主要着眼于培养学生综合运用所学知识，独立解题的能力。

本书在编写过程中，得到我院各级领导的支持，同时，得到了重庆大学赵中时副教授、重庆建工学院柯红路副教授、重庆交通学院谢和熙副教授以及我院江兆嘉副教授的鼓励与帮助，特别是得到国家教委工科院校高等数学课程指导委员会委员、重庆大学应用数学系谢树艺先生的热情支持，并在百忙中对全书进行了审阅，提出了中肯的意见。在此，一并致以深切的谢意。

由于编者水平有限，难免有疏漏、错误之处，恳切专家、同行和广大读者批评

唐钰其
于中国人民解放军后勤
1988．5．

目　录

第1次　函数的概念及性质

一、目的要求

1．理解函数的概念，并能确定函数的定义域。

2．会判别函数的某些特性。

二、复习与提问

1．定义域：由于函数的表达形式不同，确定其定义域一般有两种类型：函数式给出的定义域；实际问题所确定的定义域。确定用函数式 $y=f(x)$ 给定初等函数的定义域时应熟悉基本初等函数的定义域，并注意运用以下结论：

（1）开偶数方根的定义域是使根号下的式子为非负的那些 x 的值；

（2）分式的定义域是使分母不为零的 x 的值；

（3）超越函数 $\log_a x$ 中 $x>0$，$\arcsin x$、$\arccos x$ 中 $|x|\leqslant 1$，$\operatorname{tg}x$ 中 $x\neq\frac{\pi}{2}+K\pi$，$\operatorname{ctg}x$ 中 $x\neq K\pi$（$K=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$），即仅使它们有定义的 x 的值。

2．函数 $f(x)$ 与函数值 $f(a)$ 的表示与区别　$f(x)$ 表示的是一个变量，常用 y 记之，即 $y=f(x)$。$f(a)$ 表示函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的值，是一个数，常以 $f(x)|_{x=a}$ 记之。

3．判断下列各对函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否相同？若相同，在哪一个区间内相同？

（1）$f(x)=\frac{x}{x}$，$\varphi(x)=1$；

（2）$f(x)=\lg x^2$，$\varphi(x)=2\lg x$；

（3）$f(x)=1$，$\varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$；

（4）$f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$，$\varphi(x)=1-x$；

（5）$f(x)=x$，$\varphi(x)=\sin(\arcsin x)$；

（6）$f(x)=x$，$\varphi(x)=\arcsin(\sin x)$；

（7）$f(x)=\lg F(x)+\lg G(x)$，$\varphi(x)=\lg[F(x)\cdot G(x)]$。

4．下列表达式是函数吗？是几个函数？是什么函数？

$$y=\begin{cases}2, & t\leqslant 0;\\ t^2, & t>0。\end{cases}$$

5．叙述奇、偶函数的定义，并指出各自图形的特点。

6．叙述周期函数的定义，并指出图形的特点。

三、例题分析

1．确定下列函数的定义域

（1）$y=\sqrt{\sin x}+\lg(16-x^2)$

解 当$\sqrt{\sin x}$与$\lg(16-x^2)$同时有定义时，函数y才有定义。因此需要同时满足下列不等式组：

$$\begin{cases}\sin x\geqslant 0 & (1)\\ 16-x^2>0 & (2)\end{cases}$$

解不等式(1)得　$2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$

　$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$

解不等式(2)得　$-4<x<4$

这两组解的公共部分就是上述不等式组的解。利用图1-1得函数y的定义域为：

$-4<x\leqslant-\pi$及$0\leqslant x\leqslant\pi$。

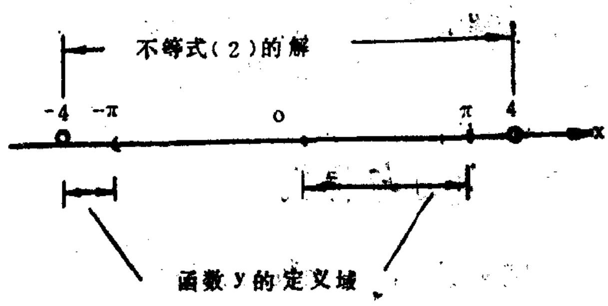

图1-1

(2) 设$y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，求$f(x+a)+f(x-a)$　$(a>0)$的定义域。

解 求$f(x+a)$与$f(x-a)$定义域的公共部分即是所求函数$f(x+a)+f(x-a)$的定义域。由于其对应规律与已知函数$y=f(x)$一样，仅变量作了一个平移，因此把$x+a$或$x-a$作为一个新变量，其取值范围仍是$[0,\ 1]$。所以需要求解同时满足下列不等式组的解。

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1 & (1)\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1 & (2)\end{cases}$$

解(1)得$-a\leqslant x\leqslant 1-a$，解(2)得$a\leqslant x\leqslant 1+a$。

这两组解的公共部分就是不等式组的解。$\because a>0$，因此取得x的值为$a\leqslant x\leqslant 1-a$。

下面讨论a的允许值：当$a\leqslant 1-a$时，即$a\leqslant\frac{1}{2}$，函数$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$[a,\ 1-a]$；

当$a>\frac{1}{2}$时，不等式$a\leqslant x\leqslant 1-a$不成立，函数$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为空集，即函数在$(-\infty,\ +\infty)$内处处无定义。

2. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 当|x|\leqslant 1;\\ 0, & 当|x|>1;\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}2-x^2, & 当|x|\leqslant 1;\\ 2\quad, & 当|x|>1。\end{cases}$$

求$f[g(x)]$及$g[f(x)]$。

解 1° 当$|x|<1$时，$f[g(x)]=f(2-x^2)=0$；

$(\because g(x)=2-x^2$，此处$2-x^2>1)$。

当$|x|>1$时，$f[g(x)]=f(2)=0$；当$|x|=1$时，$f[g(\pm1)]=f(1)=1$。

$$\therefore\quad f[g(x)]=\begin{cases}0, & 当x\neq\pm1时；\\ 1, & 当x=\pm1时。\end{cases}$$

2° 当$|x|\leqslant 1$时，$g[f(x)]=g(1)=2-1^2=1$，

当$|x|>1$时，$g[f(x)]=g(0)=2$。

$$\therefore\quad g[f(x)]=\begin{cases}1, & 当|x|\leqslant 1时；\\ 2, & 当|x|>1时。\end{cases}$$

3． 求函数

$$y=\begin{cases}x^2-1 & 当0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2 & 当-1\leqslant x<0\end{cases}$$

的反函数。

解 函数y是由二个式子表达的一个函数，因此它的反函数应有相应的二个式子表达。

∵ 当$0\leqslant x\leqslant 1$时，有$-1\leqslant y=x^2-1\leqslant 0$，解得$x=\sqrt{1+y}$；

当$-1\leqslant x<0$时，有$0<y=x^2\leqslant 1$，解得$x=-\sqrt{y}$

∴ 反函数为，$x=\varphi(y)=\begin{cases}\sqrt{1+y}, & 当-1\leqslant y\leqslant 0;\\ -\sqrt{y}, & 当0<y\leqslant 1。\end{cases}$

改写为$y=\varphi(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x}, & 当-1\leqslant x\leqslant 0;\\ -\sqrt{x}, & 当0<x\leqslant 1。\end{cases}$

4． 设函数$y=f(x)$是以$T>0$为周期的函数。证明$f(ax)$ $(a>0)$是以$\frac{T}{a}$为周期。

证 按周期函数定义：$f(x+T)=f(x)$。

因此只须证明$f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax)$就行， 而 $f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)$

∵ $f(x+T)=f(x)$， ∴ $f(ax+T)=f(ax)$，

即 $f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax)$； 故 $f(ax)$是以$\frac{T}{a}$为周期的周期函数。

5． 证明$f(x)=\sin x^2$不是周期函数。

分析 证明方法大致有以下两种：

1° 反证法：预先假定该函数是周期函数，利用一些熟知的运算法则推得矛盾结果，从而否定预先的假定。

2° 用定义去找周期T，经过运算最后找出的T与变量x有关，与定义矛盾，因而肯定了该函数为非周期函数。

证法1 假定$f(x)=\sin x^2$是周期函数，则存在与x无关的正数T，使得$\sin(x+T)^2=\sin x^2$，则当$x=0$时，有$\sin T^2=0$，故$T^2=n\pi$，即$T=\sqrt{n\pi}$（n为正整数）

令 $x=\sqrt{2}T$，得$\sin[(\sqrt{2}+1)^2n\pi]=0$

所以 $(\sqrt{2}+1)^2n\pi=K\pi$ （K为正整数）

则 $(\sqrt{2}+1)^2=\frac{K}{n}$ （n、K为正整数）

因为 $\frac{K}{n}$是有理数，而$(\sqrt{2}+1)^2$不是有理数。矛盾。

所以$f(x)=\sin x^2$不是周期函数。

采用反证法的另一思路方法：假定$f(x)=\sin x^2$是周期函数，那么函数的零值点应周期分布。如果该函数的零值点的分布不是周期性的，那么该函数就不是周期函数。

函数$f(x)=\sin x^2$在$x\geqslant 0$处的零值点为$x_n=\sqrt{n\pi}$（$n=0, 1, 2, \cdots$），则

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}$$

$$=\frac{(\sqrt{(n-1)\pi}-\sqrt{n\pi})(\sqrt{(n-1)\pi}+\sqrt{n\pi})}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}}=\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}}$$

当 n 增大时，$x_{n+1}-x_n$ 减小，两个相邻的零值点之间的间隔，随着 n 的增大而减小。故零值点不呈周期分布。从而证明函数 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数。

证法 2 如果存在一个与 x 无关的正数 T，使得 $\sin(x+T)^2=\sin x^2$，则 $f(x)=\sin x^2$ 是以 T 为周期的周期函数，否则该函数不是周期函数。

根据定义： $\sin(x+T)^2-\sin x^2=0$ （1）

把方程（1）中 T 看作待求量来求方程（1）的非零解。

$$2\cos\frac{1}{2}[(x+T)^2+x^2]\cdot\sin\frac{1}{2}[(2xT+T^2)]=0$$

∴ $\cos\frac{1}{2}(2x^2+2xT+T^2)=0$ （2）

或 $\sin\frac{1}{2}(2xT+T^2)=0$ （3）

由（2）得 $T^2+2xT+2x^2=\pi$ （4）

由（3）得 $T^2+2xT=0$ （5）

解方程（4）得 $T=T_1(x)$，解方程（5）得 $T=T_2(x)$

∴ 函数 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数。

6．一球的半径为 r，作外切于球的圆锥，试将其体积表示为高 h 的函数，并指出其定义域（图 1－2）。

解 建立函数关系式最重要的问题是寻找变量之间的对应关系，即 f。但没有一个统一的规律可循，必须对具体问题进行具体分析，从分析问题中找出各个量之间的关系。可利用几何、代数、三角、物理或其它知识来确定量与量之间的对应关系，找出对应规律 f。

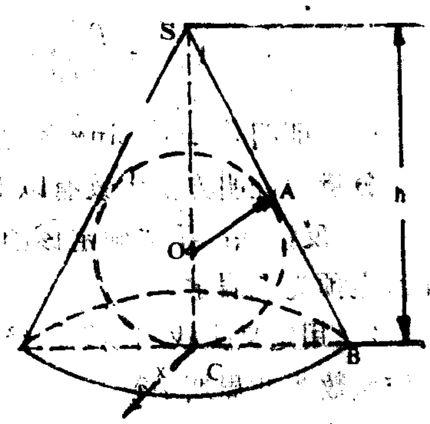

图 1－2

已知条件：圆 O 内切于圆锥，切点为 A、D、C，$AO=r$，圆锥体积 $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$，R 为圆锥底面圆半径，h 为圆锥高。

若 R 能由已知量 r 或 h 表示，则问题解决。为此通过以下几何知识寻找 R 与 r、h 的关系。

∵ A、D、C 是切点，则 $OA\perp SB$， $SC\perp BC$。

∴ 直角三角形 SAO 与 SCB 相似。

设 $SO=h-r, SB=\sqrt{h^2+R^2}$，$AO=r$，$BC=R$

因 $\frac{SO}{SB}=\frac{AO}{BC}$ 代入得 $\frac{h-r}{\sqrt{h^2+R^2}}=\frac{r}{R}$

解得： $\frac{h-r}{r}=\frac{\sqrt{h^2+R^2}}{R}$， $\frac{h^2-2hr+r^2}{r^2}=\frac{h^2+R^2}{R^2}$

$$R^2=\frac{r^2\cdot h^2}{h^2-2hr}=\frac{r^2\cdot h^2}{(h-r)^2-r^2}$$

得 $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{\pi r^2 h^2}{3[(h-r)^2-r^2]}$ $(2r<h<+\infty)$。

四、课堂练习

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{\sqrt{3-x}}+\arccos\frac{x-2}{4}$，并求$y|_{x=0}$的值。 (2) $y=\log_3\log_4\log_5 x$

2. (1)若 $f(x)=\frac{1}{x}$，求$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

(2) 若$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求$f(x)$

3. 判别下列函数的奇、偶性：

(1) $y=|x|$， (2) $y=\lg\frac{1+x}{1-x}$， (3) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$。

4. 判别下列函数的周期性，并求周期。

(1) $f(x)=a\sin 2\lambda x+b\sin 3\lambda x$ （λ为非零常数）。

(2) 证明两个偶函数或两个奇函数的乘积是偶函数；偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

5. 求已知函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\quad(ad-bc\neq 0)$$

的反函数，又问当a、b、c、d满足什么条件时，这反函数与直接函数相同？

五、课外作业

1. 已知 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求$f[f(x)]$；$f\{f[f(x)]\}$；$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$。

2. 若$f(x)=\begin{cases}1 & 当|x|<1\\ 0 & 当|x|=1\\ -1 & 当|x|>1\end{cases}$ $g(x)=e^x$，

求$f[g(x)]$，$g[f(x)]$。并分别作出$f[g(x)]$与$g[f(x)]$的图形。

3. 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$，则(1) $f(4x^2)$；(2) $f(\sin x)$；(3) $f(\operatorname{tg}x)$的定义域各是什么？

4. 判断下列函数的单调性：

(1) $f(x)=\cos x$，在$(0,\pi)$上； (2) $f(x)=\frac{x}{1-x}$

5. 下列函数哪些是周期函数？对于周期函数指出周期。

(1) $y=1+\sin\pi x$； (2) $y=\sin^2 x$； (3) $y=x\cdot\cos x$。

6. 求下列函数的反函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & -2<x<1;\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2;\\ 2^x & 2<x\leqslant 4。\end{cases}$$

7. 建立函数关系式：

（1）火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过50公斤时，按基本运费计算，如重庆到某地每公斤收0.15元。当超过50公斤时，超重部分按每公斤0.25元收费。试求运费 y（元）与重量 x（公斤）之间的函数关系式。并画出函数的图形。

（2）以 A 厘米³/秒的速度往一圆锥形容器内倒水，容器的底半径为 R，高为 h。试把容器中水的容积分别表示成时间 t 与水面高度 y 的函数（图 1－3）。并说明定义域。

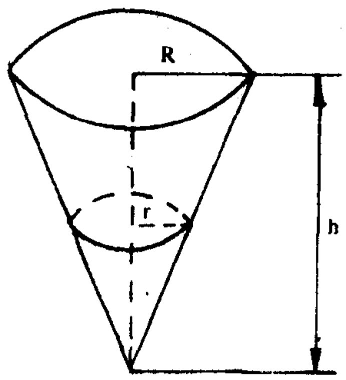

图 1－3

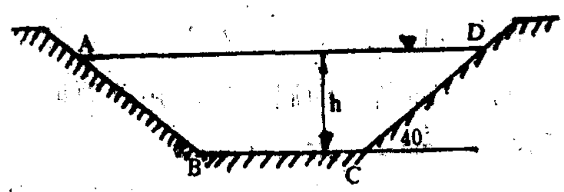

图 1－4

（3）已知水渠的横断面为等腰梯形。斜角40°（图 1－4）。当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 L（$L=AB+BC+CD$）与水深 h 之间的函数关系式，并说明定义域。

提示与答案

课堂练习

1. （1）$-2\leqslant x<3$，$y|_{x=0}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2\pi}{3}$。注意 $0\leqslant \arccos x\leqslant\pi$。

（2）$(5, +\infty)$。

2. （1）$\dfrac{-1}{x(x+\Delta x)}$；　　（2）$f(x)=x^2-2$。

3. （1）偶函数；　　（2）奇函数；　　（3）奇函数。

4. （1）$T=\dfrac{6\pi}{|\lambda|}$。　（2）提示：用定义验证。

5. $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$，当 $a+d=0$ 或 $b=c=0$，$a=d\neq 0$ 时反函数与直接函数相同。

课外作业

1. $f[f(x)]=1-\dfrac{1}{x}$；$f\{f[f(x)]\}=x$；$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=\dfrac{1}{x}$.

2. $f[g(x)]=\begin{cases} 1, & \text{当 } x<0; \\ 0, & \text{当 } x=0; \\ -1, & \text{当 } x>0。\end{cases}$ （见图 1－5）

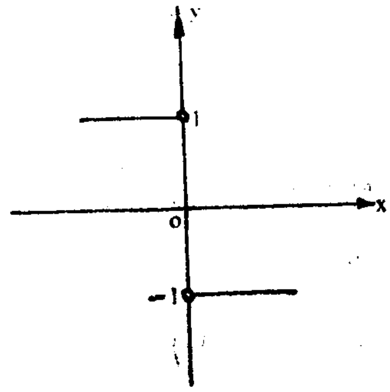

图 1－5

$g[f(x)]=\begin{cases} e, & \text{当 } |x|<1; \\ 1, & \text{当 } |x|=1; \\ e^{-1}, & \text{当 } |x|>1。\end{cases}$

3. （1） $0\leqslant 4x^2\leqslant 1$，$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$ $f(4x^2)$的定义域 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$。

（2） $f(\sin x)$ 的定义域 $2K\pi\leqslant x\leqslant(2K+1)\pi$ （$K=0$，±1，±2，…）

（3） $f(\mathrm{tg}x)$的定义域$K\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+K\pi$ （$K=0$，±1，±2，…）

4. （1） 在$[0, \pi]$上单调减少；

（2） 在$(-\infty, -1)$，$(-1, +1)$，$(1, +\infty)$内单词增加。

5. （1） 2； （2） π； （3） 非周期函数。

6. 反函数

$$y=\varphi(x)=\begin{cases} 2x, & \text{当 } -1<x<\frac{1}{2}; \\ \sqrt{x}, & \text{当 } 1\leqslant x\leqslant 4; \\ \log_2 x, & \text{当 } 4<x\leqslant 16。\end{cases}$$

7. （1） $y=\begin{cases} 0.15x, & \text{当 } x\leqslant 50; \\ 7.5+0.25(x-50), & \text{当 } x>50。\end{cases}$

（2） $V=At$； $V=\frac{\pi R^2 y^3}{3h^2}$， $0\leqslant y\leqslant h$

（3） $L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h$， $0<h<\sqrt{S_0\cdot \mathrm{tg}40^\circ}$。

第 2 次　极限的概念及求极限

一、目的要求

1. 理解极限概念及“$\varepsilon-N$”；“$\varepsilon-\delta$”定义的叙述与意义。
2. 理解无穷小，无穷大定义及它们之间的关系，无穷小与函数极限之间的关系。
3. 熟悉两个重要极限及掌握求极限的一般方法。

二、复习与提问

1. 根据函数极限的定义，填写下表：

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	任给$\varepsilon>0$， 总存在$\delta>0$， 使当$0<\|x-x_0\|<\delta$时， 即有$\|f(x)-A\|<\varepsilon$。			
$x\to x_0^{+0}$				
$x\to x_0^{-0}$				
$x\to\infty$		任给$M>0$， 总存在$X>0$， 使当$\|X\|>X$时， 即有$\|f(x)\|>M$		
$x\to+\infty$				
$x\to-\infty$				

2. 在函数极限定义中，回答下列问题：

（1）第一个不等式$0<|x-x_0|<\delta$中，即$x\neq x_0$说明什么？

（2） 定义中$x\to x_0$的方式有什么限制？如果有限制就成为什么形式的极限？有与无限制的极限是否是一回事，为什么？

3. 无穷小与无穷大的关系怎样？
4. 有界量与无穷小量的乘积是什么量？
5. 有界量与无穷大量的乘积是什么量？研究当$x\to\infty$时，$x\cdot\sin x$的变化情况。
6. 有人说函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$是无穷小量，也有人说它是无穷大量，这些说法对吗？
7. 指出下列运算哪些步骤有错并改正。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0+0+\cdots=0$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\cdot1\cdots=1$。

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}x}{x}\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x}{\sin x}=1$。

(4) $\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}=0$。

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$。(6) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to3}(x-3)\cdot\lim\limits_{x\to3}(x+3)}{\lim\limits_{x\to3}(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6$。

三、例题分析

1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$。

证 对于任给 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 总成立，

即 $\left|\frac{(\sqrt{n^2+a^2})^2-n^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}\right|<\varepsilon$，则 $\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n(n+n)}<\varepsilon$

$\therefore$ 只要 $n>\frac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}$ 因此，按定义对于任给 $\varepsilon>0$，总存在 $N=\left[\frac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$， 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$。

2. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0$　　$(a>1,\ n>0)$

证 对于任给 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{x^n}{a^x}-0\right|<\varepsilon$ 总成立。

设 $b=a^{\frac{1}{n}}$，则 $b^n=a$。因 $a>1$，故 $b=1+h>1$。因此本题改为证：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{b^x}\right)^n=0.$$

设 $m\leqslant x<m+1$　（m 为正整数），则

$$\left(\frac{x}{b^x}\right)^n\leqslant\left[\frac{m+1}{(1+h)^m}\right]^n=\left[\frac{m+1}{1+mh+\frac{m(m-1)}{2!}h^2+\cdots+h^n}\right]^n$$

$$\leqslant\left[\frac{2(m+1)}{m(m-1)h^2}\right]\leqslant\left(\frac{4}{mh^2}\right)^n\qquad \text{当 } m\geqslant3 \text{ 时成立。}$$

由此，对于任给 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{x^n}{a^x}\right|<\varepsilon$ 总成立，只要使 $\left(\frac{4}{mh^2}\right)^n<\varepsilon$ 成立即可。

当$m>\frac{4}{h^2\varepsilon^{\frac{1}{n}}}$时，便可使$\left(\frac{4}{mh^2}\right)^n<\varepsilon$成立。从而可知：

当 $x>\frac{4}{h^2\varepsilon^{\frac{1}{n}}}$ 时，有 $0<\frac{x^n}{a^x}=\left(\frac{x}{b^x}\right)^n<\varepsilon$ 总成立。即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0$

3. 证明：若数列$\{x_n\}$收敛，且$x_n>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

证 设$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a>0$，对于任给$\varepsilon>0$，并满足$\varepsilon<a$，则有正整数$N$存在，当$n>N$时，有$0<a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$。

即 $$a-\varepsilon<x_{N+1}<a+\varepsilon,\quad a-\varepsilon<x_{N+2}<a+\varepsilon,\quad\cdots,\quad a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon.$$

将此各边相乘，并乘以$x_1\cdot x_2\cdots x_N$ 得：

$$x_1\cdot x_2\cdots x_N(a-\varepsilon)^{n-N}<x_1\cdot x_2\cdots x_N\cdot x_{N+1}\cdots x_n<x_1\cdot x_2\cdots x_N\cdot(a+\varepsilon)^{n-N}$$

即 $$\left[\frac{x_1\cdot x_2\cdots x_N}{(a-\varepsilon)^N}\right]^{\frac{1}{n}}\cdot(a-\varepsilon)<\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}<\left[\frac{x_1\cdot x_2\cdots x_N}{(a+\varepsilon)^N}\right]^{\frac{1}{n}}(a+\varepsilon)$$

取定ε及N，让$n\to\infty$，得$a-\varepsilon\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\leqslant a+\varepsilon$

由于ε是任给的，故有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=a$。

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$， 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 。

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，对于任给$\varepsilon>0$，有正整数$N$存在，当$n>N$时，$0<x_n<\varepsilon$成立，如上同样讨论，可得： $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=0$， 因此$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

上式亦称为几何平均值极限公式.

4. 证明：当$x\to\infty$时，函数$f(x)=x\cdot\sin x$是无界函数，而不是无穷大量。

证 当$x\to\infty$时，函数$f(x)$无界，指的是：不存在正数M，当$|x|$充分大时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)|\leqslant M$。

取数列$x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 。 得$f(x_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，

可看出：不管给什么样的正数M，当充n分大时，$f(x_n)$总会大于M。

因此，不存在正数M，总使$|f(x)|\leqslant M$，所以$f(x)=x\cdot\sin x$是无界函数 。但如果取另一数列$x_n=2n\pi$时，$f(x_n)=0$，这就不管x取多大，(当$n\to\infty$时，$x_n\to+\infty$)总有使函数$f(x)=x\cdot\sin x$等于零的值。因此说当$x\to+\infty$时，函数$f(x)=x\cdot\sin x$是无界函数而不是无穷大量 。又因为$f(x)=x\cdot\sin x$是偶函数，所以当$x\to\infty$时，$f(x)=x\cdot\sin x$是无界函数，而不是无穷大量。

5. 判别函数$y=e^{\frac{1}{x}}$ 当$x\to0$时的极限存在性？

解 分析：当$x\to0$时，是以任何方式趋于零的，所以应考虑$x\to0^{-0}$，$x\to0^{+0}$两种情况，然后才能作出判断结论。

解 $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$ $\quad\therefore\quad y=e^{\frac{1}{x}}$ 当$x\to 0$时的极限不存在。

6. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

解 分析：由于极限过程是$x\to+\infty$（相当于$n\to\infty$）往往要用到 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{K}{x}=0$ 这个结论。

函数是根式的形式，可以看作：$\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}}{1}$

观察分子的结构形式，容易联系到配上它的共轭因子，达到去根号的目的。因此，

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x})-(x+\sqrt{x})}{\sqrt{x-\sqrt{x}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{x}}}+\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)}=\frac{-2}{1+1}=-1.$$

7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解 分析：由于极限过程是$x\to 0$，分式含三角函数，且呈$\dfrac{0}{0}$型，因此就联想到应用 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 这个公式，利用三角恒等变换逐步化成含有$\dfrac{\sin x}{x}$这样的因子。

解法 1
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

解法 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

利用当$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sin^2 x\sim x^2$的替代。

解法 3 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

如果如下替代，就会产生错误$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0$

∵ 当$x\to 0$时，$\operatorname{tg}x\to x$，$\sin x\to x$。

为什么同样是进行无穷小量替代求极限会得到错误的答案呢？

原因是当$x\to 0$时，分母$\sin^3 x$等价于x^3，而分子等价于$\dfrac{1}{2}x^3$，

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$

即　$\mathrm{tg}x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$　　　故　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}$

因此，如果要用等阶无穷小量替代求极限，需正确地确定出分子，分母的无穷小的阶后再进行替代。

8．求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{1-\cos x}$

解　观察函数似乎用三角恒等变换看不出什么结果，如果对三个因子的乘积进行积化和差可能也很繁琐。在这种情况下，可以用添减一个因子再进行恒等运算。

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{1-\cos x}+\frac{\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{1-\cos x}\right]$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2}+\frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{\frac{1}{2}x^2}\right)=14$$

9．求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{2x}$

解　分析：极限过程是 $x\to\infty$，函数呈"1^∞"型，因此联想到应用 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 这个公式。利用代数变换把函数 $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{2x}$ 化成含有 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 这种形式。

解法 1　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^{2x}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot 2a}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}(-2a)}}=\frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{2a}}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right]^{-2a}}=e^{4a}.$$

解法 2　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot 4a+2a}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{4a}\times\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{2a}=e^{4a}\cdot 1=e^{4a}.$$

10．求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$