



T ANXINGSUXING  
YOUXIANYUAN

# 弹性·塑性·有限元

湖南科学技术出版社

# 弹性·塑性·有限元

主编 欧阳邕 马文华

编者 欧阳邕 马文华

杜逸汉 吴新炳 冯景艳



## **弹性·塑性·有限元**

主编：欧阳颀 马文华

编者：欧阳颀 马文华

杜逸汉 吴新炳 冯景艳

责任编辑：何信媛

\*

湖南科学技术出版社出版

(长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行

湖南省新华印刷一厂印封面 湖南省新华印刷二厂印刷

\*

1983年6月第1版第1次印刷

开本：850×1168毫米 1/32 印张：23.75 插页：5 字数：627,000

印数：1—3,400

统一书号：15204·103 定价：4.00元

## FOREWORD

I am pleased to see this compilation of important work by my friend, Prof. C. Ouzong, who completed portions of this volume while he was a visitor at TICOM, our Institute at the University of Texas. The choice and organization of topics reflects what I believe to be a positive trend in modern mechanics and in mechanics education: the coordination of basic solid mechanics theories with modern computational methods to produce powerful tools for the quantitative analysis of important engineering problems. This combined field of computational mechanics is destined to grow in importance even more in the future. I sincerely hope this volume contributes to the healthy growth of this subject in the People's Republic of China.

J. Eringen  
July 25, 1982

# 目 录

|                    |                        |
|--------------------|------------------------|
| 序                  | ( 1 )                  |
| 前言                 | ( 2 )                  |
| 第一章 弹性力学的基本方程      | ( 4 )                  |
| § 1 应力分量           | ( 4 )                  |
| 1.1 一点的应力状态        | 1.3 最大剪应力              |
| 1.2 主应力和主方向        | 1.4 正应力和剪应力的几何表示 (莫尔圆) |
| § 2 应变分量和旋转分量      | ( 17 )                 |
| 2.1 物体内的变形规律       | 2.3 体积应变               |
| 2.2 一点附近的变形状态      | 2.4 协调方程 (变形一致方程)      |
| § 3 应力-应变方程 (本构方程) | ( 33 )                 |
| 3.1 基本假设           | 3.2 应力-应变方程 (又称广义虎克定律) |
| § 4 平衡方程和边界条件      | ( 40 )                 |
| 4.1 平衡方程的建立        | 4.2 边界条件               |
| § 5 弹性理论问题的建立和讨论   | ( 46 )                 |
| 5.1 基本方程           | 5.3 应用举例               |
| 5.2 弹性方程的基本解法      |                        |
| § 6 圣维南原理          | ( 63 )                 |
| 第二章 能量原理和变分法       | ( 66 )                 |
| § 1 应变能及其变分        | ( 66 )                 |
| § 2 虚位移原理          | ( 73 )                 |

|                               |                    |
|-------------------------------|--------------------|
| 2.1 虚位移                       | 2.3 弹性体的虚位移原理      |
| 2.2 质点系的虚位移原理                 |                    |
| § 3 最小位能原理.....               | (79)               |
| 3.1 变分法                       | 3.3 应用——李滋法 (Ritz) |
| 3.2 最小位能原理                    |                    |
| § 4 虚力原理和余能原理.....            | (88)               |
| 4.1 虚力原理                      | 4.3 应用             |
| 4.2 总余能的极值原理                  |                    |
| § 5 卡氏 (Castigliane) 定理.....  | (100)              |
| 5.1 卡氏定理 (第一部分)               | 5.2 卡氏定理 (第二部分)    |
| § 6 单位位移定理和单位载荷定理.....        | (102)              |
| 6.1 单位位移定理                    | 6.2 单位载荷定理         |
| § 7 互换定理.....                 | (105)              |
| § 8 赖斯纳 (Reissner) 变分原理.....  | (108)              |
| § 9 各向异性材料的应力-应变关系.....       | (113)              |
| <b>第三章 杆、梁、管问题的有限元法.....</b>  | <b>(118)</b>       |
| § 1 杆的刚度矩阵.....               | (118)              |
| § 2 梁的刚度矩阵.....               | (129)              |
| § 3 弹性地基梁的刚度矩阵.....           | (141)              |
| § 4 管道刚度矩阵.....               | (148)              |
| 4.1 管元素的坐标选定                  | 4.3 刚度矩阵的一般公式      |
| 4.2 任意轴线的管元素内力矩阵              | 4.4 直、圆管的有关公式      |
| § 5 元素的固端反力.....              | (157)              |
| <b>第四章 求解平面弹性问题的有限元法.....</b> | <b>(169)</b>       |
| § 1 平面应力和平面应变.....            | (169)              |
| 1.1 平面应力                      | 1.2 平面应变           |
| § 2 平面问题的矩阵位移法.....           | (173)              |
| 2.1 元素的划分                     | 2.4 结构刚度矩阵         |
| 2.2 位移函数的选取                   | 2.5 载荷项的形成         |
| 2.3 元素刚度矩阵                    | 2.6 边界条件和结构        |

|                         |                                          |
|-------------------------|------------------------------------------|
| 对称性的利用                  | 2.7 应力的计算                                |
|                         | 2.8 收敛性的讨论                               |
| § 3 平面热应力分析.....        | (194)                                    |
| 3.1 热应力                 | 3.2 温度场的确定                               |
| § 4 轴对移问题的有限元法 .....    | (201)                                    |
| § 5 平面等参数元素.....        | (206)                                    |
| 5.1 位移插值函数              | 5.4 应力计算                                 |
| 5.2 元素刚度矩阵              | 5.5 计算实例                                 |
| 5.3 载荷处理                | 5.6 平面四节点非协调元                            |
| 第五章 三维应力分析.....         | (221)                                    |
| § 1 四面体元素.....          | (221)                                    |
| 1.1 概述                  | 1.4 应力矩阵和刚度矩阵                            |
| 1.2 四面体元素的位移函数          | 1.5 初应变及载荷处理                             |
| 1.3 四面体元素的应变状态及[B]矩阵的导出 | 1.6 计算实例                                 |
| § 2 三维等参数元素.....        | (236)                                    |
| 2.1 三维等参数元素的形状分析        | 2.4 载荷处理                                 |
| 2.2 20节点六面体元素的位移函数形成    | 2.5 数值积分                                 |
| 2.3 20节点六面体元素的应力矩阵和刚度矩阵 | 2.6 计算实例                                 |
| § 3 8~21节点的可变节点元素.....  | (252)                                    |
| 3.1 插入函数和坐标变换           | 3.4 正交各向异性材料的物理矩阵[D]和热胀系数矩阵 $\{\alpha\}$ |
| 3.2 [K]矩阵的计算公式          | 3.5 外载荷形式                                |
| 3.3 形函数 $N_i$ 的确定       | 3.6 应用举例                                 |

## 第六章 薄板弯曲问题.....(265)

### § 1 薄板弯曲理论.....(266)

- |                                       |                    |
|---------------------------------------|--------------------|
| 1.1 薄板弯曲的应变-位移,<br>应力-位移,内力-位移关<br>系式 | 1.3 薄板弯曲的应变<br>能   |
| 1.2 薄板弯曲的小挠度微分<br>方程                  | 1.4 薄板问题的边界<br>条件  |
|                                       | 1.5 正交各向异性板<br>的弯曲 |

### § 2 矩形薄板弯曲问题.....(279)

- |                                       |                      |
|---------------------------------------|----------------------|
| 2.1 四边简支矩形板的双重<br>三角级数解               | 2.3 四边固支矩形板<br>的能量解法 |
| 2.2 两对边简支另两对边任<br>意支承的矩形板的单重<br>三角级数解 |                      |

### § 3 圆形薄板的弯曲.....(289)

- |                      |              |
|----------------------|--------------|
| 3.1 圆形薄板弯曲的基本方<br>程式 | 3.2 圆板的轴对称弯曲 |
|----------------------|--------------|

### § 4 薄板弯曲的有限元法 (I)——ACM (Adini, Clough, Melosh) 矩形板元素.....(295)

- |               |              |
|---------------|--------------|
| 4.1 位移函数      | 4.3 载荷列阵     |
| 4.2 刚度矩阵和内力矩阵 | 4.4 薄板弯曲的热应力 |

### § 5 薄板弯曲的有限元法 (II)——三角形板元素.....(308)

- |                   |          |
|-------------------|----------|
| 5.1 面积坐标          | 5.4 载荷列阵 |
| 5.2 三角形板弯曲元素的位移函数 | 5.5 计算实列 |
| 5.3 内力矩阵和刚度矩阵     |          |

### § 6 各种薄板弯曲元素.....(318)

- |                                                |                                      |
|------------------------------------------------|--------------------------------------|
| 6.1 莫尔来 (Morley) 非协<br>调三角形元素                  | 6.4 赫尔曼 (Herrm-<br>ann) 混合三角<br>形板元素 |
| 6.2 HCT (Hsje, Clough,<br>Tocher) 协调三角形板<br>元素 | 6.5 曲壳元素                             |
| 6.3 完全五次多项式协调板元素                               | 6.6 SAP 程序中的板壳<br>弯曲元素               |

|                           |                             |
|---------------------------|-----------------------------|
| <b>第七章 薄壳理论</b> .....     | (340)                       |
| § 1 概 述 .....             | (340)                       |
| § 2 壳体的内力.....            | (341)                       |
| § 3 旋转壳的薄膜理论.....         | (345)                       |
| 3.1 引言                    | 3.5 轴对称载荷下旋转壳的薄膜解           |
| 3.2 旋转壳的几何关系              |                             |
| 3.3 平衡方程                  | 3.6 轴对称载荷下球壳的薄膜解            |
| 3.4 圆柱壳体的薄膜解              | 3.7 轴对称载荷下锥壳的薄膜解            |
| § 4 圆柱壳的弯曲理论.....         | (358)                       |
| 4.1 平衡方程                  | 4.4 封闭圆柱壳在对称载荷下的解           |
| 4.2 内力和中面位移的关系            |                             |
| 4.3 位移平衡方程                | 4.5 风载下封闭圆柱壳的解 (对应非轴对称载荷的解) |
| § 5 轴对称载荷作用下旋转壳的弯曲理论..... | (377)                       |
| 5.1 平衡微分方程                | 5.4 方程的综合                   |
| 5.2 应变和位移的几何关系            | 5.5 轴对称载荷下球壳的简化理论           |
| 5.3 内力和变形的物理关系            |                             |
| <b>第八章 壳体的有限元法</b> .....  | (387)                       |
| § 1 轴对称壳元素 (截锥元素).....    | (387)                       |
| 1.1 轴对称载荷情况               | 1.2 非轴对称载荷情况                |
| § 2 矩形平板壳元素.....          | (401)                       |
| 2.1 矩形平板壳元素的刚度矩阵          | 2.4 坐标变换                    |
| 2.2 矩形平板壳元素的弯曲刚度矩阵        | 2.5 载荷列阵                    |
| 2.3 矩形平板壳元素的刚度矩阵          | 2.6 边界条件的处理和内力计算            |
| § 3 三角形平板壳元素.....         | (417)                       |
| 3.1 三角形平板壳元素刚度矩阵          | 3.2 坐标变换                    |

|                                                |                          |
|------------------------------------------------|--------------------------|
| 3.3 载荷列阵和边界约束                                  | 3.4 内力计算                 |
|                                                | 3.5 计算实例                 |
| § 4 曲壳元素.....(426)                             |                          |
| 4.1 曲壳元素的几何近似                                  | 4.4 元素刚度矩阵               |
| 4.2 元素的位移场                                     | 4.5 载荷及应力                |
| 4.3 应力和应变                                      | 4.6 曲壳元素的计算实例            |
| <b>第九章 结构稳定性问题、几何非线性问题.....(449)</b>           |                          |
| § 1 结构稳定性问题的提出和解决途径.....(449)                  |                          |
| 1.1 稳定平衡与不稳定平衡                                 | 1.2 求解临界载荷的方法            |
| § 2 矩形薄板的稳定性.....(455)                         |                          |
| 2.1 双向受压的矩形板失稳——微分方程解法                         | 2.3 单向受压的简支矩形板——能量解法     |
| 2.2 一个方向承受均布压力的矩形板的失稳                          | 2.4 加筋板的稳定               |
| § 3 有限元法解结构稳定性问题.....(465)                     |                          |
| 3.1 位移法解结构稳定性问题的步骤和公式                          | 3.2 几何刚度矩阵               |
|                                                | 3.3 结构稳定性问题实例            |
| § 4 几何非线性问题.....(492)                          |                          |
| 4.1 几何非线性问题的解法                                 | 4.3 考虑弯曲和薄膜力共同作用下板的大挠度计算 |
| 4.2 几何刚度矩阵的形成                                  |                          |
| <b>第十章 有限元法求解材料非线性问题 (I)——塑性理论基础.....(520)</b> |                          |
| § 1 简单拉伸时的塑性现象.....(520)                       |                          |
| § 2 空间应力状态.....(524)                           |                          |
| 2.1 应力张量及其分解                                   | 2.2 最大剪应力, 八面体应力与应力强度    |
| § 3 空间应变状态.....(531)                           |                          |

|                                    |                   |
|------------------------------------|-------------------|
| 3.1 应变张量及其分解                       | 3.2 剪变强度, 应变强度    |
| § 4 塑性理论中的全量方程                     | (533)             |
| § 5 简单加载                           | (535)             |
| § 6 卸载理论                           | (537)             |
| § 7 塑性条件                           | (538)             |
| 7.1 最大剪应力条件                        | 7.2 形变能条件 (米赛斯条件) |
| § 8 流动定律, 弹塑性状态下应力-应变的增量关系         | (542)             |
| <b>第十一章 有限元法求解材料非线性问题 (II)——解法</b> | (549)             |
| § 1 概述                             | (549)             |
| § 2 增量变刚度法 (切线模量法)                 | (551)             |
| 2.1 线性化概念                          | 2.3 计算步骤          |
| 2.2 刚度矩阵的形成                        |                   |
| § 3 增量初应力法                         | (555)             |
| 3.1 基本思想                           | 3.2 计算步骤          |
| § 4 增量初应变法                         | (557)             |
| § 5 算例                             | (559)             |
| <b>第十二章 对非线性断裂问题的应用</b>            | (566)             |
| § 1 非线性断裂理论研究的简要回顾                 | (566)             |
| 1.1 目前研究的重点问题                      | 1.2 进一步研究的问题      |
| § 2 非线性断裂静、动力学中的路径无关积分             | (570)             |
| 2.1 非线性弹性断裂动力学情况                   | 2.3 定常的裂纹传播情况     |
| 2.2 弹塑性断裂动力学情况                     | 2.4 J积分与裂纹扩展力的关系  |
|                                    | 2.5 粘弹塑性流动        |
| § 3 在增量理论下J积分路径无关性的数值检验            | (582)             |

|     |                                 |       |
|-----|---------------------------------|-------|
| 3.1 | 基本的增量方程和本构关系                    |       |
| 3.2 | 计算模型和数值结果                       |       |
| § 4 | 弹塑性裂纹的稳定(亚临界)扩展和 nonlinear 断裂准则 | (588) |
| 4.1 | 计算模型和解法                         |       |
| 4.2 | 若干计算结果及分析                       |       |
| § 5 | 含裂纹复合材料的细观断裂模型                  | (594) |
| 5.1 | 复合材料概述                          |       |
| 5.2 | 一个细观断裂模型, 外部解                   |       |
| 5.3 | 内部多相屈服区的裂纹稳定扩展解                 |       |
| 附录一 | SAP 程序简介                        | (605) |
| 一   | 程序特点                            | (605) |
| 1.  | 发展概况                            |       |
| 2.  | 元素库内容                           |       |
| 3.  | SAP 程序的功能                       |       |
| 4.  | 程序结构的特点                         |       |
| 5.  | 解题规模和精度                         |       |
| 二   | 数据填卡                            | (616) |
| 1.  | 元素类型编号                          |       |
| 2.  | 数据填卡                            |       |
| 三   | 静力问题举例                          | (625) |
| 四   | 后记                              | (639) |
| 附录二 | 弹性基本方程的张量描述                     | (641) |
| 一   | 张量分析基础                          | (641) |
| 1.  | 求和约定与坐标变换                       |       |
| 2.  | 欧几里得度量张量                        |       |
| 3.  | 标量、反变张量、共变张量、混变张量               |       |
| 4.  | 短缩、商法则                          |       |
| 5.  | 基向量、Christoffel 记号、共变导数         |       |
| 二   | 应力张量、应变张量、本构方程                  | (656) |
| 1.  | 应力张量                            |       |
| 2.  | 应变张量                            |       |
| 3.  | 本构方程                            |       |
| 三   | 弹性方程                            | (661) |

- |         |         |
|---------|---------|
| 1. 几何方程 | 3. 本构方程 |
| 2. 协调方程 | 4. 运动方程 |

### 附录三、若干应用程序介绍.....(663)

#### 一、 二维八节点等参元素程序和使用说明.....(663)

- |               |        |
|---------------|--------|
| 1. 程序功能       | 3. 源程序 |
| 2. 程序标识符和使用说明 |        |

#### 二、 20 节点六面体等参元三维应力分析程序和使用说明 .....(678)

- |               |            |
|---------------|------------|
| 1. 程序功能       | 4. 控制台变量说明 |
| 2. 程序标识符和使用说明 | 5. 源程序     |
| 3. 过程说明       |            |

#### 三、 三角形平板壳元素程序和使用说明.....(695)

- |               |        |
|---------------|--------|
| 1. 程序功能       | 3. 源程序 |
| 2. 程序标识符和使用说明 |        |

#### 四、 板条元素解平板失稳问题程序和使用说明.....(717)

- |               |        |
|---------------|--------|
| 1. 程序功能       | 3. 源程序 |
| 2. 程序标识符和使用说明 |        |

#### 五、 弹塑性应力分析变刚度法程序.....(727)

- |               |        |
|---------------|--------|
| 1. 程序功能       | 3. 源程序 |
| 2. 程序标识符和使用说明 |        |

译文：

序

我非常高兴地看到我的朋友欧阳颯教授主编的这一重要著作的问世，其中部分章节是他访问我们德克萨斯大学计算力学研究所 (TICOM) 时写成的。本书内容的选取和组织反映了在现代力学和力学教学中这样一种我确信应该肯定的趋向：将固体力学的基本理论与现代的计算方法结合在一起以给出对重要工程问题作定量分析的强有力的工具。计算力学这一综合性的领域在将来肯定会变得更为重要的。我衷心地希望本书将对这一学科在中国的健康成长作出它的贡献。

J. T. 欧登

一九八二年七月廿五日

# 前 言

当前，有限元法对于工程技术领域的广泛应用，及其对这些领域研究进展所起的作用，已经是人所共知的了。它是现代计算技术作用于数学、力学学科产生的结果。

本书论述有限元的基本原理、方法和程序，结合讲述弹性、塑性理论的基础内容，因而得名“弹性、塑性、有限元”。它是编者多年来从事有限元应用研究和教学所编讲义发展而来的。1973年编者在复旦大学力学专业开设《复杂结构的有限元分析》，写成了一讲义，随之开展了这一方法在航空航天、机械、化工、土建、材料、兵工、动力机械等工程技术领域的广泛应用。提供协作任务的单位有：航空工业部湘江机器厂，国防科委第六研究院624、623、606、611等所，上海七〇八设计院，上海长征机械厂，华东工程学院，西安交大，上海工业建筑设计院，化工部兰州石油机械研究所及武汉化工设计院，航天工业部有关研究所等。其中，我们在国内首次尝试完成了某型航空发动机主要零部件的成套有限元分析，为国家产品定型提供依据。目前这些力学分析和程序已吸收在国防科委第六研究院所编“航空发动机强度设计、试验手册”之中。我们还广泛研究了高速飞机结构、航空发动机、反坦克弹丸、化工动力装置等的热弹塑性问题，作出了专门的程序，计算结果已应用于工程实际；此外对化工容器、造粒塔结构、飞机结构、地基梁等的有限元分析，也都为有关部门采用。在此基础上，我们又将讲义改写为《结构强度理论》，并多次对复旦大学力学专业高年级学生、研究生讲授，参加听讲的尚有协作单位的一些同志。编者还多次应邀去部分协作单位作短期专题讲授，其间，许多同志和单位建议将讲义整理成书出版，得到了湖南科学技术出版社的

大力支持，这促成编者下决心修改原稿，并取为目前的书名。

在最后修改原讲义的过程中，1980年6月到1981年8月期间，编者曾应美国德克萨斯大学计算力学所所长和宇航工程及工程力学系教授 J.T.Oden、哈佛大学应用科学院教授 B.Budiansky, J.W.Hutchinson、麻省理工学院宇航系教授 T.H.H.Pian、加州大学应用力学系教授 Y.C.Fung, E.Reissner 等邀请，赴美国德克萨斯大学、哈佛大学、麻省理工学院、普林斯顿大学、加州理工学院、加拿大英属哥伦比亚大学应用数学研究所、加州大学等十五校讲学交流，并应美国西南研究院“应用力学评论”主编 S.Juhasz 博士邀请到该刊编辑部短期讲学。综合交流考察及研究成果，编者对本书又增补了“对非线性断裂问题的应用”一章。

全书由十二章及三个附录组成：第一章讲述弹性理论基础，有这方面基础的读者可以不读，仅作查考；第二章讲述能量原理，它是有限元的理论基础；第三到第八章介绍一、二、三维和壳体有限元模型，其中适当介绍了国内外流行的 SAP 程序中的部分元素；第九章是几何非线性问题；第十、十一章是有关材料非线性问题，第十二章介绍对非线性断裂问题的应用。对大多数有限元模型，我们均例举了自己的计算结果，供读者参考。在附录中扼要地介绍了SAP程序系统，并给出了若干应用程序汇编。这对工程应用来说，相信是非常有用的。

我们要感谢国内以上各协作单位，以及国外上述各校的教授们，没有他们的支持，这本书不会以目前的面目写成。湖南株洲基础大学讲师吴阳冬同志在整理稿件和制图方面的过细工作，对本书的出版起了非常有力的支持作用，在此谨致深切的谢意！

由于时间仓促及学识水平有限，本书中错误之处在所难免，请各位读者批评指正。

欧 阳 营

1982年4月于上海复旦园

# 第一章 弹性力学的基本方程

## §1 应力分量

### 1.1 一点的应力状态

一个工程结构总是承受一定的外力（外载荷）的。外力是其它物体对该结构所施加的作用力，一般分为两类：一类是作用在结构物体的表面上，称为表面力，例如气动力或接触面间的压力等；另一类是分布在物体体积内的，称为体积力，例如重力，惯性力等。外力还可按作用的方式分为集中力和分布力，例如，对于一个机翼来说，分布力为气动力和机翼结构的质量力；集中力为安装在机翼上的部件（如起落架、副油箱、火炮、炸弹等）的质量力以及某些部件工作时所产生的作用力（如着陆时起落架传递的力、打炮时的反作用力等），还有机身通过接头作用的力。

在外力作用下使物体产生变形，同时引起物体内部各部分之间的相互作用力，这种物体内部的力称为内力。

事实上，要判断各种结构物体在外力作用下既能有足够的强度、刚度和稳定性；又能满足经济、适用的要求，仅仅分析它们的外力是不够的。因为外力只是引起各种结构物体变形或者破坏的条件，而内力则是引起它们变形或者破坏的决定因素，所以，分析物体的内力状态是十分重要的。

现从材料力学中的“截面法”，由浅入深地分析物体的内力。

图1—1表示一个承受外力的物体，设想用一平面 $mm$ 把该物体分为A和B两部分，将B部分去掉，保留A部分，把A部分看作一个