高等学校教材

测量平差教程

CELIANGPINGCHAJIAOCHENG

游祖吉　樊功瑜　编著

测绘出版社

高等学校教材

测量平差教程

游祖吉　樊功瑜　编著

测 绘 出 版 社

内 容 简 介

本书对测量误差理论和测量平差基础知识作了系统的论述，并介绍了近代平差方法。内容包括观测误差的分布及其传播，参数估计方法，相关间接平差，相关条件平差，综合平差，分组平差，秩亏自由网平差和统计假设检验等。每章末附有适量的习题。

本书作为大学测量专科教材，有“ * ”号的内容为选读或参考资料。顾及“ * ”号内容，可供测量专业本科作教材，也可供测绘人员学习参考。

高等学校教材

测量平差教程

游祖吉　樊功瑜

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

*

开本 787×1092　1/16・印张　19.75　・字数 447 千字

1991 年 5 月第一版・1991 年 5 月第一次印刷

印数 0,001—3000 册・定价 5.20 元

ISBN　7—5030—0409—6/P・144

前　言

本书是在以往一些测量平差教材的基础上，结合作者在武汉测绘科技大学和同济大学两校的教学实践经验编写而成的。全书共分八章：测量误差理论、参数定值估计方法，相关间接平差、相关条件平差，综合平差，分组平差、秩亏自由网平差和统计假设检验。每章末附有适量的习题。本书理论阐述清晰，同时注重理论联系实际，实例较多，通俗易懂，便于连续或分段教学。

本书有以下几个特点：

方差和方差估计分别阐述，在第一章中只讲方差，方差估计放到第二章中介绍，这样安排既加深了对两种概念的理解，又避免了不必要的重复。

在深入系统地阐述间接平差和条件平差的基础上介绍综合平差，把众多的平差方法概括在一种函数模型中，以期达到既掌握基本的平差方法，又明确各种平差方法之间的关系的目的。

力求理论与实际紧密结合，在阐述基本平差理论之后，对水准网、测角网、测边网和边角网的平差作了专门的介绍。在条件平差一章中，还介绍了附合导线和附合三角网的平差。上述安排有利于培养实际作业能力。

从相关平差理论出发阐述各种平差方法，独立观测值的平差是其特例。这样安排既做到概念清晰，又缩短了篇幅，节省学时。

对目前普遍关注的粗差定位和变形分析问题作了适量的介绍，以扩大读者视野。

本书第一、二、七、八各章由同济大学樊功瑜执笔，第三、四、五、六各章由武汉测绘科技大学游祖吉执笔。在编写过程中得到郭禄光教授、金国雄教授和鲁林成教授的支持与鼓励，并提出许多修改意见和建议，对此作者深表谢意。

经测绘教材委员会审定，本书承中国人民解放军测绘学院黄维彬教授，周庆珍副教授和同济大学黄加惠副教授审阅，他们提出了许多宝贵意见和建议，在此谨致衷心感谢。

由于我们水平有限，书中定有不当之处，恳切希望读者批评指正。

编著者

1988 年 8 月

目　　录

第一章　测量误差理论

§ 1-1　测量误差

由于测量(观测)工作受多种因素的影响,因此观测成果不可避免地含有误差,这只需要对某量进行多次重复观测,从其一系列不同的观测结果中,就能得到证实。随着科学技术的不断发展,人们将能够把测量误差控制得愈来愈小,但却不能完全消除它们,因此有必要对测量误差进行研究,以便设法消除或削弱其影响,从而提高观测成果的质量。

测量误差产生的原因是多方面的,但是概括起来不外乎有测量仪器不够完善、观测者感觉器官的限制以及环境因素的影响等三个方面。

测量仪器不够完善是指仪器制造上的缺陷和精密程度的限制,如水准仪在制造上不能保证视准轴与水准管轴的严格平行;用刻到厘米分划的钢尺量距,无法保证毫米读数是正确的等等。观测者感觉器官限制是指人的鉴别能力有一定限度,因而照准、读数等都会产生误差。环境因素影响是指观测时空气的温度、湿度以及风力、大气折光等会使观测值带有误差。通常把以上三个方面的因素称为观测条件。容易理解,观测条件好一些,观测成果的质量就好一些,反之观测成果的质量就差一些;若观测条件相同,则观测成果的质量也相同。在测量工作中,把观测成果质量的好坏相应地称为精度高或精度低;若观测成果的质量相同,则称为等精度或同精度。

测量误差按其性质,可分为粗差、系统误差和偶然误差三类。

一、粗差

粗差是由于测量工作者疏忽大意,或操作不当,或受外界干扰等等原因而造成的,例如照准了错误的目标,读错或记错数据等。因此,粗差实际上是一种错误,在观测成果中是不允许存在的,因为它将严重影响观测成果的质量,因此要求测量工作者要具有高度责任心和良好的工作作风,尽量避免粗差的发生。

二、系统误差

在相同观测条件下进行一系列观测,如果误差在数值的大小和符号上保持不变或按一定规律变化着,则称这种误差为系统误差。例如用一把含有尺长误差的尺子丈量距离,则距离越长,这种误差的影响越大;又如在不同于检定尺长时的温度下丈量距离,也会使成果含有系统误差。

系统误差常具有一定的积累性,因此对成果的影响较大,应当设法消除或削弱它的影响。例如对以上两种系统误差,可以在丈量的长度中加入尺长改正和温度改正,这样就可削弱它们带给观测成果的影响。近年来,也有把系统误差作为一种未知参数来处理的,如果用

某种标准对观测值进行判断，发现有系统误差存在，但对其数值的大小和符号不能确定，这时就可采用设置未知数的方法，使它与其它未知数一起，通过计算求出来，这种方法称为系统误差补偿。有关消除和削弱系统误差的方法，在各测量教科书中有详尽的讨论，这里不作介绍了。

三、偶然误差

在相同观测条件下，进行一系列观测，如果误差在数值的大小和符号上表现出偶然性，则称这种误差为偶然误差。例如估读小数和照准目标时所产生的误差就是偶然误差。偶然误差是由许多偶然因素引起的小误差的综合结果，随着偶然因素的不断变化，其数值会忽大忽小，其符号会或正或负，它们都不能预知，因此是一种随机性质的误差。

为了提高观测成果的精度，同时也为了检查粗差，在测量工作中，通常都要进行多余观测。所谓多余观测，就是对观测量进行多于必要观测数的观测，例如为了确定一个平面三角形的形状，只需要观测任意两个内角就可以了，但通常是观测三个内角，又如测量某段距离，只需要一次就可以得出其长度，但通常要观测两次，甚至两次以上，可见，上述两例都进行了多余观测。一般而言，采用多余观测对于检查大的粗差是不难做到的，但若要发现小的粗差并不是一件容易的事，而粗差不予剔除，必然要导致观测成果的不可靠，因而发现和剔除粗差是测量工作者十分关注的问题。

在整个观测过程中，应当剔除粗差，消除或削弱系统误差的影响，使观测值中主要剩下偶然误差。因此，测量平差的任务就是对带有偶然误差的观测数据进行处理，求出它的及其函数的最可靠值并评定观测成果的精度。

§ 1-2　偶然误差分布

设有一组观测值 $L_1, L_2\cdots, L_n$，其相应的真值为$\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots\tilde{L}_n$，由于观测总伴有误差，因此观测值与其相应的真值不会相等，其差数为

$$\Delta_i = \tilde{L}_i - L_i \tag{1-2-1}$$

式中 Δ_i 称为真误差或简称误差。

前已指出，从表面上去观察个别偶然误差，其数值的大小和符号不具有什么规律性，然而这种反映在个别误差上的偶然性，却在对大量偶然误差的统计分析中呈现出一定的规律性，并且误差个数越多，这种规律性表现得越明显。为了揭示偶然误差的规律性，在相同观测条件下，对某测区 817 个三角形的内角进行了观测，并按式(1-2-1)求出内角和的误差为

$$\Delta_i = 180° - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)_i \quad (i = 1,2\cdots,817) \tag{1-2-2}$$

式中 Δ_i 为第 i 个三角形内角和的观测值$(\beta_1+\beta_2+\beta_3)_i$ 的真误差。由于在观测值中已剔除了粗差，且系统误差已削弱到可以忽略不计，因此从整体讲，这些闭合差均为偶然因素所致，所以它们都是偶然误差，而且各个误差之间是互相独立的。所谓独立，即各个误差在数值的大小和符号上互不影响。与这样一组误差相对应的观测值称为互相独立的观测值。

设以 $d\Delta$ 表示误差区间并令其等于 0.5″，将这组误差分别按正误差和负误差重新排列，统计误差出现在各区间的个数 μ，计算出误差出现在某区间内的频率 μ_i/n，其结果列于表1-1中。

表 1-1

误差区间 $d\Delta$	Δ 为正值		Δ 为负值		备 注
	个数 μ	频率 μ_i/n	个数 μ	频率 μ_i/n	
0.0″～0.5″	123	0.151	121	0.148	Δ 数值等于区间左端值时，统计在该区间内。
0.5～1.0	104	0.127	90	0.110	
1.0～1.5	75	0.092	78	0.096	
1.5～2.0	55	0.067	51	0.062	
2.0～2.5	27	0.033	39	0.048	
2.5～3.0	20	0.025	15	0.018	
3.0～3.5	10	0.012	9	0.011	
3.5 以上	0	0	0	0	
和	414	0.507	403	0.493	

从表 1-1 可以看出，该组误差表现出这样的分布规律：绝对值较小的误差比绝对值较大的误差多；绝对值相等的正误差个数与负误差个数相近，误差的绝对值有一定限值，最大误差不超过 3.5″。

为了形象地表达偶然误差的分布规律，根据表 1-1 的数据绘制了以误差 Δ 的数值为横坐标，以 $\frac{\mu/n}{d\Delta}$ 为纵坐标的频率直方图，如图 1-1 所示。实际上，由于误差的取值是连续的，故当误差个数 n 无限增多，并无限缩小误差区间时，则可以想象，图 1-1 中各个小长方条顶边

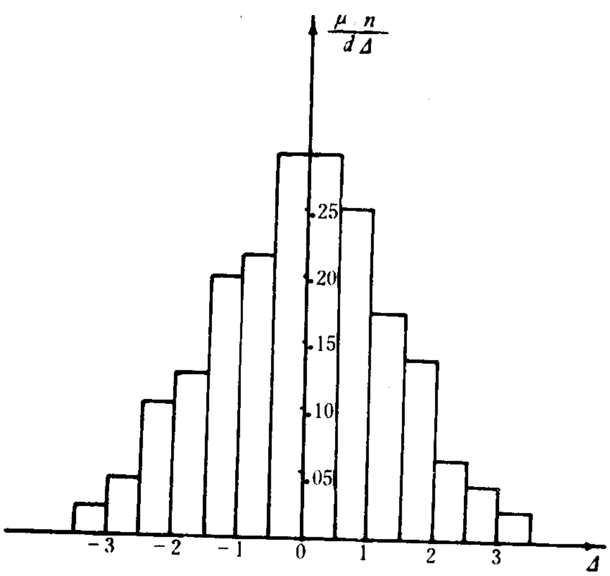

图 1-1

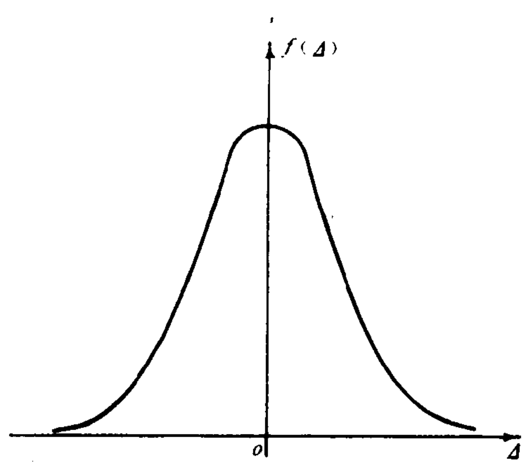

图 1-2

的折线就变成一条。如图 1-2 所示的光滑曲线，称这条曲线为误差分布的概率密度曲线或误差分布密度曲线，简称为误差曲线。它与正态分布曲线极为接近。由此可以看出，偶然误差的分布随着 n 的无限增大是以正态分布为其极限分布的，因此偶然误差 Δ 是服从正态分布的连续型随机变量。由概率论知，正态分布的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{1-2-3}$$

式中 x 为正态随机变量 X 的取值，a 和 σ^2 分别为 X 的数学期望和方差，是正态分布的两个参数。参数为 a 和 σ^2 的正态分布可简记为 $N(a,\sigma^2)$。参数 a 和 σ^2 决定了曲线的位置和形状。

在图 1-3 中给出了两条 σ 均为 1，而 a 不相同的曲线。当 $a=0$ 时，曲线以纵轴为对称线；当 $a=3$ 时，曲线以直线 $x=3$ 为对称线，即曲线的位置由 a 决定。在图 1-4 中给出了三条 a 均为零而 σ 不相同的曲线，当 σ 越小时，曲线形状越陡峭，反之，曲线越平缓。可见，参数 a 和 σ 决定着密度函数的图像。

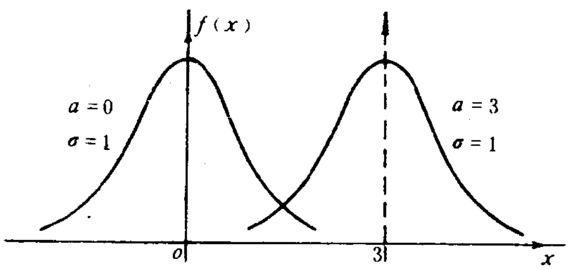

图 1-3

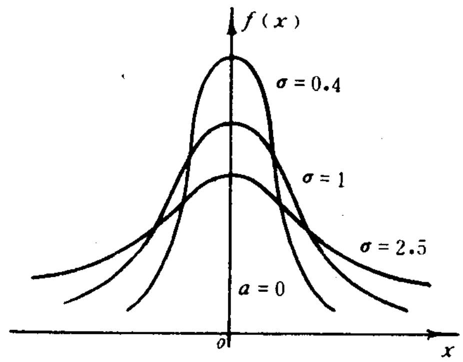

图 1-4

已知偶然误差 Δ 是服从正态分布的随机变量，它的数学期望和方差分别为

$$E(\Delta) = 0 \tag{1-2-4}$$

$$D_\Delta = \sigma^2 \tag{1-2-5}$$

故 Δ 的密度函数为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-2-6}$$

根据以上分析，偶然误差的特性可进一步阐述如下：

(1)在一定的观测条件下，误差的绝对值不会超过一定的限值，或者说，误差绝对值出现在某限值内的概率为 1。由式(1-2-6)知，当误差绝对值 $|\Delta|$ 很大时，$f(\Delta)$ 趋于零，因此，按定积分定义，有

$$P_{-\infty}^{+\infty}(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta) d\Delta = 1 \tag{1-2-7}$$

上式说明，误差曲线与横轴所围的面积为 1。

(2)绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。若设 $\Delta_1 > \Delta_2$

则有 $p(\Delta_1) < p(\Delta_2)$

以相应的概率元素 $f(\Delta)d\Delta$ 代入上式，得

$$f(\Delta_1)d\Delta < f(\Delta_2)d\Delta$$

由此可得

$$f(\Delta_1) < f(\Delta_2) \tag{1-2-8}$$

上式说明，密度函数 $f(\Delta)$ 随着 $|\Delta|$ 的增大而减小。

(3)绝对值相等的正误差与负误差出现的概率相等，即

$$f(+\Delta)d\Delta = f(-\Delta)d\Delta$$

故

$$f(+\Delta) = f(-\Delta) \tag{1-2-9}$$

上式说明，密度函数 $f(\Delta)$ 为偶函数。

以上讨论了三种描述误差分布的方法，即列表法、绘图法和密度函数法。不难看出，最后一种方法可以替代前面两种，是一个比较全面、科学和简便的描述方法。在以后的讨论中，将应用密度函数法，为此，对密度函数 $f(\Delta)$ 作进一步分析如下：

(1)由式(1-2-6)知，$f(\Delta)>0$，即密度函数 $f(\Delta)$ 的图像，全部位于横轴的上方；

(2)由式(1-2-8)知，$f(\Delta)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调增加的，在区间 $(0,\infty)$ 内是单调减小的，或者说密度函数 $f(\Delta)$ 随着 $|\Delta|$ 的增大而减小，当 $\Delta\to\pm\infty$ 时，$f(\Delta)\to 0$，即 $f(\Delta)$ 以横轴为其渐近线；

(3)因 $f(\Delta)$ 为偶函数，故其图像对称于纵轴；

(4)取 $f(\Delta)$ 的一阶导数，并令其为零，即

$$f'(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(-\frac{2\Delta}{2\sigma^2}\right) = -\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} = 0$$

由上式可得

$$\Delta=0$$

故函数的最大值为

$$f(o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{1-2-10}$$

(5)取 $f(\Delta)$ 的二阶导数，并令其为零，即

$$f''(\Delta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}\left(1-\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right) = 0$$

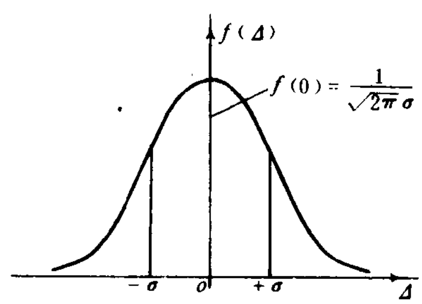

图 1-5

由此可得

$$\Delta = \pm\sigma \tag{1-2-11}$$

上式说明，σ 为误差曲线拐点的横坐标。

由以上分析可知，一维误差曲线呈“钟”形，如图 1-5 所示。

§ 1-3　精度标准

在上节讨论正态分布曲线形状时，已经阐明参数 σ 决定着曲线的形状。从图 1-4 可以看到，当 σ 越小，钟形曲线越陡峭，反之，曲线越平缓。这是为什么呢？由式(1-2-10)可知，当 σ 较小时，$f(o)$就较大，此时曲线有较高的顶点，反之，曲线顶点就较低。又由式(1-2-7)知，不管 σ 是大是小，曲线与横轴所围的面积恒等于 1，因此，顶点较高的曲线，必然很快地往对称轴靠近而形成陡峭形状，即这条曲线所代表的一组观测值的误差分布比较密集；反之，顶点较低的曲线，必然逐渐向两边伸展而形成平缓形状，即这条曲线所代表的一组观测值的误差分布比较离散。当误差分布比较密集时，其离散度较小，它所代表的一组观测值的精度就较高；反之，当误差分布比较离散时，它所代表的一组观测值的精度就较低。因此，所谓精度，就是指误差分布的密集或离散的程度，这就是参数 σ 的大小可以表示一组观测值的精度高低的道理所在。

衡量精度的标准有很多种，常用的有以下几种。

一、方差与均方差

按照连续型随机变量的方差和数学期望的定义，并顾及式(1-2-4)，则误差 Δ 的方差为

$$\sigma^2 = D_\Delta = E\{(\Delta - E(\Delta))^2\} = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta \tag{1-3-1}$$

取以上方差的平方根，得

$$\sigma = \pm \sqrt{D_\Delta} = \pm \sqrt{E(\Delta^2)} \tag{1-3-2}$$

式中 σ 称为均方差或标准差。由式(1-2-11)知，它的几何意义是误差曲线拐点的横坐标。

二、平均误差

在一定的观测条件下，偶然误差绝对值的数学期望称为平均误差，并用 θ 表示，即

$$\theta = E(|\Delta|) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta| f(\Delta) d\Delta \tag{1-3-3}$$

顾及式(1-2-6)，上式为

$$\begin{aligned}\theta &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta| f(\Delta) d\Delta = 2\int_0^{\infty} \Delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} d\Delta \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\Delta}{\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} d\Delta = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} -\sigma d e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma \left(-e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}\right)\Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = 0.7979\sigma\end{aligned} \tag{1-3-4}$$

故有

$$\left.\begin{aligned}\theta &= 0.7979\sigma \\ \sigma &= 1.253\theta\end{aligned}\right\} \tag{1-3-5}$$

以上为平均误差θ与均方差σ的理论关系式，因此，θ也能反映误差分布的密集或离散程度，故θ也可作为一种精度标准。

三、或然误差

或然误差ρ又称概率误差，其定义是：在一定的观测条件下，大于ρ与小于ρ的偶然误差绝对值出现的概率各为一半，即

$$p(-\rho<\Delta<+\rho)=0.5 \tag{1-3-6}$$

或然误差的几何意义可用图1-6说明。因误差曲线与横轴所包围的面积为1。故ρ的几何意义是曲线以下从$-\rho$到$+\rho$之间的面积为$\frac{1}{2}$。

借助于正态分布表求或然误差是比较方便的，但误差Δ服从$N(0,\sigma^2)$，它不是服从$N(0,1)$的随机变量，故需要进行标准化，

设

$$\eta=\frac{\Delta-0}{\sigma}=\frac{\Delta}{\sigma} \tag{1-3-7}$$

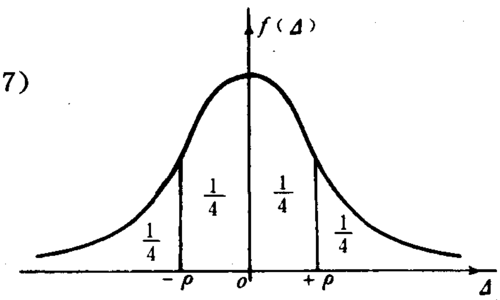

图 1-6

则η服从$N(0,1)$，并且当$\Delta=\pm\rho$时，$\eta=\pm\rho/\sigma$，则

$$P(-\rho<\Delta<+\rho)=p(-\frac{\rho}{\sigma}<\eta<\frac{\rho}{\sigma})$$

$$=\Phi(\frac{\rho}{\sigma})-\Phi(-\frac{\rho}{\sigma})=0.5$$

以$\phi(-\frac{\rho}{\sigma})=1-\Phi(\frac{\rho}{\sigma})$代入上式，得

$$2\Phi(\frac{\rho}{\sigma})-1=0.5$$

即　　$\Phi(\frac{\rho}{\sigma})=0.75$

查正态分布表，得

$$\Phi(0.6745)=0.75$$

即

$$\frac{\rho}{\sigma}=0.6745$$

故有

$$\left.\begin{aligned}\rho&=0.6745\sigma\\ \sigma&=1.4826\rho\end{aligned}\right\} \tag{1-3-8}$$

由以上ρ与σ的关系，可知或然误差ρ也是一种精度标准。

以上介绍的三种衡量精度的标准都是n为无限时的理论值，当观测值的个数有限时，如何衡量精度问题，将在第二章中介绍。

四、极限误差

前已指出，观测必然要产生误差、尽管测量工作者认真仔细地工作，观测误差仍然不可

避免，所以要采取种种手段予以处理，那么，多大的误差算是偶然误差？又多大的误差算是粗差？因此需要规定一个标准，超过这个标准的误差就列入粗差，相应的观测值应予剔除并返工重测，这个标准就是极限误差。所谓极限误差就是最大误差。规定极限误差的根据是误差出现在某一范围内的概率的大小。Δ 出现在$(-k\sigma,+k\sigma)$内的概率，相当于 $N(0,1)$变量 η 出现在$(-k,+k)$内的概率，故误差出现在区间$(-\sigma,+\sigma)$，$(-2\sigma,+2\sigma)$和$(-3\sigma,+3\sigma)$内的概率分别为

$$\left.\begin{aligned}P(-\sigma<\Delta<\sigma)&=P(-1<\eta<+1)=2\Phi(1)-1=0.683\\P(-2\sigma<\Delta<2\sigma)&=P(-2<\eta<+2)=2\Phi(2)-1=0.954\\P(-3\sigma<\Delta<3\sigma)&=P(-3<\eta<+3)=2\Phi(3)-1=0.997\end{aligned}\right\}\tag{1-3-9}$$

可见，大于三倍均方差的误差，其出现的概率只有 0.3%，是小概率事件，在一次观测中，可认为是不可能事件。因此，就规定三倍均方差为极限误差，即

$$\Delta_{\text{限}}=3\sigma\tag{1-3-10}$$

若对观测要求较为严格，也可规定两倍均方差为极限误差，即

$$\Delta_{\text{限}}=2\sigma\tag{1-3-11}$$

五、相对误差

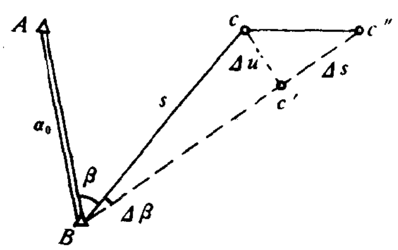

图 1-7

在距离测量中，单用方差或均方差，还不能表达观测值精度的高低。例如对于 50m 和 500m 两段距离，设它们的均方差都是±2cm，从均方差看，它们精度相同，但若从单位长度的精度来看，显然后者的精度比前者高，因此需要比较单位长度的精度。衡量单位长度的精度，一般采用相对误差。相对误差的定义是误差值与观测量之比，它是无量纲的，通常用均方差作为分子，为了便于比较，往往将相对误差的分子化为 1 的形式来表示。如上述两段距离，其相对误差分别为

$$\frac{2}{5000}=\frac{1}{2500}$$

和

$$\frac{2}{50000}=\frac{1}{25000}$$

显然，500m 距离的观测精度高。与相对误差相对应的方差、均方差、平均误差和或然误差均称为绝对误差。

角度测量一般不采用相对误差，因为其观测误差只与组成角度的两个方向有关，而与角值的大小无关，因此，在实际工作中，常常设角度测量是等精度观测。

在导线测量中，点位误差$\overline{cc''}$是由测角误差 $\Delta\beta$ 和量距误差$\overline{c'c''}=\Delta s$ 共同引起的(图 1-7)，因此，应使两者精度取得一致，采用相对误差，可以解决这个问题。如图 1-7 中的 Δs 和 Δu 分别称为纵向误差和横向误差，则$\frac{\Delta s}{s}$和$\frac{\Delta u}{s}$分别为纵向相对误差和横向相对误差。因 $\Delta\beta$ 一般都

很小，故可将 Δu 看成圆弧，则有

$$\frac{\Delta u}{s}=\Delta\beta(\text{弧度})=\frac{\Delta\beta'}{\rho'}=\frac{\Delta\beta''}{\rho''} \tag{1-3-12}$$

式中 $\rho'=3438'$ ，$\rho''=206265''$

若已知测角误差为 5″，则按式(1-3-12)，可求得横向相对误差为

$$\frac{\Delta u}{s}=\frac{\Delta\beta''}{\rho''}=\frac{5''}{206265''}=\frac{1}{40000}$$

即量距相对误差应达到 1/40000，才能和测角精度相匹配。

§ 1-4 协方差传播律

上一节介绍了衡量精度的标准，通常采用方差或均方差来衡量观测值的精度。在实际工作中，除观测值外，还会遇到种种观测值的函数，例如导线测量中第 n 边的坐标方位角 α_n 与左转折角 $\beta_2,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 有以下关系：

$$\alpha_n=\alpha_0+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta n-n\times 180^\circ$$

式中 α_0 为起始边已知方位角，β_i 是观测值，可见，α_n 为观测值的函数。又例如，三角高程测量计算高差的公式为

$$h=s\mathrm{tg}\alpha$$

式中 s 为已知水平距离，α 为竖直角观测值，所以 h 是观测值的函数。类似的例子可以举出很多。那么，这些观测值函数的精度问题如何衡量呢？本节阐述的协方差传播律就是解决如何由观测值的精度求其函数的精度问题。

为了讨论方便，本节先介绍关于随机向量的概念，再利用这一概念推导传播律公式并举例说明其应用。

一、随机向量及其协方差阵

随机向量的概念是随机变量概念的推广，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为随机变量，由它们组成的 n 维列向量为

$$\underset{n\times 1}{X}=(x_1\quad x_2\cdots x_n)^T \tag{1-4-1}$$

式中 X 称为 n 维随机向量。由于随机向量是由随机变量定义的，故它也有自身的概率分布，描述这种分布的主要数字特征为随机向量的数学期望和方差。随机向量的数学期望 $E(X)$ 定义为

$$E(\underset{n\times 1}{X})=(E(x_1)\quad E(x_2)\cdots E(x_n))^T \tag{1-4-2}$$

$E(X)$ 也是一个 n 维随机向量，其元素是相应随机变量的数学期望 $E(x_i)$。随机向量的数学期望有以下主要性质：

$$(1)E(k)=K \tag{1-4-3}$$

$$(2)E(kX)=K\cdot E(X) \tag{1-4-4}$$

$$(3)E(AX+BY)=A\cdot E(X)+B\cdot E(Y) \tag{1-4-5}$$

式中 K,A,B 均为适当阶数的常数矩阵。

随机向量 X 的方差 D_X 定义为 n 阶方阵，即

$$\underset{n\times n}{D_X}=\begin{bmatrix}\sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2}\cdots\cdots\sigma_{x_1x_n}\\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2\cdots\cdots\sigma_{x_2x_n}\\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \sigma_{x_nx_1} & \sigma_{x_nx_2}\cdots\cdots\sigma_{x_n}^2\end{bmatrix} \tag{1-4-6}$$

式中

$$\sigma_{x_i}^2=E\{(x_i-E(x_i))^2\} \tag{1-4-7}$$

$$\sigma_{x_ix_j}=E\{(x_i-E(x_i))(x_j-E(x_j))\} \tag{1-4-8}$$

即方差 D_X 的主对角线元素为各个随机变量的方差，非对角线元素为两两随机变量的协方差，故称 D_X 为方差-协方差阵，也可称为方差阵或自协方差阵。由于 $\sigma_{x_ix_j}=\sigma_{x_jx_i}$，故 D_X 为 n 阶对称方阵，当两两随机变量互相独立时，则有

$$\sigma_{x_ix_j}=\sigma_{x_jx_i}=0 \tag{1-4-9}$$

此时 D_X 为一个对角阵，即

$$\underset{n\times n}{D_X}=\begin{bmatrix}\sigma_{x_1}^2 & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & \sigma_{x_2}^2 & \cdots\cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \sigma_{x_n}^2\end{bmatrix} \tag{1-4-10}$$

当两两随机变量等精度、互独立时，则 D_X 为一个纯量矩阵，即

$$\underset{n\times n}{D_X}=\begin{bmatrix}\sigma^2 & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & \sigma^2 & \cdots\cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ 0 & 0\cdots & \cdots & \sigma^2\end{bmatrix} \tag{1-4-11}$$

现将式(1-4-6)中的方差和协方差分别用其定义式(1-4-7)及(1-4-8)代入，得

$$D_X=$$

$$\begin{bmatrix}E\{(x_1-E(x_1))^2\} & E\{(x_1-E(x_1))(x_2-E(x_2))\} & \cdots & E\{(x_1-E(x_1))(x_n-E(x_n))\}\\ E\{(x_2-E(x_2))(x_1-E(x_1))\} & E\{(x_2-E(x_2))^2\} & \cdots & E\{(x_2-E(x_2))(x_n-E(x_n))\}\\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\\ E\{(x_n-E(x_n))(x_1-E(x_1))\} & E\{(x_n-E(x_n))(x_2-E(x_2))\} & \cdots & E\{(x_n-E(x_n))^2\}\end{bmatrix}$$

按矩阵乘法规则，上式可写成

$$D_X=E\{(X-E(X)(X-E(X))^T\} \tag{1-4-12}$$

式中

$$(X-E(X))=\begin{bmatrix}x_1-E(x_1)\\ x_2-E(x_2)\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ x_n-E(x_n)\end{bmatrix} \tag{1-4-13}$$