抽屉原则与涂色问题

周士藩
汤正谊
孙存金

江苏人民出版社

抽屉原则与涂色问题

抽屉原则与涂色问题

周士藩　汤正谊　孙存金

江苏人民出版社

抽屉原则与涂色问题

周士藩 汤正谊 孙存金

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行　南通县印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 4.75 字数 101,000

1981年4月第1版 1981年4月第1次印刷

印数 1—9,000 册

书号：13100·072 定价：0.35元

责任编辑 赵遂之 何震邦

说　　明

抽屉原则和涂色问题是国内中学生比较陌生的数学方法和数学问题；也是最近国外中学生数学竞赛中经常选用的试题之一。它新颖而又十分生动有趣。

本书首先通过生动的具体事例，以穷举法、反证法作衬托，总结、概括出抽屉原则，使读者初步体会到引入抽屉原则是完全必要的．怎样制造“抽屉”，怎样灵活地运用抽屉原则，这是解题的关键，我们不仅选配了一定数量的例题和习题，而且在使用抽屉原则的过程中，从方法论上着重介绍了“舍去保留法”和“差法”．利用这些方法，进一步讨论了“小方格的涂色问题”；获得了“同色三角形”的递推关系，并作了定量的估计。利用“完全图”的概念，又把“同色三角形”推广到“同色完全四边形”．又利用“自由差集”的概念，指出了二十届国际数学竞赛第六试题“国际社团”问题与“同色三角形”问题之间的联系。此外，还介绍了在欧氏空间中无穷多个点的涂色问题，用初等方法研究了端点同色的定长线段和顶点同色的等边三角形。

总之，这本书是用涂色（点涂色、线段涂色）问题作模型，把抽屉原则与涂色问题有机地结合起来，贯穿于全书而融成一个整体。

同时，围绕抽屉原则这一主题，穿插地介绍了数学中的一些有关基础知识，用以扩大读者的知识面．例如：自然对数的底“e”，整数的“剩余和剩余类”，“三维、四维、n 维空间”，“拉格朗日插值公式”，“自由差集”，“集合的基

本知识”，最后一节中，还讨论了分析学中的区间套定理和极限点存在定理等等。对于目前人们所研究的最新成果和悬而未决的问题，书中也作了适当的介绍，以期引起读者在这方面的注意。

在编写过程中，为了便于读者阅读，力求做到通俗易懂，由个别到一般、由具体到抽象、由易到难；在定理和例题的论证上，尽可能地写得合乎逻辑推理。本书可以作为中学生的数学课外读物，并可供中学数学教师及数学业余爱好者阅读参考。

本书在集体讨论、分工执笔、互相审议的基础上，由汤正谊同志修改而成。书中插图由江苏师范学院数学系张筑生同志精心绘制，在此表示衷心感谢。

限于我们的水平，文中一定有许多不妥甚至错误之处，欢迎读者批评指正。

编　者

一九八〇年五月

目　　录

一、引子……………………………………………………（ 1 ）
二、穷举法与反证法………………………………………（ 3 ）
三、抽屉原则Ⅰ……………………………………………（ 8 ）
四、小方格涂色问题………………………………………（15）
五、舍去保留法和同色三角形……………………………（20）
六、奇偶性与线段的中点…………………………………（27）
七、和为某数的倍数与重心问题…………………………（32）
八、差法与整数的分类……………………………………（38）
九、一个国际数学竞赛试题的解法………………………（43）
十、国际数学竞赛试题的进一步探讨……………………（49）
十一、小方格涂色问题的推广……………………………（55）
十二、从同色三角形到同色完全四边形…………………（59）
十三、又一个有趣的数学竞赛题…………………………（65）
十四、抽屉原则Ⅱ…………………………………………（69）
十五、杂例…………………………………………………（74）
十六、集合的基本知识……………………………………（88）
十七、抽屉原则Ⅲ…………………………………………（93）
十八、端点同色的定长线段………………………………（96）
十九、顶点同色的等边三角形……………………………（99）
二十、欲穷千里目，更上一层楼…………………………（105）
附录Ⅰ　线段涂色问题的补充……………………………（110）
　　Ⅱ　习题解答与提示……………………………………（121）

一、引　　子

什么叫抽屉原则？什么是涂色问题？抽屉原则与涂色问题有什么关系？为什么这两个问题可以放在一起来考虑？讨论这些问题有什么现实意义？这些问题，我们暂不回答，先从一些具体的事例谈起。

最简单的例子就是两个小朋友分铅笔。假使有3支铅笔要分给两个小朋友小红和小兰，既不允许把铅笔折断，又要把3支铅笔全部分光，怎样分法？这个问题，恐怕连没有读过书的小朋友都是懂得的。我们不妨把各种可能的分法都罗列出来（见表1·1），这里一共有四种分法。仔细观察这张表中的数据，我们发现，无论哪一种分法，都有一个共同的必然规律，即总有一个小朋友至少得到2支铅笔。这里，我们所感兴趣的就是这个规律，它体现在所有4种分法的任意一种分法之中。分法虽然是任意的，但是总有一个小朋友至少得到2支铅笔这一结论，却是必然的。这就是所谓在任意性之中，蕴含着必然性的规律。至于在这个问题中究竟是哪一个小朋友，是小红还是小兰至少得到2支铅笔，那不是我们所关心的问题。

表1.1

分法	人名	
	小红	小兰
Ⅰ	3	0
Ⅱ	2	1
Ⅲ	1	2
Ⅳ	0	3

与这个例子相类似的，我们在实际生活中，还可以举出更多的事例：

傍晚，一群鸽子飞回来进洞，假使有6只鸽子飞进5个洞里，那么不管怎样，必有一个洞里至少要飞进2只鸽子。

有10张扑克牌，要放在台子上指定的9个空位置上，那么无论怎样任意放法，必有一个位置上，至少有2张扑克牌重迭在一起。

某一集镇上，共设置了3只邮箱，现在有17封信要发出去，那么不管这17封信怎样投法，必有一只邮箱里至少要投进6封信。

有25只乒乓球，任意放进6只抽屉里，无论怎样放法，总有一只抽屉里至少要放进5只乒乓球。

有3种不同品种的苹果，被混杂在一只箩筐里，某顾客要买其中任意相同品种的苹果3只，那个聪明的营业员想了一想，顺手到箩筐里拿了7只，一看，果然有3只同一品种的苹果，这位顾客拿了这3只苹果满意地走了。

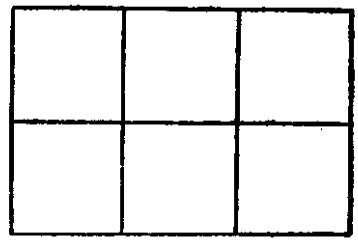
有21个男女运动员，排成3行7列的队形做操，那位教练员发现，无论怎样排法，一定可以从队形中，划出一个矩形来，站在这个矩形的四个角上的运动员或者都是男的，或者都是女的。教练员感到奇怪，但是无法解释这一现象，这就成了教练员心中的一个不解之谜。

这类例子在实际生活中可以举出很多很多。不过，这些问题中的“共同的必然规律”是怎样发现出来的呢？你怎么知道，在“不管怎样”、“任意放进”等等条件之下，会出现“必有”、“至少”这些明确的结论来呢？当然，这些结论，除了最后一个问题暂时还不易解决之外，其余各个问题的结论，想想是对的，但说说吧，道理又说不大清楚，是不是每一个问题都要象小朋友分铅笔那样，把各种分法都穷举出来才能证实呢？在下一节中，将回答这个问题。

习 题 一

1．将4支铅笔分给3个小朋友，试用列表法分析15种情况，从而证明不管怎样分法至少有一个小朋友分得2支铅笔．

2．将任意6个整数填入6个小方格，（如图1．1所示）试分析各种情况，从而证明：一定存在一个矩形，使其4只角上的4个数字之和为一个偶数．



（图1.1）

二、穷举法与反证法

在上一节中，已经用穷举法证明了2个小朋友分3支铅笔时，无论哪一种分法，都有一个共同的必然规律：总有一个小朋友至少可以分得2支铅笔．在这个问题中，用穷举法来证明还不算太复杂．因为我们所考虑的分法，一共只有4种情况．当考察了这4种分法的每一种情况之后，自然就得出了上述那个结论了．

于是，我们就设想，能否也用穷举法来证明第一节中的其他几个问题呢？我们不妨尝试一番．但是，在使用穷举法的时候，有一点必须强调指出，就是要把每一种可能发生的情况都要考虑进去，不能漏掉．否则，恰恰在你漏掉的情形中结论有可能不再成立．这方面，历史的借鉴是重要的，我们可以举出历史上的一些例子，有不少人因考虑问题不周，而主观地、片面地、武断地下结论，往往导致结论性的错误．

例如，有人发现，在多项式

$$n^2-n+17$$

中，当用$n=1$，2，3，4，5代入时，计算结果，都是质数（见表2・1）。

表2.1

n	1	2	3	4	5
n^2-n+17	17	19	23	29	37

于是，就武断地下结论，多项式n^2-n+17对任意自然数n，都是质数。事实上，这个结论是错误的。因为，当$n=17$时，上述多项式已不再是质数了。

又例如，有人发现把1，2，3，4 这四个数，任意分成两组时，有以下的性质（见表2・2），根据表2中列举的情况，那个人便沾沾自喜地作出结论："把1，2，3，4这四个数任意分成两组，总有一个数是它同组的两个数的和，或是它同组中另一个数的两倍"。事实上，这个结论也是错误的。

表2.2

分法	A组	B组	性　　质
Ⅰ	1	2，3，4	B组中4为2的两倍
Ⅱ	2	1，3，4	B组中4等于1+3
Ⅲ	1，2	3，4	A组中2为1的两倍
Ⅳ	4	1，2，3	B组中3等于1+2
Ⅴ	2，4	1，3	A组中4为2的两倍

因为，如果按照下面的方式分成两组：

A组：1，4；　　B组：2，3。

那么结论已不再成立。

以上这两个人，所犯错误的原因是一样的，都是考虑情况不够全面。所以，我们在使用穷举法时，千万要当心，必

须把各种情况都归纳考虑进去。

现在，我们如果试图用穷举法来讨论第一节中的几个问题，立刻就会发觉，情况之复杂所带来的困难是巨大的。我们在上一节的习题1中，已经看到，把4支铅笔分给3个小朋友时，已经需要考虑15种分法，比2个小朋友分3支铅笔复杂得多了。如果4个小朋友分5支铅笔，就得考虑56种情况的分法，问题就更为复杂了。对于第一节中其他几个问题，只要指出一下各种情况的分法的总的数字，就足以说明问题的复杂性和困难性。

鸽子进洞这个问题，需要考虑210种情况；在邮箱这个问题上，需要考虑171种情况；在扑克牌这个问题上，需要考虑43758种情况；…等等。读者们会问：象“210”、“171”、“43758”等等这些数字哪里来的呢？为此，以鸽子进洞为例来说明.6只鸽子进5个洞，我们假设第一个洞里飞进a_1只鸽子，第二个洞里飞进a_2只鸽子，…，第五个洞里飞进a_5只鸽子，那么

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=6. \tag{1}$$

其中 $0\leqslant a_i\leqslant 6$ $(i=1,2,\cdots,5)$. 现在要求鸽子进洞的各种情况数，就相当于不定方程（1）的非负整数解的组数，它就等于$(1-x)^{-5}$展开式中x^6的系数

$$(-1)^6\cdot\frac{(-5)\cdot(-5-1)(-5-2)(-5-3)(-5-4)(-5-5)}{6!}=$$

$$=\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6!}=210.$$

一般地，若有m件东西，要把它分成n个组，就相当于解不定方程

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=m.$$

其中$0\leqslant a_i\leqslant m$。($i=1, 2, \cdots, n$)。这个不定方程的非负整数解的组数就等于展开式

$$\frac{1}{(1-x)^n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)}{m!}x^m+\cdots \text{中} x^m \text{的系数}$$

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)}{m!}.$$

关于这方面的问题，有兴趣的读者可参看华罗庚《数论导引》第八章§2“整数分拆”。

总之，可以看到，由于铅笔的分法，鸽子的进洞法，扑克牌的放法，信件的投法，苹果的拿法，乒乓球的放法，男女运动员的排法等等的任意性和多样性，就带来了问题本身的复杂性。而我们的任务，恰恰是要在这种任意性、多样性和复杂性的现象中，来寻找“共同的必然规律”。为了寻找这个规律，当然最容易想到的就是穷举法，也就是把所有可能出现的情况都罗列出来，逐一加以验证的方法。用这种方法，有时也能解决一些问题，在第一节中，我们确实用穷举法证明了小朋友分铅笔的问题中所存在的“共同的必然规律”。但是，我们又看到了数目稍微大一点，使用穷举法将会遇到很大困难，这不仅常常会因为漏掉情况而招致错误，而且会浪费我们宝贵的时间和精力。

穷举法既然不理想，那么是否有其他办法可想呢？我们不妨试试看，用反证法来证明6只鸽子飞进5个洞里，至少有一个洞里至少飞进2只鸽子。

事实上，假定这个结论不成立，那么，每一个洞里所飞进的鸽子数至多是1只，于是5个洞里的鸽子总数至多有5只，

这与假定有6只鸽子飞进洞里相矛盾，所以至少有一个洞里至少有2只鸽子。

这样看来，在这个问题中，反证法确实比穷举法优越得多。用反证法就避免了对210种情况的一一讨论，而且一下子就证明出来了。

又例如，我们可以用反证法来证明25只乒乓球任意放进6只抽屉里，至少有一只抽屉里至少要被放进5只乒乓球。

事实上，假定这个结论不成立，那么每一只抽屉里所放的乒乓球至多为4只，于是6只抽屉里所放乒乓球的总数，至多是24只，这与假定一共有25只乒乓球相矛盾。所以至少有一只抽屉里至少要放进5只乒乓球。

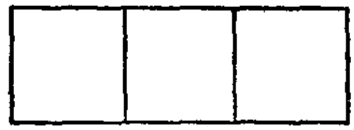
这样看来，似乎使用反证法，一切问题都解决了。但事实不是这样，如果用反证法来证明男女运动员的排队问题，就会碰到困难。事实上，倘使用反证法，假定我们的结论不成立，也就是说，假定不管男女运动员怎样排法，总归找不出一只矩形，使得站在这只矩形的四个角上的运动员，或者都是男的，或者都是女的。那么就很难找出与假定条件有明显矛盾的结论来。所以，要解决这样的问题，不是简单地使用反证法就能解决得了的。

我们不禁要问，究竟有没有办法把这个运动员排队的问题加以解决呢？也就是说，究竟有没有办法去解开教练员心中的那个不解之谜呢？这就不得不迫使我们去寻求更锐利的解题方法，这就是下一节中所要讲的内容。

习　题　二

1．试用穷举法证明：把1，2，3，4，5这五个数任意分成两组，总有一个数是它同组的两个数的和或是它同组的一个数的两倍。

2．有一个小朋友，用红蓝铅笔在三个并排着的小方格（见图2．1）里写字．试用穷举法和反证法分别证明至少有两个小方格是用一种颜色的笔来写的。



（图2·1）

3．试用反证法，证明第一节中的扑克牌的重迭问题、邮箱问题以及营业员拿苹果问题。

4．试用反证法来证明第一节习题一中的第2题。

三、抽 屉 原 则 I

在上一节的末尾，我们已经提出了一个任务，就是为了要寻求象男女运动员站队问题中存在的必然规律，必须要有更锐利的解题方法。事实上，通过第一节的几个实际例子的分析，并由第二节反证法的论证，可以从中总结出这样一些规律：

1．把$n+1$个东西分成n个组，那么至少有一个组里至少含有2个东西。

例如，象第一节中的小朋友分铅笔问题，鸽子进洞问题，扑克牌重迭问题，都是属于这个规律的。

现在我们来证明这个规律：假设把$n+1$个东西分成n个组，这n个组记作

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n;$$

又用　　$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$

表示这n个组里相应所含东西的个数．现在我们的目的就是要证明至少有一个$a_i \geqslant 2$。用反证法，假设结论不成立，也就是说，假使对于每一个a_i总有$a_i<2$，则$a_i \leqslant 1$，于是其总数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \leqslant 1+1+\cdots+1=n.$$

这与假定东西总数是$n+1$相矛盾。所以至少有一个 $a_i \geqslant 2$。

2．把$m(m \geqslant 1)$个东西分成n个组，当n除不尽m的时候，也就是说，当

$$m = nq + r \qquad (0 < r < n)$$

时，那么至少有一个组里至少含有$q+1$个东西。

例如象第一节中邮箱问题、乒乓球问题都是属于这个规律的。

我们也可以证明如下：仍用1中的记号。现在的目的是要证明至少有一个$a_i \geqslant q+1$。用反证法，假使结论不成立，也就是说，假使对于每一个a_i，总有$a_i < q+1$，那么$a_i \leqslant q$，于是，其总数是

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant q + q + \cdots + q = nq.$$

这与假设东西总数为$m = nq + r > nq$相矛盾，所以至少有一个$a_i \geqslant q+1$。

对于这两个规律，我们作以下几点说明：

（1）规律1是规律2的特例。事实上，当规律2中$m = n+1$时，它就变为规律1了。所以今后只提规律2就行了。

（2）规律2中商数q满足不等式

$$q < \frac{m}{n} < q+1.$$

事实上 $\qquad \dfrac{m}{n} = q + \dfrac{r}{n}.$

注意到 $\qquad 0 < r < n,$

即 $\qquad 0 < \dfrac{r}{n} < 1.$

所以 $$q<q+\frac{r}{n}<q+1,$$

由此得出 $$q<\frac{m}{n}<q+1.$$

这个不等式用语言来叙述，那就是，q是不超过$\frac{m}{n}$的最大整数，并用符号$[\frac{m}{n}]$来表示．并且按照规定，即使当n除尽m的时候，也就是说，当$r=0$的时候，我们仍然用$[\frac{m}{n}]$代表其中的商q。这样，q适合

$$q\leqslant\frac{m}{n}<q+1.$$

（3）规律2可以改述为：把$m(m\geqslant1)$个东西分成n个组，当n除不尽m的时候，那么至少有一个组里至少含有$[\frac{m}{n}]+1$个东西。

（4）读者可以证明：把$m(m\geqslant1)$个东西分成n个组，当n除尽m的时候，那么至少有一个组里至少含有$[\frac{m}{n}]=\frac{m}{n}$个东西．

（5）上述规律所以具有普遍性，就在于可以把规律中的“东西”和“组”作多方面的理解。例如可以把“东西”理解为象第一节中的铅笔、鸽子、扑克牌、信件、苹果、乒乓球等，而把“组”可以理解为象第一节中的小朋友、鸽子洞、桌上指定的空位置、邮箱、品种、抽屉等．

为了统一起见，我们把铅笔、鸽子、扑克牌、信件、苹果、乒乓球等一律称为“东西”，而把小朋友、鸽子洞、桌上指定的空位置、邮箱、品种等一律称为“抽屉”。同时将