大学基础数学自学丛书

多元函数微积分

方 企 勤

上海科学技术出版社

大学基础数学自学丛书
多元函数微积分
方企勤
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　上海新华印刷厂印刷
开本787×1092 1/32　印张12.75　字数282,000
1980年8月第1版　1980年8月第1次印刷
印数 1—18,000
书号：13119·842　定价：（科四）1.20元

序　言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养，基础在教育。然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期新长征的需要。所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们负责主编，由北京大学和北京师范大学数学系有关教师执笔编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本。文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么“诀窍”，如果有的话，那就是“多思考，多练习，熟能生巧”。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　赵慈庚

于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼

1980年1月

编者的话

本书共分三章，第一章讲述多元函数微分学，第二、三章讲述多元函数积分学与场论。在讲法上，尽量以几何图象和物理现象为依据，力图做到直观易懂，揭示概念的实质，而不过分追求逻辑上的严格性．例如微分和旋度概念就是在这一思想指导下，采用了与传统书上不同的讲法．在内容的选取上，力图做到多而不杂，能为进一步学习普通物理、复变函数、概率论、数理方程等课程提供必要的基础知识．另外，考虑到多元微积分现代化的趋势，使读者对这方面有所了解，我们用一节的篇幅介绍了向量外积及外微分形式这两个内容的大概．

在编写过程中，考虑到读者自学的方便，书中配有大量例题，通过例题进一步说明概念及做题的方法、技巧．在各章中都设置了一定数量的习题，并在书末附有它们的绝大部分答案，供读者自我核对参考．

本书编写过程中，得到了吴良大、姚孟臣、张清允等同志的帮助，特此表示感谢．

由于作者水平有限，加之编写时间仓促，书中不免有些错误和缺点，恳切希望读者批评指正．

方企勤 1979 年 5 月
于北京大学数学力学系

目　录

序

编者的话

第一章　多元函数的微分学

第二章 重 积 分

第三章　曲线、曲面积分和场论

第一章

多元函数的微分学

读者学了一元函数微积分以后，一定会感到微积分并不神秘；相反，微积分中的许多主要概念都是有很强的实际背景的．例如，人们为了求质点的瞬时速度和曲线的切线，才引进导数与微分的概念．虽然导出概念时，经过人们抽象思维的加工，设想出了“极限”这一无限过程，但这也是人们在做了大量近似计算的基础上，逐渐地产生出来的一种想法，即：从无限变化的趋势中，确定出有限的极限值，也就是从近似值的变化趋势中，确定出要求的准确值．

同样，读者也一定会感到微积分并不抽象；相反，它的应用非常广泛，非常有效．例如，初等数学中需要运用很高技巧才能解决的极值问题，用了微分方法就可轻而易举地获得解决．而且微积分给求极值、求面积和体积等问题提供了一种既简便易行、又十分有效的方法，解决了初等数学所无法解决的问题．微积分在它问世初期，其威力曾使人们感到惊异；在当代，微积分仍是一个有力的数学工具．

但是，如果我们的学习只停留在一元微积分阶段是很不够的，因为真正的实际问题是相当复杂的，所含的变量不止两个，而是有好多个；诸变量之间的函数关系也不止一个，也是有好几个．这就需要涉及到多个自变量的函数．如厂房设计时，当厂房的结构和强度要求已确定的情况下，怎样选取柱和梁的尺寸，使所用的材料最省呢？多配钢筋，固然可以保证柱和梁的强度要求，但这不符合少花钱多办事的精神；钢筋配得

过少，只要其中一根柱和梁的强度不合要求，厂房就有倒塌的危险．怎样做到既符合强度要求，又使材料最省呢？在进行这个具体问题的分析时，厂房的每一根柱和梁，或每一组柱和梁，它们断面的两个尺寸都看成是自变量．这样，对一般中型的厂房来说，就有几十个自变量．我们的问题，就是要求出所用材料与所有柱和梁断面尺寸的函数关系，以及每一根柱和梁的强度与所有柱和梁断面尺寸的函数关系；然后在后者的强度被得到满足的条件下求出前者的材料函数的最小值；同时也要求达到这个极小值时各柱、梁的具体断面尺寸，从而作为设计的依据．象这类最优化问题在实践中到处都会遇到，所以，必须研究了多个变量函数的微分与积分才能使微积分成为解决实际问题的得力工具．

本章在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用．讨论时以二元函数为主，因为由一元函数进入到二元函数时会产生一些质的不同．如一元函数中有单调的概念，二元函数就没有简单的相仿概念，所以一元函数的内容有些不能推广到多元函数，有些虽然可以推广到多元函数，这时也会出现一些与一元函数不同的新问题．但从二元、三元函数到自变量个数较多的函数时就没有什么本质上的不同，其困难主要是由于自变量个数增加引起的，这些困难已不属于分析性质的，而是属于代数和几何性质的．因此，只要有了处理二元、三元函数的分析概念和方法，再配合一些其它的代数和几何知识，也就不难掌握多元函数理论的各种近代应用了．

第一节　多元函数的概念

1.1 区域

为了讨论二元函数的定义域，我们先介绍平面区域的概念. 在讲一元函数时，我们称满足不等式 $a<x<b$ 的点 x 的全体为开区间，称满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的点 x 的全体为闭区间，相应地在平面上有开区域和闭区域的概念. 相应于直线上的半开半闭区间，我们也可以讲平面上的非开非闭区域，但由于这种情况很少遇到(除非是人为地去定义出这样一些点集)，我们就不讨论它. 下面我们只讨论开区域和闭区域.

把满足不等式 $x^2+y^2<R^2$ (注意，这里是严格"小于")的点 (x,y) 的全体记作 D，显然 D 是平面上与原点的距离小于 R 的点 (x, y) 的全体，即是以原点为圆心以 R 为半径的开圆(图 1-1)，因 D 不含有边界点，所以 D 是一个开区域. 若 D 表示满足不等式 $x^2+y^2\leqslant R^2$ (注意，这里是"小于或等于"号)的点 (x, y) 的全体，则 D 是以原点为圆心以 R 为半径的闭圆(图 1-2)，因 D 含有全部边界点，所以它是一个闭区域.

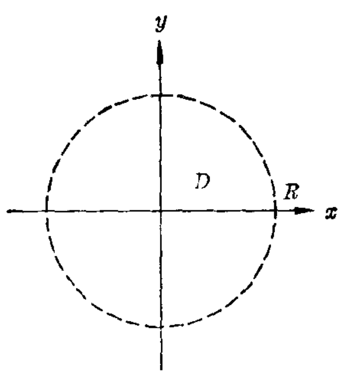

图 1-1

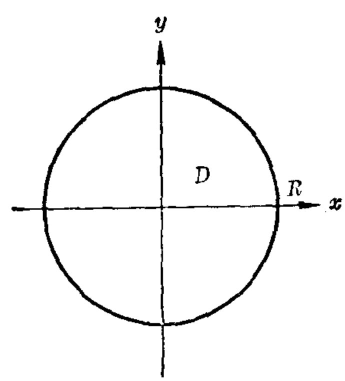

图 1-2

若 D 表示同时满足不等式 $a<x<b$ 和 $c<y<d$ 的点 (x, y) 的全体，则 D 是一个开矩形(图 1-3)，它不含有一个边界点，所以是开区域. 若 D 表示同时满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 和 $c\leqslant y\leqslant d$ 的点 (x, y) 的全体，则 D 是一个闭矩形(图 1-4)，它包含全部边界点，所以是闭区域.

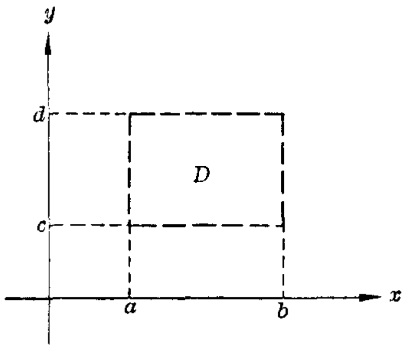

图 1-3

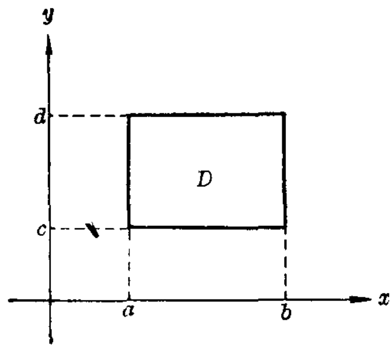

图 1-4

如 D 表示同时满足不等式 $0<x<1$ 和 $0<y<x$ 的点 (x, y) 的全体，要弄清 D 表示的是什么区域，我们先分别考察每一个不等式表示的是什么区域. 第一个不等式 $0<x<1$，表示的是介于直线 $x=0$ 和 $x=1$ 之间的一条开带子（图 1-5）；第二个不等式 $0<y<x$，表示的是介于直线 $y=0$ 和 $y=x$ 之间的一个开角(图 1-6)，作为它们的公共部分 D，就是一个开的三角形(图 1-7)，因它不含边界点，所以是开区域.

若 D 表示同时满足不等式 $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x$ 的点的全体，则它是一个闭的三角形（图 1-8），因它含有全部边界点，所以是闭区域.

若 D 表示同时满足不等式 $0<x<1$ 和 $0<y<1-x$ 的点 (x, y) 的全体，如上面一样讨论，可知它是一个开区域（图 1-9），若 D 表示满足不等式 $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ 的点 (x, y)

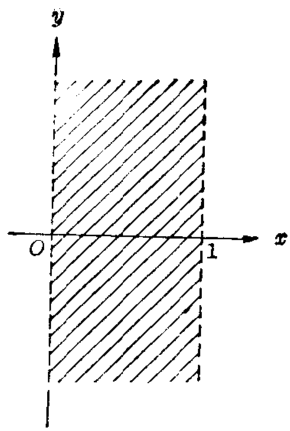

图 1-5

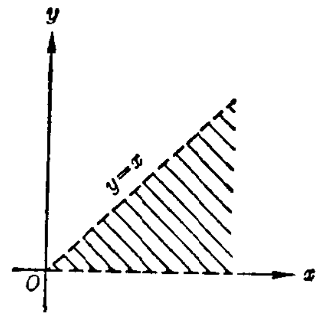

图 1-6

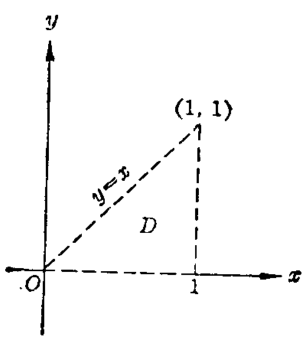

图 1-7

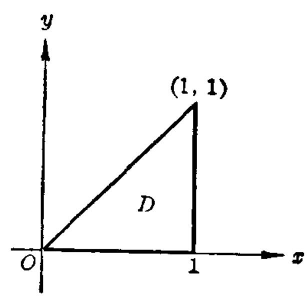

图 1-8

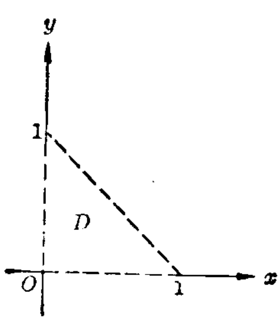

图 1-9

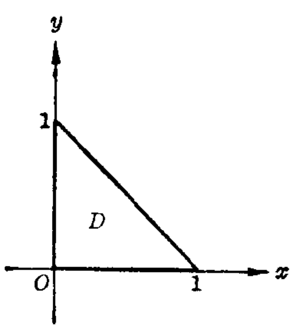

图 1-10

的全体，则它是一个闭区域(图 1-10).

若 D 表示同时满足不等式 $x>0$, $y>0$, $x+y<1$ 的点 (x, y) 的全体，第一个不等式表示的是右半开平面，第二个不等式表示的是上半开平面，第三个不等式 $x+y<1$ 即 $y<1-x$, 表示的是直线 $y=1-x$ 以下的半开平面(图 1-11)，作为三者的公共部分 D, 仍是图 1-9 中所表示的开区域. 同理 D: 同时满足 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$ 的点集表示的是图 1-10 中所表示的闭区域.

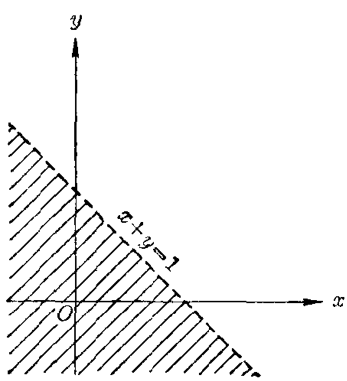

图 1-11

可见，平面上的开区域和闭区域要比直线上的开区间和闭区间复杂得多，它可以有各种各样的形状，而且同一个区域可以有几种表示式. 我们仅举了几个很特殊的区域，还可以举出许许多多开区域和闭区域的例子，如 D: $x^2+y^2<+\infty$, 这时 D 是全平面，因全平面没有边界点，我们可以说 D 包含了全部边界点，也可以说 D 不含边界点，所以 D 既是闭区域也是开区域，这是唯一具有两重性的区域，此外再也找不出一个平面区域，它既是闭区域又是开区域. 又如 D: 满足 $0<x^2+y^2<+\infty$ 的点集，它表示除去原点的平面，因原点是 D 的边界点不属于 D, 所以 D 是开区域.

以后我们把开区域简称为区域，闭区域理解成区域加上它的全部边界. 由上面区域的例子可以看出，一个区域 D 具有下面两个特性：第一，若 A 点属于区域 D, 则总可以取充分小的正数 $\delta>0$ 为半径，以 A 为圆心作一开圆，使此开圆全部属于 D; 第二，若 A, B 是区域 D 内任意两点，则总可以作一

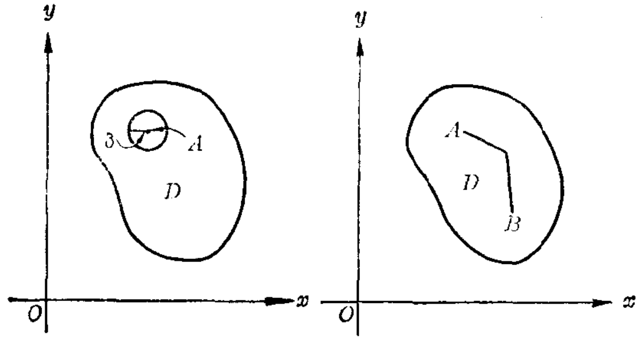

图 1-12

位于区域 D 内的折线联接 A, B 两点(见图 1-12).

从理论上来说，我们把这两个性质作为区域的定义，也就是说，凡平面点集 D 满足上述两条性质，则称 D 是区域. 满足第一条性质，说明集合 D 没有边界点；满足第二条性质，说明集合 D 是连通的. 若把 D 以外部分看成海洋，D 是海洋中的岛屿，则 D 只是一个岛屿，不是群岛.

习　题　一

1. 下面集合 D 是区域还是闭区域？并画出 D 的图形.

   1) D: $x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<R^2$; 开

   2) D: $y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant R^2$; 闭

   3) D: $a^2<x^2+y^2<b^2$; 开

   4) D: $x^2<y<\sqrt{x}$; 开

   5) D: $x^2\leqslant y\leqslant 1$; 闭

   6) D: $x^2+x<y<x+1$; 开

   7) D: $x^2+4y^2<1$; 开

   8) D: $x^2-y^2>1$. 非开非闭

2. 设 D_1, D_2 是平面区域，D 表示它们的公共部分，记作

$$D=D_1\cap D_2,$$

   问 D 是否为一区域？

3. 若 D 中任意两点的联线也属于 D，则称 D 是凸区域.

设 D_1, D_2 是平面凸区域,证明:

$$D=D_1\cap D_2$$

也是凸区域.

4. 问下列区域是否为凸区域.

   1) D: $x>0$, $y>0$, $x^2+y^2<1$;

   2) D: $1<x^2+y^2<4$;

   3) D: $x^2<y<1$;

   4) D: $x^2-y^2<1$;

1.2 函数的定义

我们先回顾一下一元函数的定义. 当变量 x 在其变化范围内取定一个值以后,总有唯一的 y 值与其对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数. 关于这个定义我们要指出两点: 第一,“有唯一的 y 值与其对应”中的唯一两字,表示我们所定义的函数是单值函数,对于每一个 x 值,只有一个 y 的值与其对应. 但这决不能把它与“一一对应”混淆起来, 因一一对应是指不同的 x, 有不同的 y 值与其对应, 如在 $x\in(-\infty, +\infty)$ 时 $y\equiv 1$ 是单值函数, 但不是一一对应的函数. 第二,“有唯一的 y 值与其对应”中的对应两字,是函数定义的核心. 通常以为有了公式才有函数,这是一种错觉,说到底都是有了对应关系才有函数. 如考察单位圆内圆心角与其所张的弦长有确定的对应关系, 当圆心角一定时, 其所张的弦之长也随之而定, 我们就把圆心角的一半 (x) 与其所张弦长的一半 (y) 之间的对应关系,用符号记为 sin, 这样就产生了一个公式 $y=\sin x$, 当这个公式使用千万次以后,就会有一种本末倒置的错觉,似乎先有公式后才有正弦函数. 事实上把正弦函数扩充到任意角, 也是先规定单位圆上转动半径与水平轴的夹角 (x) 与转动半径端点纵坐标(y)之间的对应关系, 这个对应关系仍用记号 sin