数学基础知识丛书

圆

赵遂之等

江苏人民出版社

圆

赵遂之等

江苏人民出版社

圆

赵遂之 等

*

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
南通县印刷厂印刷
1980年4月第1版
1980年4月第1次印刷
印 数：1—90,000册
书号：13100·043 定价：0.57元

内　容　提　要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》(试行草案)精神编写，内容上作了拓宽、加深提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书共分七个部分，第一至第五部分系统地讲述有关圆的基础知识，并介绍了连续原理，对偶原理和膨胀原理；第六和第七部分讲述圆的调和性及配极变换、反演变换等。

本书由赵遂之、郭彦、范惠民、鲁有专同志编写，最后赵遂之同志修改定稿。

目　　录

一、圆的一般性质

在初等平面几何中，除了研究直线形之外，只研究一种曲线，就是圆。因为圆的性质比较简单，应用非常广泛，所以需要仔细研究。

§1 圆的定义

二千四百年以前，我国的墨翟在他所著的《墨子》中说："圜，一中同长也"。"圜"，就是"圆"的古体。这句话给圆下了精确的定义。用现代的数学术语来说，就是"（在平面内）与一个定点的距离等于定长的点的集合叫做圆"。我国古代人民很早就对圆有了深刻的认识，这是值得我们引以自豪的。

联结圆心和圆周上任意一点的线段叫做半径，圆周上的这一点叫做半径的端点。联结圆周上任意两点的线段叫做弦，从圆心到弦的距离叫做弦心距；过圆心的弦叫做直径。圆周上任意两点之间的部分叫做弧；直径将圆分为两部分，每一部分叫做半圆，小于半圆的弧叫做劣弧，大于半圆的弧叫做优弧。两条半径所夹的角叫做圆心角。圆心相同的圆叫做同心圆，半径相等的圆叫做等圆。

如果一个圆的圆心是O，半径是r，就记作$\odot O(r)$，如不致发生误会，也可以简记为$\odot O$。经过A、B、C三点的圆，记作$\odot ABC$。

由定义可知：同圆的半径相等；同圆的直径相等。

§2 圆是什么样的曲线

在这里，我们先简单地介绍一下圆的一些性质，在以后各节中，再作较深入的研究。

（1）圆是封闭曲线　所谓封闭曲线，就是说，如果一点沿着这曲线前进，以后必将回到原处。除圆之外，椭圆，以及三角形、四边形都是封闭曲线；而抛物线、双曲线就不是封闭曲线。封闭曲线必定将整个平面内的点分为内外二部。

（2）圆是凸曲线　所谓凸曲线，就是说：在这曲线内部任取两点，联接这两点所得的线段必不与这曲线相交，这样的曲线叫做凸曲线。椭圆、抛物线、三角形都是凸曲线；而心脏形线（$\rho=a(1+\cos\theta)$，见图1—1）就不是凸曲线。

（3）圆是简单曲线　所谓简单曲线，就是说：这个曲

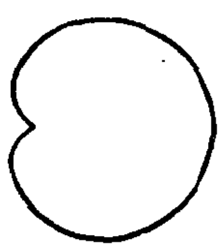


图1—1

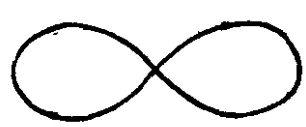


图1—2

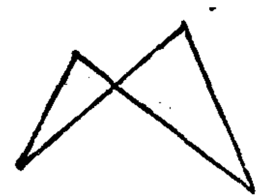


图1—3

线不与自身相交。椭圆、三角形等，都是简单曲线；而双纽线（$\rho^2=a^2\cos 2\theta$，见图1—2）和旋扭四边形（图1—3），就不是简单曲线。

（4）圆是有常宽的曲线　所谓常宽，就是说，它的宽度是一个常数。讲过直线与圆相切的定义以后，就可以知道：如果两条平行线和一个圆相切，那么这两条平行线之间的距离等于圆的直径，这是一个常数。因此，在搬运重物时，

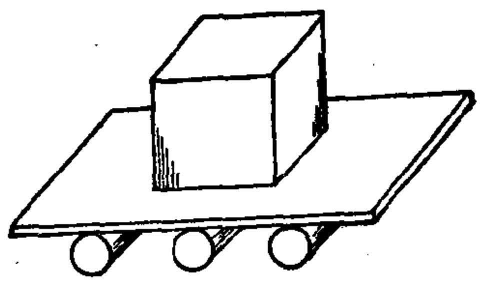


图 1—4

可以将重物放在一块平板上，而将平板放在几根同样粗细的圆柱上，这样，就可以将重物很轻便地推着走(图1—4)。

宽度等于常数的曲线不止一种。设$\triangle ABC$是边长为a的正三角形，以各顶点为圆心，以a为半径在对边之外作弧，那么，所得曲边三角形(图1—5a)也是一种有常宽的曲线。如果以正五边形各顶点为圆心，以它的对角线为半径在对边之外作弧，那么所得曲边五角形(图1—5b)也是一个有常宽的曲线，宽度等于对角线之长。又如，将边长为a的正$\triangle ABC$各边分别向两端延长，使延长部分等于b，然后以各顶点为

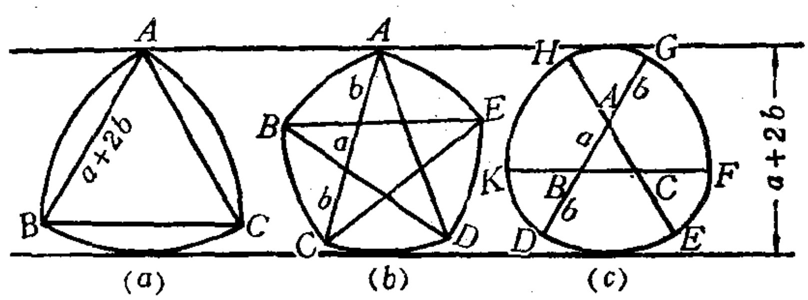


图 1—5

圆心，以$a+b$为半径作弧$\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{FG}$、$\overset{\frown}{HK}$；再以各顶点为圆心，以b为半径作弧$\overset{\frown}{KD}$、$\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{GH}$(图1—5c)，那么，所得曲线形$DEFGHK$也是有常宽的曲线，宽度为$a+2b$。

这里有一个定理，就是：“如果两个有常宽的曲线的宽度相等，那么这两个曲线的周长也相等。”这个定理的证明超出了本书的范围，建议读者选几个特殊的情况(例如图1—5各例)加以验证。

（5）圆是有常曲率的曲线　所谓曲率，说得浅显一些，就是弯曲的程度（严格的定义可参阅任何一本微积分学）。以抛物线为例，在它的顶点邻近，弯曲得最厉害，也就是曲率最大。离顶点越远，抛物线就越“直”，也就是曲率愈来愈小。但圆的曲率是处处相同的。必须指出：在一切平面曲线中，曲率等于常数的只有圆（如果不计及直线的话），没有第二种。

由于这个性质，圆可以绕着圆心旋转任意一个角度而和它原来的位置重合。或者说：圆有旋转对称的性质，并且旋转角有无穷之多（如果旋转角恰为180°，就是中心对称）。同时，圆又可以绕着它的任何一条直径将所在平面翻转180°而和它原来的位置重合，或者说：圆有轴对称的性质，并且对称轴有无穷之多。这两种性质不但在证题时有用，在生产实践上的作用尤为宏大。很多轮子要做成圆形，以保证运转平稳；锅炉管道要做成圆形，以保证受热受压均匀；还有很多工件也要做成圆形，使加工简单，安装方便。

由此可知，除圆外，任何曲线不能用圆规来画。用圆规画椭圆只是为制图方便而制定的一种规约，连近似也谈不上。

（6）圆是极小曲线　所谓极小曲线，就是说：在具有相同面积的一切封闭曲线中，周长极小的曲线只有圆。这个定理的严格证明，超出了本书的范围。

§3　圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系

根据圆的旋转对称性质，很容易证明下面一些性质：

1．圆心角、弧、弦、弦心距之间的相等关系

定理1·1　在同圆（或等圆）中，如果圆心角相等，那

么所对的弧也相等；倒过来，如果弧相等，那么所对的圆心角也相等。

定理1·2　在同圆(或等圆)中，如果弧相等，那么所对的弦也相等；倒过来，如果弦相等，那么所对的劣弧也相等(事实上，弦相等则所对的优弧也相等，不过劣弧应用较多，所以一般只提劣弧)。

定理1·3　在同圆(或等圆)中，如果弦相等，那么弦心距也相等；倒过来，如果弦心距相等，那么弦也相等。

为了节省篇幅，将这三个定理合并证明如下：*

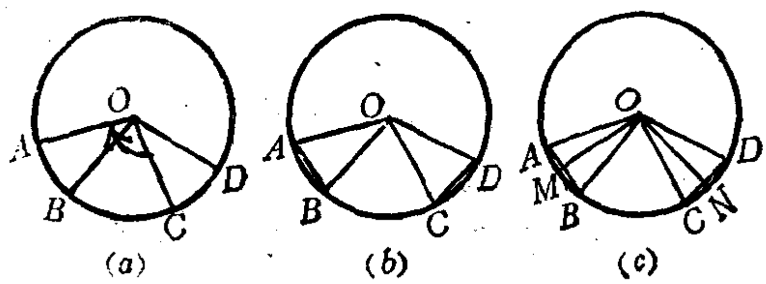


图　1—6

在图1—6中，设O是圆心，OA、OB、OC、OD是半径，并且$\angle AOB=\angle COD$。将$\odot O$绕O点旋转，使OC转到OA原来的位置上，那么，因$\angle AOB=\angle COD$，所以OD必然转到OB原来的位置上，因此，$\overset{\frown}{CD}$就转到$\overset{\frown}{AB}$原来的位置上。立刻可以看出：$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，弦$AB$=弦$CD$。并且，从圆心$O$到弦$AB$的垂线只有一条，所以弦心距$ON$必然转到弦心距$OM$的位置上，因而$OM=ON$。

倒过来，如果$OM=ON$，将$\odot O$旋转，使ON转到OM

---

*为节省篇幅计，本书中的定理和例题，大都只写出分析或提示，至于完整的证明，请读者自行补足。

原来的位置上．由于过M而垂直于OM的垂线只有一条，所以CD必然转到AB原来的位置上，因而劣弧CD必然转到劣弧AB原来的位置上，由此立可推得$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，并且$\angle AOB=\angle COD$。

另一证法：在图1—6b和1—6c中，$\triangle AOB$和$\triangle COD$是有两组边对应相等的两个三角形($OA=OC$，$OB=OD$)。如果夹角相等，它们就全等；当然第三边相等，第三边上的高也相等。倒过来，在这两个有两组边对应相等的三角形中，如果第三边上的高OM和ON相等，也容易证明直角$\triangle OAM\cong$直角$\triangle OCN$，直角$\triangle OBM\cong$直角$\triangle ODN$，所以$AB=CD$、$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$和$\angle AOB=\angle COD$就不难证明了。

例 1　在图1—7中，AB和CD是两条互相平行且相等的弦，EF垂直于这两条弦，并分别与AB、CD相交于G、H，那么，$AG=CH$。

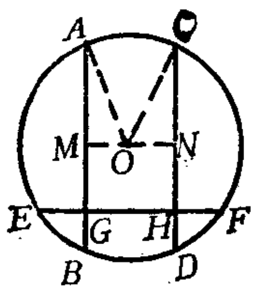


图 1—7

过O点作$MN\parallel EF$交AG、CH于M、N，因EF垂直于AB及CD，故$OM\perp AB$，$ON\perp CD$。并且$MG=NH$。联OA、OC，容易证明：$\triangle OAM\cong\triangle OCN$，所以$AM=CN$。这就可以证明$AG=CH$。问题就完全解决了。

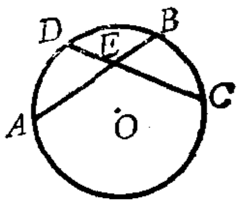
练　　习

1．$\odot O$的两条相等的弦AB和CD相交于圆内一点E，如图，那么$AE=CE$，$BE=DE$。

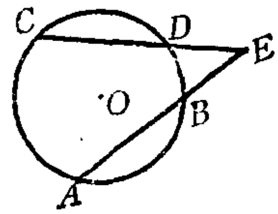
2。上题中的两条弦如果延长后相交于圆外，如图，能得到什么结论？为什么？

3．同圆（或等圆）中，如果$\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，如图，那么$AB<$

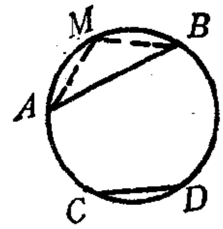
$2CD$.



练习 1



练习 2



练习 3

2．圆心角、弧、弦、弦心距之间的不等关系

定理1·4　在同圆(或等圆)中，如果圆心角不等，那么所对的弧也不等，圆心角大则所对的弧也大；倒过来，如果弧不等那么所对的圆心角也不等，弧大则所对的圆心角也大。

定理1·5　在同圆(或等圆)中，如果两条弧不等，那么所对的弦也不等，劣弧大则所对的弦也大；倒过来，弦大所对的劣弧也大(如果考虑优弧的话，那么优弧大则所对的弦反小；倒过来，弦大所对的优弧反小)

定理1·6　在同圆(或等圆)中，如果弦不等，那么弦心距也不等，弦大则弦心距反小；倒过来，如果弦心距不等，那么弦也不等，弦心距大则弦反小。

在图1—8中，设O是圆心，OA、OB、OC、OD是半径，

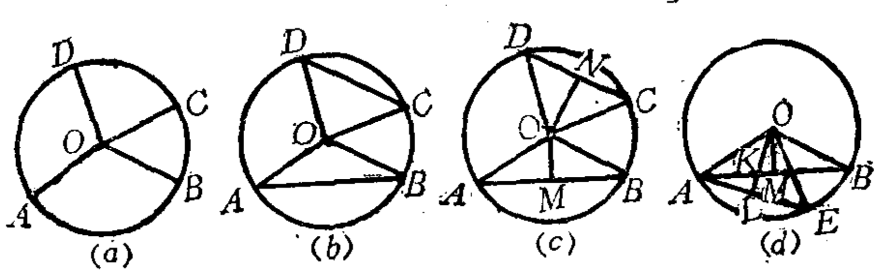


图 1—8

并且$\angle AOB>\angle COD$，将$\odot O$绕O点旋转，使OC转到OA原来的位置上。因$\angle AOB>\angle COD$，所以OD的位置OE必

然在AOB原来的位置的内部，E点在劣弧AB上，所以$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{AE}$，就是$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$。

其次，在图1—8d中，设CD转到AE的位置，容易看出，$\angle OEB=\angle OBE$.但$\angle AEB>\angle OEB$，$\angle ABE<\angle OBE$，所以$\angle AEB>\angle ABE$，因此$AB>AE$，就是$AB>CD$。

最后，设CD的弦心距ON转到OL的位置上，因E点在劣弧AB上，所以AE与O点在AB的两旁，因此OL必与AB交于某一点K。容易看出，$OL>OK$，但OM是AB的垂线，所以$OK>OM$，因此，$OL>OM$，就是$ON>OM$。

倒过来，如果$ON>OM$，那么CD不能大于AB，也不能等于AB，所以必然是$AB>CD$。其余部分可以同样地用反证法证明。

另一证法：在图1—8b中，$\triangle AOB$和$\triangle COD$是有两组边对应相等的两个三角形，如果夹角大，当然第三边也大。再将OM和ON分别延长一倍到F和E，联AF和CE（图1—9）。容易看出，$\triangle OAF$和$\triangle OCE$也是有两组边对应相等的两个三角形($OA=OC$，$AF=CE$)，而且$\angle OAF=180°-\angle AOB$，$\angle OCE=180°-\angle COD$，如果$\angle AOB>\angle COD$，必然有$\angle OAF<\angle OCE$。所以$OF<OE$，而$OF=2OM$，$OE=2ON$，因此$OM<ON$。倒过来，如果已知$OM<ON$，同样可以证明$AB>CD$和$\angle AOB>\angle COD$，定理就完全证明了。

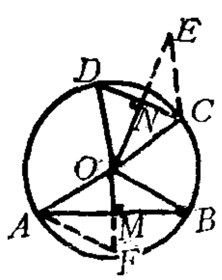


图 1—9

定理1·1至1·6可归纳如下：

设$\angle AOB$和$\angle COD$是$\odot O$的圆心角，$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{CD}$是劣弧，AB和CD是弦，OM和ON分别是AB和CD的弦心距，那么

$\angle AOB \gtreqless \angle COD \Longleftrightarrow \overset{\frown}{AB} \gtreqless \overset{\frown}{CD} \Longleftrightarrow AB \gtreqless CD \Longleftrightarrow OM \lesseqgtr ON$。

（$\Rightarrow$表示可以推得；$\Longleftrightarrow$表示可以互相推得）。

例2 在已知圆内过一个已知点的一切弦中，以过这点的直径为极大，以垂直于这直径的弦为极小。

设P是$\odot O$内的一个已知点，AB是过P点的直径，CD是过P点而垂直于AB的弦，EF是过P点而与AB、CD都不相同的任意弦（图1—10），在过P点的一切弦中，AB的弦心距等于0，所以AB是极大的（另一证法：联OE、OF，那么，$AB=OA+OB=OE+OF>EF$，就是AB大于过P点的任意弦EF，所以AB是极大的）。

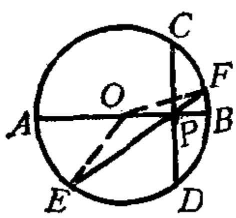


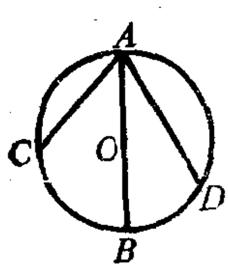
图1-10

其次，设OM是EF的弦心距，因OP不垂直于EF，所以$OP>OM$，因此$CD<EF$。这就证明了CD小于过P点的任意弦，所以CD是极小的。

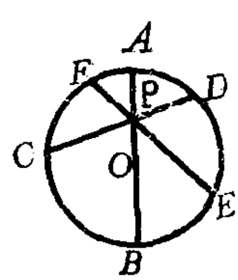
练　　习

1．AB是$\odot O$的直径，AC、AD是弦，如果$\angle CAB>\angle DAB$，那么$AC<AD$。

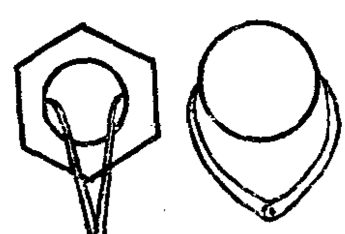
2．P是$\odot O$的直径AB上的一点，CD、EF是过P点的弦，如果$\angle CPB>\angle EPB$，那么$CD<EF$。



练习1



练习2


练习3

3．工厂中常用外径卡测量圆形工件的直径，又用内径卡测量工件圆孔的直径，试说明其原理。

§4 直径和弦之间的关系

定理1·7 如果一条直线过圆心并且垂直于一条弦，那么这条直线一定平分这条弦，并且平分这条弦所对的弧（包括优弧和劣弧）。逆命题都成立。

这个定理有两个前提和两个结论。将前提中的一个和结论中的一个交换，就得到一个逆定理。或将全部前提和全部结论交换，也得到一个逆定理。所以这个定理共有五个逆定理。因此这个定理可以采用下面的形式来叙述：

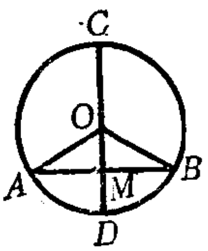


图1－11

如果一条直线符合下面四个条件中的两个条件，也一定符合另外两个条件（图1—11）：

（1）过圆心；

（2）垂直于弦；

（3）平分弦（直径除外）；

（4）平分弦所对的弧（包括优弧或劣弧）。

证明时只要以这条直线为轴，将圆形所在平面翻转180°就可以获得所求的结果。请读者自行补足。

另一证法：在图1—11中，$\triangle AOB$是等腰三角形，容易看出，上面这个定理的实质是和等腰三角形中四线合一（底边上的中线、底边的中垂线、底边上的高，顶角的平分线）的定理一样的。

从这个定理可知，圆心一定在弦的垂直平分线上，所以，如果A、B、C三点不在一直线上，那么AB的垂直平分线

和BC的垂直平分线必然相交于一点O，O点到A、B、C三点的距离相等，而且O点是唯一的，因此，过A、B、C三点的圆也是唯一的。由此可得下列定理。

定理 1·8　不在一直线上的三点确定一个圆。

例 3　$\odot O$与$\odot O'$相交于P和Q，过Q作$AB \parallel OO'$，交$\odot O$于A，交$\odot O'$于B，那么$AB=2OO'$（图1—12）。

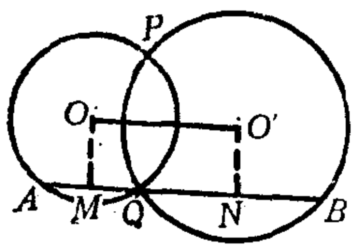
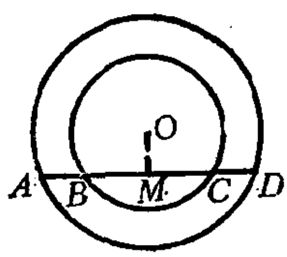


图　1—12

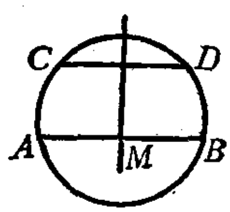
作OM和ON都垂直于AB，立刻可以看出，$AM=MQ=\frac{1}{2}AQ$，$BN=NQ=\frac{1}{2}BQ$，所以$MN=\frac{1}{2}AB$。同时，$MNO'O$又是矩形，因此问题不难解决。

练　　习

1．一条直线和两个同心圆顺次交于A、B、C、D四点，那么$AB=CD$。



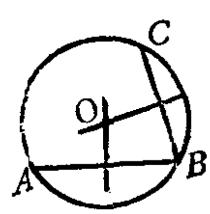
练习 1



练习 2

2．AB、CD是圆内的两条平行弦，那么AB的垂直平分线一定平分CD。

3．工厂中要找一个圆形的圆心时，常用三点定心法．就是在圆周上任意取三点A、B、C，联AB、BC，作AB和BC的垂直平分线相交于一点O，O点就是圆心，试说明其原理。



练习 3