实用工程数学

图论及其应用

戴一奇

水利电力出版社

实用工程数学

图论及其应用

戴一奇

水利电力出版社

实用工程数学
图论及其应用
戴一奇
*
水利电力出版社出版、发行
（北京三里河路6号）
各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷
*
850×1168毫米 32开本 8.25印张 214千字
1988年6月第一版 1988年6月北京第一次印刷
印数0001—4930册 定 价2.30元
ISBN 7-120-00327-5/O·3

内 容 提 要

本书讲述了图论的一些基本内容，并介绍了图论在电力工程中的应用。全书共分八章：1.图的基本概念；2.树；3.最佳道路问题；4.回路矩阵与割集矩阵；5.电路网络的基本方程；6.状态变量法；7.信号流图；8.网流理论与可靠性分析。

本书主要是为在校未曾系统学习过图论的在职工程技术人员而编写的。内容深入浅出，通俗易懂，并附有许多结合实际的例题，每章有习题，在书末附有习题答案，很便于读者自学。

本书可供从事电力工程、计算机、自动控制等专业的工程技术人员阅读，也可作为大专院校有关专业学生的学习参考书。

前　言

近年来，我国电力工业迅速发展，科学实验和工程实践不断提出新课题，要求我们采用新技术、新方法。因此，过去不用或用得很少的数学分支，诸如

（1）线性代数　（2）概率论　（3）数理统计

（4）图论

等，在电力科技书刊和文献上已有了广泛的应用。

我国五十年代和六十年代由大专院校毕业，多年来从事电业工作的工程技术人员，在校学习期间多数没有接触过上述数学内容。为了早日实现四个现代化，工程技术人员急需知识更新，迫切需要有一套通俗易懂、便于自学的实用工程数学方面的书籍。本书就是为了满足读者这一要求而编写的，本书也可作为有关专业在校学生的学习参考书。

本书的特点是：

（1）在力求保持数学体系的基础上，以实际工作需要为依据，尽可能精减其它内容。

（2）突出基本概念和基本定理，附有较多例题，并尽量结合工程实际。

（3）力求深入浅出，通俗易懂。

（4）每章均有习题并附有答案，便于读者自学解题。

本书编写过程中，自始至终得到清华大学卢开澄教授的热情指导和帮助，他审阅了全书，并提出许多宝贵意见。在此，作者对卢开澄教授表示衷心感谢！

限于水平，书中难免存在缺点错误，希望读者批评指正。

编　者

1987年6月

目　　录

第一章　图的基本概念

第一节　图的定义

一、什么是图

所谓“图论”，顾名思义是研究“图”的理论。图论中的“图”是由许多实际问题经过抽象而得到，用顶点和连接这些顶点之间的线段来构成的。它不同于人们所熟知的几何学中的各种几何图形，更不同于机械制图中的投影图和装配图以及电路理论中的电路图等等。不妨先举几个简单例子。

例 1　甲、乙、丙三地之间，甲到乙，乙到丙以及甲和丙之间有单向道路，试问从丙地出发能否到达乙地？

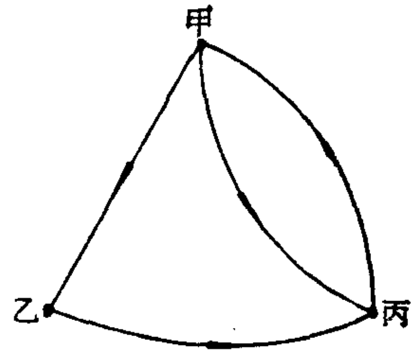


图 1.1

设甲乙丙地分别用三个顶点表示，它们之间的单向道路分别用相应的有向线段表示，就构成了图1.1。一目了然，由丙地经过甲地即可到达乙地。

例 2　哥尼斯堡桥问题。哥尼斯堡（现名加里宁格勒）是欧洲的一个城市，Pregel河把该城分为两部分，河中还有两个小岛。十八世纪时，河两岸及小岛之间共有七座桥，如图1.2(a)所示。当时人们提出这样一个问题：有没有办法从某处（比如A）出发，经过各桥一次且仅一次最后回到原地呢？最后，著名数学家欧拉在1736年巧妙地给出了这个问题的答案，并因此奠定了图论的基础。欧拉把A、B、C、D四块陆地分别收缩成4个顶点，把桥表示成连接对应顶点之间的边，于是图1.2(a)便转化为图1.2(b)，问题转化为从图1.2(b)中的任一点出发，能不能经过

各边一次且仅一次最后返回该点。这样，一个实际生活中的问题就转化成了一个典型的图论问题，这就是著名的欧拉回路问题．关于欧拉回路的存在性定理我们将在本章第六节中介绍。

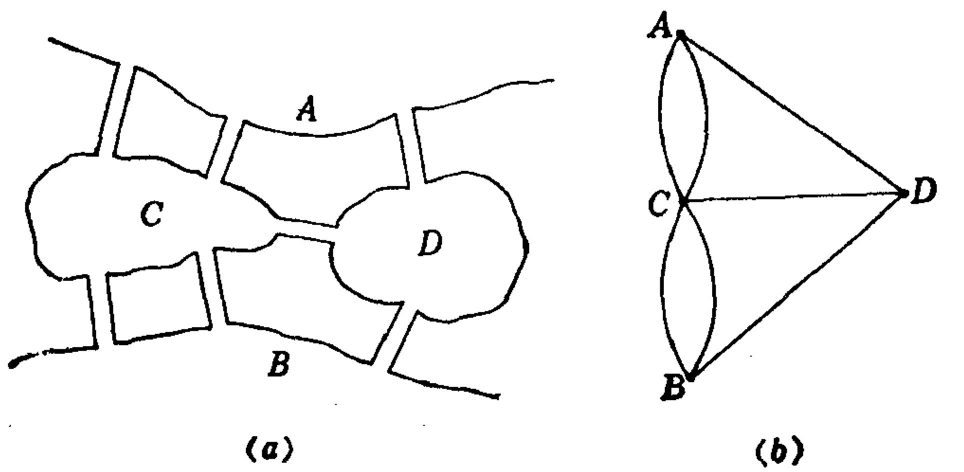


图 1.2

例 3 有 7 个人围一圆桌而坐，如果要求每次相邻的人都与以前完全不同，试问不同的就座方案共有多少？

我们用顶点表示人，用边表示两者相邻。因为最初任何两人都允许相邻，所以任何两点间都可以有边相连，如图1.3(a)所示。假定第一次就座方案是（1，2，3，4，5，6，7，1），那么第二次就座时就不允许这些顶点间继续相邻，也就是说，只能从图 1.3(a)中删去这些边以后的图1.3(b) 中选择，比如选中（1，3，5，7，2，4，6，1）。同样，在图1.3(b)中删去与第二次方案有关的边，便得到图1.3(c)，第三次就座方案只能从图1.3(c)中选择，我们能够得到（1，4，7，3，6，2，5，1）。如果再删去这些边，剩下的图就只有 7 个孤立的顶点，它说明任何两个人在前面三次就座中都已经相邻过，因此这种就座方案最多只有 3 次。

从上述几个例子看出，如果用顶点表示某类事物，用对应的边表示这些事物之间的某种联系，那么就得到由顶点和边构成的图，它就是图论中所谓的“图”。图论就是研究这些图的一般性质和规律的离散数学理论。

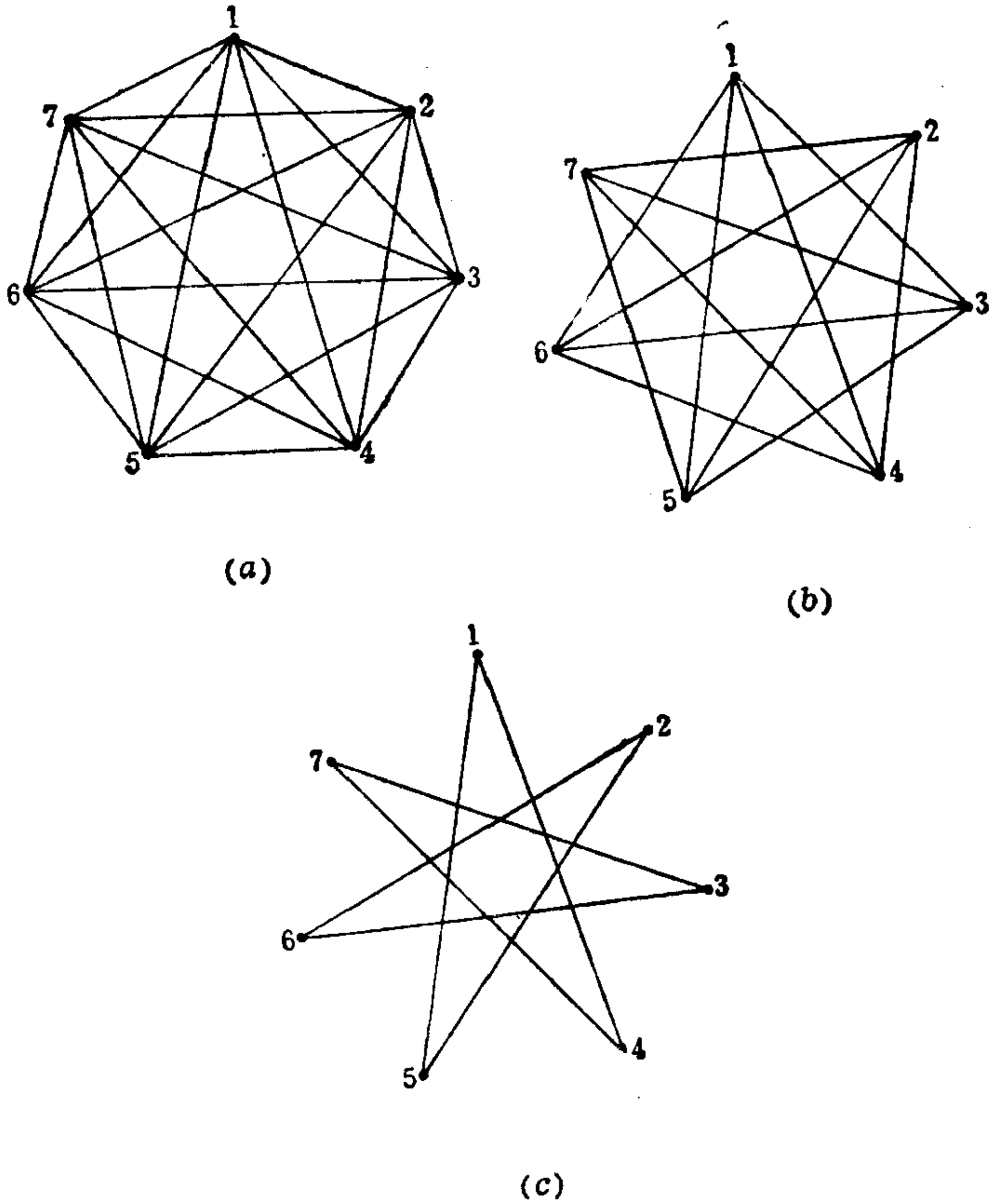


图 1.3

二、有向图和无向图

顶点和边是构成图的两大要素。为了便于研究，人们又根据边是否具有方向，将图分为有向图和无向图两大类。

定义1.1.1 有向图G由一个有序对组成，记作$G=(V,A)$。其中V是顶点的集合，A是顶点间形如(v_i, v_j)的有向边(弧)组成的集合，它是V上的一个二元关系。弧(v_i, v_j)表示该弧的始点是v_i，终点为v_j。

图1.4是有向图，其中 $V=\{1,2,3\}$，$A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$。图中$(a,a)$形式的弧称为自环。

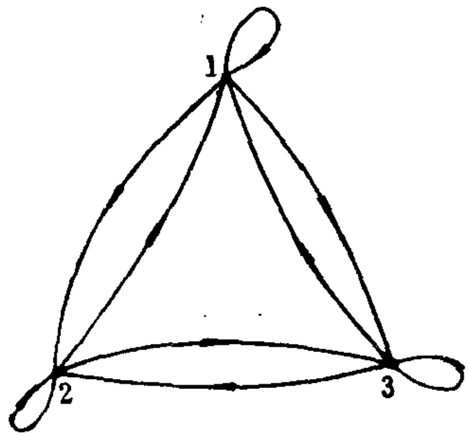


图 1.4

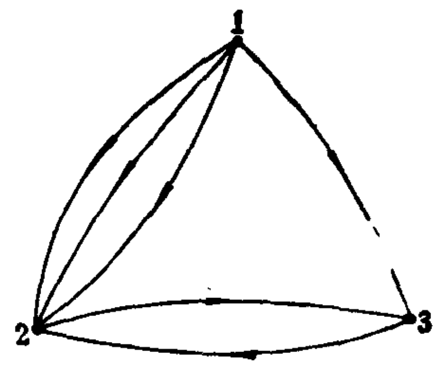


图 1.5

图1.5也是有向图，$V=\{1,2,3\}$，$A=\{(1,2),(1,2),(1,2),(1,3),(2,3),(3,2)\}$。

通常规定集合V的元素不能重复，而集合A的元素可以重复。例如图1.5中$(1,2)$形式的弧在A中出现3次。形象地说，它可以看成从顶点1到2有3条不同的单向道路。如果有向图$G=(V,A)$没有自环，也没有重复出现的弧，就称它是简单图。例如图1.1。如果一个图只有顶点而没有任何边，则称它是空图，用Φ表示。如果有向图$G=(V,A)$中(a,b)和(b,a)形式的弧都是成对出现的，我们可以用一条无方向的边$\langle a,b\rangle$取代这两条弧，同时若原图中有自环，也将它们删除，例如将图1.4进行上述简化，就得到图1.6，它就是一个无向图。

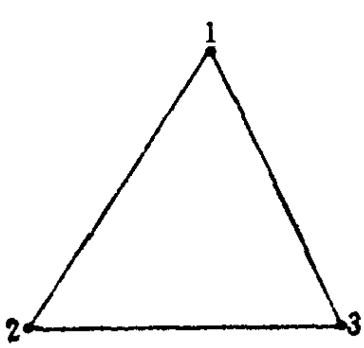


图 1.6

定义1.1.2 图$G=(V,E)$称为无向图，其中V是顶点集，E是G中边（无向）的集合，用$\langle v_i,v_j\rangle$表示边，v_i，v_j是该边的两个端点。

比如图1.6中，$V=\{1,2,3\}$，$E=\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$。

若图$G=(V,E)$中任何两点之间都有边相连，而且没有重边和自环，则称图$G=(V,E)$为完全图。图1.6就是一个完全图。

依据顶点的数目是有限个还是无限个，图G也分为有限图和无限图两类。本书只限于讨论有限图。

第二节　点与边的关联关系

图G中顶点之间的相邻关系是由边（或弧）表示的，因此顶点与边之间的关联关系是图的本质内容，至于画出图的几何形状如何，则无关紧要。

一、线度

定义1.2.1　有向图$G=(V,A)$中任一顶点v_i的正关联集$\text{inc}^+(v_i)$是以顶点v_i为始点的弧的集合，它的负关联集$\text{inc}^-(v_i)$是以顶点v_i为终点的弧的集合。

例如图1.7中

$$\text{inc}^+(v_1)=\{a_2,a_4\} \qquad \text{inc}^+(v_3)=\{a_3,a_6\}$$

$$\text{inc}^-(v_1)=\{a_1,a_3\} \qquad \text{inc}^-(v_3)=\{a_4,a_5,a_6\}$$

我们称正、负关联集$\text{inc}^+(v_i)$和$\text{inc}^-(v_i)$中元素（即弧）的数目分别为v_i的正、负线度，用$d^+(v_i)$和$d^-(v_i)$表示。因此在图1.7中

$$d^+(v_1)=2,\ d^+(v_3)=2,\ d^-(v_1)=2,\ d^-(v_3)=3$$

无向图中顶点v_i的线度$d(v_i)$的值为与该点关联的边数。如果v_i有一个无向的自环，则在$d(v_i)$中该自环计算2次。例如图1.8中

$$d(v_1)=2,\quad d(v_3)=4$$

二、线度与边的关系

定理1.2.1　无向图$G=(V,E)$中，恒有

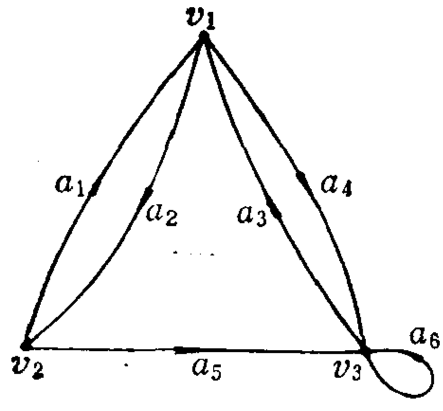


图 1.7

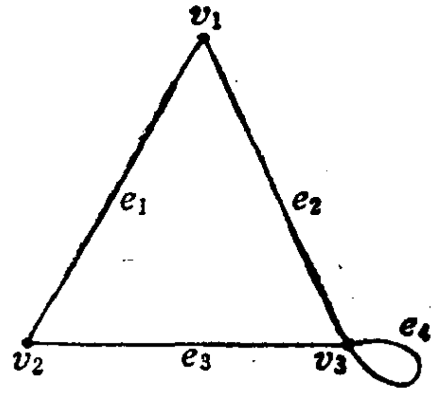


图 1.8

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=2|E|$$

其中$|E|$表示该无向图G中边的数目。

证明 对任何一条边$\langle v_i,v_j\rangle\in E$，若$j\neq i$，则$\langle v_i,v_j\rangle$分别在$d(v_i)$和$d(v_j)$中贡献 1，若$j=i$，则$\langle v_i,v_i\rangle$在$d(v_i)$中贡献 2。因此每条边在线度和式中的贡献都是 2，故定理得证。

定理1.2.2 图$G=(V,E)$中线度为奇数的顶点数目必为偶数个。

证明 设线度为偶数的顶点集合为V_e，线度为奇数的顶点集合为V_0，则

$$\sum_{v_i\in V_0} d(v_i)+\sum_{v_j\in V_e} d(v_j)=2|E|$$

其中$\sum_{v_j\in V_e} d(v_j)$是偶数，因此$\sum_{v_i\in V_0} d(v_i)$也一定是偶数。又因为V_0中每个顶点的线度都是奇数，所以V_0中的顶点数目$|V_0|$必是偶数。

例 1 在一次集会上，认识奇数个人的人必是偶数个。

证明 用顶点表示人，认识的两个人用连接相应顶点间的边表示，则可以构成一个图。由定理1.2.2，命题显然为真。

例 2 证明不存在$|V|=9$且每个顶点的线度都是5的无向图。

证明 假定存在这样的图$G=(V,E)$，则$\Sigma d(v_i)=45$，依定理1.2.1有$\Sigma d(v_i)=2|E|$，故$|E|=22.5$，不是整数，与图G

的边数是整数相矛盾。因此不存在这样的图G。

为了讨论方便，以下我们规定图$G=(V,E)$的顶点数为n，边数为m。

第三节 图的矩阵表示

一个图虽然非常直观，但却不易运算，特别不易于在计算机上进行运算。一个有效的解决方法是将图表示成矩阵形式，通常采用的矩阵是邻接矩阵和关联矩阵。

一、邻接矩阵

邻接矩阵A表示图G顶点之间的邻接关系。它是一个$n\times n$阶的方阵。邻接矩阵可以表示图G中的自环，但不能表示重边。如果(v_i,v_j)是G中的一条弧，则$a_{ij}=1$，否则$a_{ij}=0$。例如图1.9的邻接矩阵是

$$A=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5\end{matrix}\end{array}$$

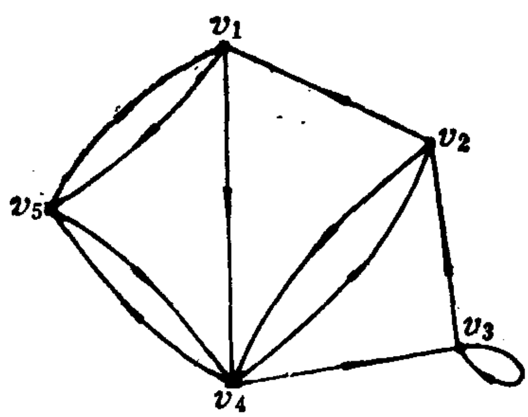


图 1.9

无向图也同样可以用邻接矩阵A表示，而且矩阵A一定是一个对称阵。很明显，邻接矩阵包含了无重边的图G的全部信息。也就是说，如果已知A是某一个图的邻接矩阵，那么就很容易画出图G本身。例如

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

是对称阵，它所表示的图就是图1.6，这是一个完全图。利用邻

接矩阵可以较方便地进行图的运算。

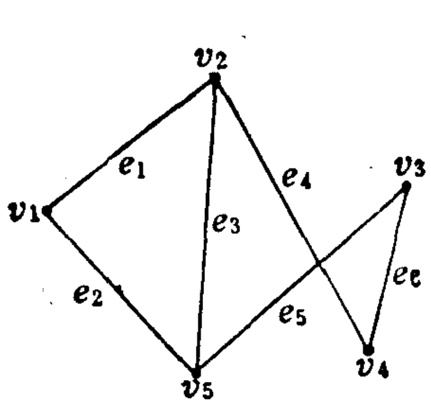
例 1　无向图G的补图$\overline{G}$是由对应的完全图中去掉属于G的边而得到。比如求解图1.10的补图。

解　图1.10的邻接矩阵$\boldsymbol{A}_G$和对应完全图的邻接矩阵$\boldsymbol{A}_0$分别是

$$\boldsymbol{A}_G=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

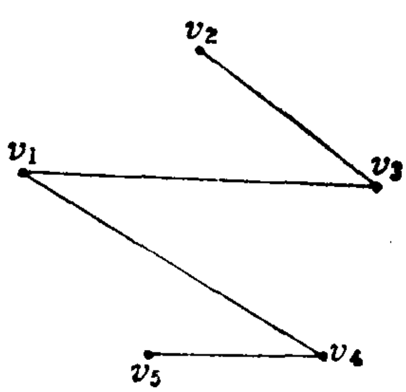
$$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则其补图$\overline{G}$的邻接矩阵$A_{\overline{G}}$应是



G

图 1.10



$\overline{G}$

图 1.11

$$A_{\overline{G}}=A_0-A_G=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

补图$\overline{G}$如图1.11所示。

例 2 作为方阵，邻接矩阵A可以自乘。试说明A^2中元素值的含义。

令$H=A\cdot A$，由矩阵乘法

$$h_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot a_{kj}$$

可知，只有a_{ik}和a_{kj}均为1时，h_{ij}才为1。而$a_{ik}=a_{kj}=1$说明i点到k点有边（弧）相连，k点到j点也有边（弧）相连，即i通过k点可以到达j，因此h_{ij}表示从i点出发经过二条边（或称二步）到达j点的路径数目。

比如在图1.9中，$h_{25}=\sum_{k=1}^{5}a_{2k}\cdot a_{k5}=a_{21}\cdot a_{15}+a_{24}\cdot a_{45}=2$，说明从顶点2到顶点5二步到达的路径有2条，它们分别经过顶点1和4。

二、关联矩阵

关联矩阵B揭示了图G顶点和弧（边）之间的关联关系，它是一个$n\times m$的矩阵。关联矩阵可以表示图G的重边，但无法表示自环。当顶点和弧分别给以编号之后，则矩阵B的第i行表示顶点v_i，第j列表示弧a_j，B中的元素b_{ij}定义如下：

$$b_{ij}=\begin{cases} 1 & (v_i,v_k)=a_j \quad v_i\text{是弧}a_j\text{的始点} \\ -1 & (v_k,v_i)=a_j \quad v_i\text{是弧}a_j\text{的终点} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

例 3 图1.12的关联矩阵B是