李继陶　主编
陈祯培　何战　周芙　编

统计光学基础

四川大学出版社

内　　容　　提　　要

本书着重介绍统计光学的基本理论和基本方法。全书共八章，前面两章介绍统计光学的数学基础——概率论和随机过程，三至五章讨论光波的相干性，六、七两章讨论部分相干光的成象和通过随机非均匀煤质的成象问题，第八章介绍光电计数检测的半经典理论。

本书理论讨论深入浅出，并注意理论联系实际；取材既注意精选内容，又考虑不同读者的需要，同时还介绍了当前最新的科技成果．各章均编选了较多的习题，其中重要或难度大的习题书末给出了参考解答。

本书可作为光学类专业的研究生教材，亦可供光学方面的教师、高年级大学生、工程师以及科技工作者参考。

统　计　光　学　基　础
李继陶　主编

责任编辑　樊程芳　　封面设计　蒋仲文
四川大学出版社出版发行
四川省新华书店经销
四川省郫县印刷厂印刷
开本787×1092毫米　1/16　印张32.5　字数700千
1988年12月第一版　1988年12月第一次印刷
印数：0001－4000册
ISBN 7—5614—0134—5/O·29

定价：6.67元（覆膜本）

前　言

尽管光学作为一门自然科学的历史已经很长了，但它仍具有相当的生命力。自本世纪中期以来，由于光学自身的许多发明与发现以及和其它科学技术的广泛结合与相互渗透，使得一度沉寂的光学又活跃起来，随着新技术的出现，新的理论也不断发展，形成了许多新的分支学科或边缘学科。统计光学就是人们将随机过程、相关理论和统计估值等方法引入光学，用概率统计方法来处理光学中的统计问题而形成的。

本书着重介绍统计光学的基础理论。全书共分八章：第一、二章介绍概率论和随机过程的基本理论，作为全书的数学基础；第三、四、五章讨论光波的相干性，包括一阶、二阶和某些高阶相干性问题；第六章讨论部分相干光的成象，介绍了分析部分相干光成象的几种方法并引进了相干成象的概念；第七章研究光通过随机媒质的成象；第八章讨论光电计数检测的半经典理论。

本书主要根据顾德门教授的《Statistical Optics》一书编写而成，同时参考了戚康男、秦克诚等1982年编写的《统计光学》讲义以及吴祈耀编写的《随机过程》等论著。第一、二、四、六章由李继陶编写，第五章由陈祯倍编写，第三章由李继陶、陈祯倍编写，第七章由何战编写，第八章由周英编写，全书由李继陶负责统稿。

四川大学出版社樊程芳同志对本书的出版给予了热情的支持和帮助，我们在此表示衷心感谢。承蒙周骏官同志为本书精心绘制插图，编者也深表感谢。

由于作者水平有限，书中缺点和错误一定不少，敬请读者批评指正。

编者

1988年6月

目　录

第一章 随 机 变 量

§1.1 概率简述

自然界和社会上发生的各种现象可以粗略地分为两类．有一类现象在一定条件下必然发生或不发生，例如，在一个标准大气压下把水加热到100℃，则必然发生沸腾现象，而结冰的现象必然不会发生，这类现象称为**决定现象**．研究这种现象的数量关系就是决定数学，我们所熟悉的微积分学、微分方程等，都是研究这种决定现象的数学工具．另有一类现象，在相同的条件下，多次进行同一试验（或多次观测同一现象）所得结果并不完全一样，而且在每次试验或观测之前不能确切预料将出现什么结果．例如掷一颗骰子，观察出现5点这一现象，其结果是可能发生，也可能不发生，但在大量重复试验中5点出现的频率几乎是稳定的，约为1/6．这类现象称为**随机现象**．这种随机现象，在大量重复试验中都呈现出某种规律性，即统计规律性，概率论就是研究随机现象的统计规律性的．

为了对随机现象进行研究，就要对它进行观测或试验．一个试验，如果不能事先准确地预言其结果，而且在相同条件下可以重复进行，则称其为**随机试验**．在概率论中所进行的试验都是指随机试验．在概率论中我们把随机试验的每一结果称为**随机事件**，简称**事件**．例如抛掷一枚硬币出现正面，“抛掷硬币”就是试验，出现“正面”就是一可能结果，是事件．事件常用A，B，C，……等拉丁字母表示．

事件有较简单的，也有较复杂的，而较复杂的往往能在同一条件下分解为较简单的事件．例如，在有80件正品和20件次品的产品中，随机抽取2件，其抽取结果是一个随机事件，“其中至少有一件次品”就是一个复杂事件，它是由“其中只有一件次品”和“其中二件均是次品”这两个事件组成的．在一定条件下和一定的研究范围内，不能再分解的事件称为**基本事件**．由基本事件组合而成的事件称为**复合事件**．

在一定条件下，必然发生的事件称为**必然事件**，记为S．在一定条件下必然不发生的事件称为**不可能事件**，记为ϕ．

不同基本事件是不能同时发生的，而事件又总是由基本事件组成的．若每一事件所包含的任一基本事件出现了，则该事件就发生了，所以全体基本事件组成一个必然事件．为了便于研究随机试验，把随机试验的所有基本事件组成的集合，叫做实验的**样本空间**，记为S．一个事件可以是样本空间的一个元素，也可以是一些可能结果的集合，亦即S中的每一事件是S中的子集．

随机试验有许多可能结果，一次试验中不能准确预言某个结果是否出现，然而从大量重复试验中会发现，各种结果出现的可能性是有不同大小的．为了在数量上比较各个事件出现的可能性的大小，用数字$P(A)$来表示事件A出现的可能性，并称$P(A)$为事件A的**概率**．

$P(A)$大，表示A出现的可能性大，$P(A)$小，则表示A出现的可能性小。

然而，对于事件A，到底该用哪个数作为它的概率呢？从概率论的发展历史看，人们针对不同的情况，从不同的角度对事件的概率作了规定。下面介绍统计概率及概率的公理化定义。

把一个事件的概率同该事件出现的相对频率联系起来，是直观和容易理解的。例如作了N次试验，事件A出现了n次，则定义事件A出现的频率为

$$f_N(A)=\frac{n}{N}. \qquad (1.1-1)$$

可以证明：在相当广泛的条件下，当试验次数N无限增加时，在一定意义下，事件A出现的频率趋近于事件出现的概率，即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{n}{N}\to P(A), \qquad (1.1-2)$$

这就是**统计概率**的定义。下面再给出概率的公理化定义。

定义 设S是随机试验的样本空间，对于试验中的每一个试验A赋予一个实数，记为$P(A)$。如果它满足下列条件：①对于每一事件A有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；②$P(S)=1$；③对于两两互不相容事件（即$A_iA_j=\phi$，$i\neq j$）$A_i$，$i=1, 2, \cdots\cdots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

$P(A)$就定义为事件A的概率。

§1.2 条件概率与统计独立

一、条件概率

研究随机事件概率的时候总是限制在一组条件下进行的，此外别无信息可用，但实际情况往往是知道某一事件B发生的情况下，需要求另一事件A的概率。

1．条件概率的定义　事件B发生的条件下求事件A发生的概率，称为条件概率，记为$P(A|B)$。

定义 设A，B为二随机事件，且$P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (1.2-1)$$

为事件B发生的条件下，事件A发生的**条件概率**。

2．概率乘法定理　设$P(B)>0$，则由（1.2—1）式可得

$$P(AB)=P(A|B)P(B), \qquad (1.2-2)$$

此式称为**概率乘法定理**。利用这个定理可以计算二事件A，B同时发生的概率$P(AB)$。

3．全概公式　设S为随机试验E的样本空间，B_1，B_2，…，B_n为E的一组事件，若①在每次试验中B_1，B_2，…，B_n至多发生一个，即$B_iB_j=\phi(i\neq j)$，②在每次试验中B_1，B_2，

…，B_n至少发生一个，即$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$，则称$B_1$，$B_2$，…，$B_n$为样本 S 的一个 **划分**.

定义 设试验E的样本空间为S，A为E的事件，B_1，B_2，…，B_n为S的一个划分，且$P(B_i) > 0$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n). \quad (1.2\text{—}3)$$

（1.2—3）式称为**全概公式**. 它可以用来解决这样一类问题：直接计算$P(A)$有困难，但能找到S的一个划分B_1，B_2，…，B_n，且能求得$P(B_i)$及$P(A|B_i)$，此时就可用全概公式求得$P(A)$.

4．*逆概（贝叶斯）公式* 设B_1，B_2，…，B_n为样本空间S的一个划分，且$P(B_i) > 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 对于任一事件A，$P(A) > 0$，由条件概率定义有

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_iA)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}.$$

又由全概公式 $P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)$，即得

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}, \quad (1.2\text{—}4)$$

上式称为**逆概公式或贝叶斯公式**.

利用全概和逆概公式计算问题的特点是：

（1）在这类问题中所涉及的随机试验可分成两步. 第一步的试验结果可以划分成若干个事件B_1，B_2，…，B_n，它们构成全概公式中的划分. 在第一步试验结果（诸如事件B_1，B_2，…，B_n中无论哪一个发生）的基础上再进行第二步试验，结果有若干个.

（2）我们要求的是与第二步试验结果有关的某事件的概率，则利用全概公式. 如果我们已知与第二步试验结果有关的某事件发生了，求与第一步试验结果有关的某事件$B_i(i=1, 2, \cdots, n)$的概率，则利用逆概公式.

二、统计独立性

条件概率$P(A|B)$与$P(A)$一般说来是不同的，但在某些情况下，$P(A|B) = P(A)$，此时反映了事件A发生的概率与B发生与否没有关系，于是（1.2—2）式变成

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (1.2\text{—}5)$$

定义 对事件A及B，若$P(AB) = P(A)P(B)$，则称A、B是**统计独立的**.

§1.3 随机变量及其分布

一种随机现象涉及许多事件，假如孤立地研究，很难对其整体有全面了解．为了全面研究随机现象的统计规律性，需要把这些现象数量化，然后象决定数学一样把变量引入．

一、随机变量

在随机现象中，有许多是与数值直接发生关系的．例如，掷一枚骰子可能出现1，2，3，4，5，6点的结果，出现4点这一事件就直接和数值4相对应．对于非数量性质的事件，也可数量化．例如，掷一枚硬币出现正面“H”或出现反面“T”，这是非数量性的．假如我们规定用“1”表示出现正面“H”，用“0”表示出现反面“T”，这样就可将试验结果数量化．于是，我们总可以用一个数量U来定量地表示随机试验的结果，这个变量称作**随机变量**．显然，随机变量的取值是由试验结果所决定的，一个试验结果对应一个实数，所以它是基本事件的函数．由于基本事件的出现是有一定概率的，故随机变量也以一定的概率取值．因此，要了解随机变量，不但要知道它取什么数值，更重要的是要知道它以什么概率取值．下面给出随机变量的定义．

定义 设随机试验的样本空间S＝｛e｝，如果对于每一个$e\in S$有一个实数$U(e)$和它对应，这样就得到一个定义在S上的实值单值函数$U(e)$，称$U(e)$为**随机变量**．

本书将以大写字母U、V、…表示随机变量，用相应的小写字母u、v、…表示随机变量的可能取值．

有些随机变量，其全部可能取值是有限个或可列无限多个，这种随机变量称为**离散型随机变量**．与离散型随机变量不同，随机变量可能不止取可列个数值而是取某个区间的一切值，这种随机变量称为**连续型随机变量**．

二、随机变量的分布函数

一个随机变量取值的概率规律，称为该随机变量的分布，描述随机变量分布的重要方法之一是分布函数．

1．分布函数的定义 现在研究随机变量的取值落在一个区间的概率：$P\{u_1<U\leqslant u_2\}$．由于$P\{u_1<U\leqslant u_2\}=P\{U\leqslant u_2\}-P\{U\leqslant u_1\}$，所以只需要知道$P\{U\leqslant u_2\}$和$P\{U\leqslant u_1\}$就可以了．下面给出随机变量分布函数的定义．

定义 设U是一个随机变量，u是任意实数，则函数

$$F_U(u)=P\{U\leqslant u\} \tag{1.3—1}$$

称为U的**分布函数**．

（1.3—1）式表明，只要知道了$F_U(u)$，就可知道U落在区间$(-\infty, u)$上的概率，因而分布函数$F_U(u)$能够完整地描述随机变量的统计特性．对于任意实数u_1，$u_2(u_1<u_2)$，有

$$P\{u_1<U\leqslant u_2\}=P\{U\leqslant u_2\}-P\{U\leqslant u_1\}=F_U(u_2)-F_U(u_1). \tag{1.3—2}$$

显然，分布函数对于连续型和离散型随机变量都适用．

2．分布函数的性质　分布函数具有以下几个重要性质：

（1）$F_U(u)$是 u 的单调不减函数．因 $u_2>u_1$，故有$F_U(u_2)-F_U(u_1)=P\{u_1<U\leqslant u_2\}\geqslant 0$，即

$$F_U(u_2)\geqslant F_U(u_1). \tag{1.3—3}$$

（2）$0\leqslant F_U(u)\leqslant 1$，（1.3—4）

$F_U(-\infty)=\lim F_U(u)=0$，

$F_U(\infty)=\lim F_U(u)=1$．

（3）$F_U(u)$关于u右连续，即对于任意 u'有

$$F_U(u'+0)=\lim_{u\to u'+0} F_U(u)=F_U(u'). \tag{1.3—5}$$

（4）如果$F_U(u)$在$u=u_i$不连续，则这一点的阶跃等于$P\{U=u_i\}$．

三、离散型随机变量及其分布

1．离散型随机变量的分布列　为了研究随机变量的统计规律，必须知道随机变量的所有可能的取值，以及取每个可能值的概率．我们把随机变量各可能取值与其相应概率之间各种不同形式的对应关系，统称为随机变量的分布律．

定义　设U为离散型随机变量，它的所有可能取值为u_i（$i=1,2,\cdots$），则它的取值的概率规律可用一系列等式

$$p_i=P\{U=u_i\} \tag{1.3—6}$$

来表示，称为U的概率分布，或者用下面的表格来表示，称为随机变量U的**分布列**．

U	u_1	u_2	u_3	……	u_i	……
P	p_1	p_2	p_3	……	p_i	……

U的概率分布（1.3—6）具有如下性质：

（1）$p_i\geqslant 0$，（$i=1,2,\cdots$）；（1.3—7）

（2）$\sum\limits_i p_i=1$．（1.3—8）

2．离散型随机变量的分布函数　对于一个离散型随机变量，只要给出了它的概率分布就可以了解它的概率规律，有时也用到它的分布函数．概率分布为（1.3—6）式的离散型随机变量U的分布函数可以表示为

$$F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=\sum_{u_i\leqslant u}P\{U=u_i\}=\sum_{u_i\leqslant u}p_i\ . \tag{1.3—9}$$

四、连续型随机变量及其分布

连续型随机变量的统计特性还可以用分布函数的另一变换形式，概率密度函数来描述．

定义　若随机变量的分布函数$F_U(u)$，存在非负函数$p_U(u)$，使得对于任意实数u有

$$F_U(u)=\int_{-\infty}^{u} p_U(x)dx \qquad (1.3—10)$$

则称U为连续型随机变量，称$p_U(u)$为U的**概率密度函数**．显然（1.3—10）式也可写成

$$p_U(u)=\frac{dF_U(u)}{du}, \qquad (1.3—11)$$

故概率密度函数就是分布函数的导数．

概率密度函数有如下性质：

（1）$p_U(u)\geqslant 0$，由于$F_U(u)$是单调不减函数，所以其导数必是非负的；

（2）$\int_{-\infty}^{\infty} p_U(u)du=1$； $\qquad$ （1.3—12）

（3）$\int_{a}^{b} p_U(u)du=\int_{-\infty}^{b} p_U(u)du-\int_{-\infty}^{a} p_U(u)du=F_U(b)-F_U(a)$

$$=\mathrm{P}\{a<U\leqslant b\}. \qquad (1.3—13)$$

以上的讨论，实际上是在U为连续型随机变量的情况下进行的．如果我们利用δ-函数，则对离散型随机变量亦可用概率密度来描述．对于离散型随机变量，它的分布函数可表示成

$$F_U(u)=\sum_i p_i U(u-u_i), \qquad (1.3—14)$$

式中$U(u)$是一个阶跃函数，即 $U(u)=\begin{cases}1 & u\geqslant 0\\ 0 & u<0\end{cases}$． 所以，此时的密度函数为

$$p_U(u)=\frac{dF_U(u)}{du}=\sum_i p_i\delta(u-u_i). \qquad (1.3—15)$$

通常，我们还可能遇到混合型随机变量，其分布函数由阶跃的间断部分和处处连续的部分组成．离散型随机变量、连续型随机变量及混合型随机变量的概率分布函数和概率密度函数的例子如图1.3—1所示．

五、几种常用的概率分布

1．二项式分布　假设进行了n次独立试验，每次试验中某事件A可以出现或不出现．若A在每次试验中出现的概率为p，而A不出现的概率为$q=1-p$．现在来求事件A在这n次试验中发生k次的概率$\mathrm{P}_n(k)$．

如果事件A在n次独立试验的前k次出现，而其余的$n-k$次不出现，依概率乘法定理可知，其概率为$p^k q^{n-k}$．又由于我们只要求A在n次试验中出现k次，并未限定在前k次出现，实际上可以在n次中任意组合．这样，共有C_n^k种组合方法，于是

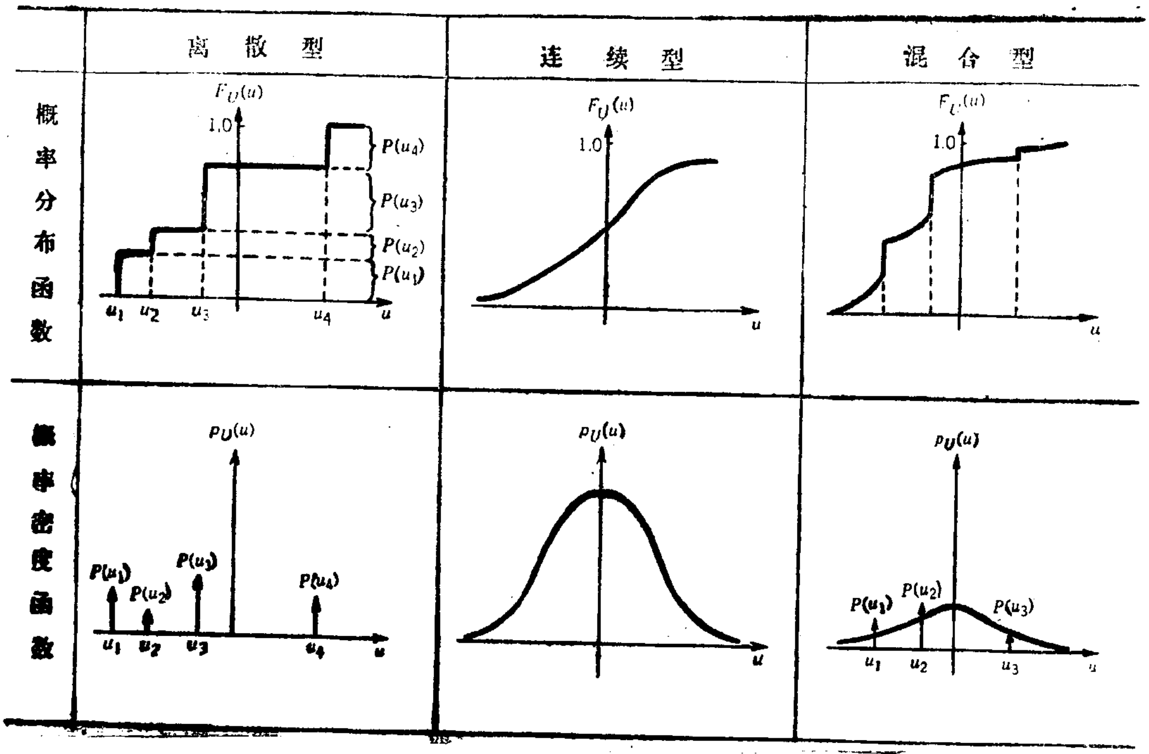

图1.3—1　各种概率分布函数和概率密度函数

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}. \qquad (1.3—16)$$

显然，在n次独立试验中，事件A出现的次数是个离散型随机变量，我们记为U. U可以随机地取从0到n的任一整数，对应每一整数都应有相应的概率，即

$$P(U=k)=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n. \qquad (1.3—17)$$

因此，它的分布函数是

$$F_U(u)=\begin{cases} 0 & u<0 \\ \sum\limits_{k\leqslant u} P_n(k), & 0\leqslant u<n. \\ 1 & u\geqslant n \end{cases} \qquad (1.3—18)$$

由于$P_n(k)$等于$(pu+q)^n$展开式中u^k项的系数，因此（1.3—17）式所表示的分布称为**二项式分布**.

二项式分布的均值和方差分别为

$$E(U)=np,\ D(U)=npq.$$

2．泊松(Poisson)分布　如果随机变量U的概率分布为如下形式的分布列

$$P\{U=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots, \qquad (1.3—19)$$

则称U遵从**泊松分布**，其中λ是一正实数，e是自然对数的底. 由e^λ的幂级数展开式$e^\lambda=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$可推得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=1\ .$$

同时，泊松分布是二项式分布的极限分布．在二项式分布中，若试验次数n无限增大，同时p无限减小（即$n\to\infty$，$p\to 0$），且$np=\lambda$不变，那么在n次独立试验中，事件A出现k次的概率可有一近似式，即

$$P\{U=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \tag{1.3—20}$$

这个近似称为**泊松定理**．由此近似可得下面的近似公式

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}&=1-\sum_{k=0}^{m}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\\&\approx 1-\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\&=\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\end{aligned} \tag{1.3—21}$$

当λ，m为已知时，$\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$的值有表可查．知道了泊松分布列（1.3—19）式就不难得出泊松分布函数的表达式

$$F_U(u)=\begin{cases}0 & u<0\\ \sum\limits_{k\leqslant u}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ , & 0\leqslant u<n,\\ 1 & n\geqslant n\end{cases} \tag{1.3—22}$$

泊松分布的数学期望和方差分别为

$$E[U]=\lambda,\ D[U]=\lambda.$$

二项分布和泊松分布在实际中有极广泛的应用．下面列举一些光学中的应用．

感光片是颗粒状的卤化银随机地悬浮在明胶中而成的，若我们用一个很小的扫描孔径测量均匀曝光后经显影、定影处理的底片的透过率，将发现透过率在某个平均值附近随机起伏．人们提出各种数学模型来描述这种随机性质，其中最简单的一种是所谓方格盘模型．根据这个模型，把一个被均匀曝光的底片想象成是由一些方块组成的，其中任一块或者透明（已被显影）或者不透明（未被显影），如图1.3—2所示．各小方块彼此独立，其未被显影（透明）的概率为p，若逐一检查各小方块透明与否，则每次试验可视为一个贝努利试验．

设方格盘中小方块的总数为N，其中有k个小方块未被显影（透明），则透过率$T=k/N$．若将方格盘作一次又一次相同的均匀曝光，而每次有k个未被显影，数目k是未可预

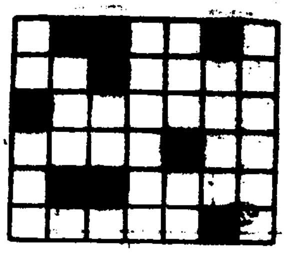

图1.3—2 颗粒性的方格盘模型

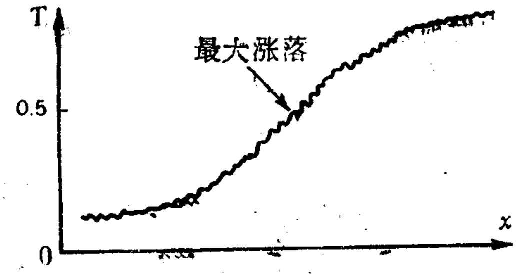

图1.3—3 以到图象边缘之距离x为函数的透过率T的扫描图，图象信号均值在0.1～0.9区间变化．在E〔T〕≈0.1或0.9附近σ_T^2有最小值，而在E〔T〕≈0.5时σ_T^2有最大值．

料的，因而k以及T均为随机变量，所以

$$E(T)=E(k)/N, \qquad (1.3—23)$$

$$\sigma_T^2=D(T)=D(k)/N^2. \qquad (1.3—24)$$

根据二项式分布，在N个小方块中有k个未被显影的概率为

$$P_N(k)=C_N^k p^k(1-p)^{N-k}.$$

由二项式分布的均值公式及（1.3—23）式得 $E(k)=Np=E(T)$，即

$$E(T)=p. \qquad (1.3—25)$$

又由二项式分布和方差公式及（1.3—24）式得$\sigma_k^2=Np(1-p)=N^2\sigma_T^2$，所以

$$\sigma_T^2=\frac{E(T)(1-E(T))}{N}. \qquad (1.3—26)$$

$$P_N(k)=C_N^k(E(T))^k(1-E(T))^{N-k}. \qquad (1.3—27)$$

若颗粒（或小方块）的面积为a，而方格盘的总面积为A，则$N=A/a$。那么(1.3—26）式变成

$$\sigma_T^2=\frac{aE(T)(1-E(T))}{A}. \qquad (1.3—28)$$

σ_T^2实际上代表了在面积A的尺度内的颗粒性，因为它量度了由底片上面积为A的一块到另一块透过率T的涨落．因此，若有一大块感光片被均匀曝光、显影，并且用面积为A的孔径扫描，输出的透过率之涨落应为（1.3—28）式所给出的σ_T^2．这个涨落可以称作感光片-孔径联合“颗粒性”．

σ_T^2与孔径面积A成反比变化，称为塞尔文（Selwyn）平方根面积定律．因此，一个简单的方格盘模型可与已有的照相乳胶的实验定律相合，可见这种模型是有其合理内核的．

σ_T^2依赖于均值$E(T)$也是基本正确的，方程（1.3—28）表明，当底片完全不透明或完

全透明时，σ_T^2都是很小的，而$E(T)$取中等值时σ_T^2最大，这也和实验中所观察到的趋势一致，如图1.3—3所示.

下面以光子的随机发射为例建立起泊松分布模型．假设一光源以平均速率ν随机发射光子，各次发射是独立无关的．在足够小的时间间隔dt内，光源至多发射一个光子或发射0个光子（即不发射），如图1.3—4所示.

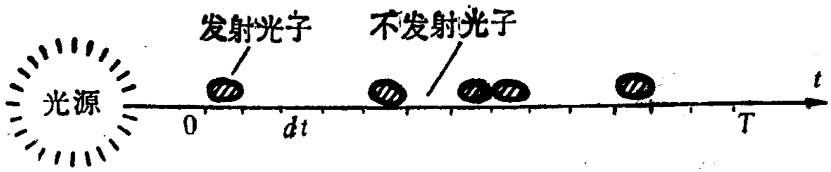

图1.3—4 发射光子的贝努利时间序列，在时间间隔dt独立发射一个光子或不发射光子

在dt内发射一个光子的几率$p=\nu dt$，我们关心在某段时间间隔(0，T)内，光源射发k个光子的概率为多少？将(0，T)按dt为单位进行划分，设可划分为N个单元，$N=T/dt$，每一dt内是否有一光子发射是随机的．显然该过程可视为N重贝努利试验，那么k服从参数为$N=T/dt$，$p=\nu dt$的二项式分布：$P_N(k)=C_N^k p^k(1-p)^{N-k}$．当$N$很大，$\lambda=Np=(T/dt)\cdot\nu dt=\nu T$为常数，由泊松定理得

$$P_T(k)=\frac{(\nu T)^k}{k!}e^{-\nu T}. \qquad (1.3—29)$$

上式是著名的散粒噪声的概率定律.

实际中，探测器的灵敏度达不到百分之百，探测过程本身也是以一定的概率ν'探测到光子的，这时除光源的泊松性质之外尚有探测过程的影响，因此具有**双重泊松效应**．凭直觉，整个过程仍是泊松性质的．设实际探测器的灵敏度为ν'，则每一dt内探测到光子的概率应修改为$\rho=\nu' p=\nu'\nu dt$，相应$\lambda=N\rho=\nu'\nu T$，于是(0，T)内探测到k个光子的概率为

$$P(k)=\frac{(\nu'\nu T)^k}{k!}e^{-\nu'\nu T}. \qquad (1.3—30)$$

这就是说，发射-探测这一双泊松效应的自身也是泊松的.

3．均匀分布　若随机变量U的概率密度函数为

$$p_U(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant u\leqslant b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}, \qquad (1.3—31)$$

则称U在区间(a, b)上呈**均匀分布**．显然，其分布函数为