

数学物理中的微分形式

C.V. 威斯顿霍尔兹 著

叶以同 译 武际可 校

北京大学出版社

内 容 简 介

本书从基础拓扑开始,系统地论述了流形,微分形式,流形上积分和联络等现代几何的基本概念,进而较详尽地列举了这些概念在力学和物理学中的应用,并叙述了辛几何,统一场论和引力论等。全书自成体系,语言通俗易懂,叙述概念和理论简洁清晰,内容广泛全面。而应用部分的阐述实际上是介绍了近代物理学,力学和应用数学在理论方面的发展途径。国内目前尚无系统介绍这方面内容的书籍。

本书可作为应用数学,物理学和力学等有关专业研究生的教科书,也可作为上述专业高年级本科生教科书,还可供以上领域的科技人员参考。

C. V. Westenholz

DIFFERENTIAL FORMS IN MATHEMATICAL PHYSICS

(Revised edition)

North-Holland Publishing Company

Amsterdam • New York • Oxford, 1981

数学物理中的微分形式

C.V. 威斯顿霍尔兹 著

叶以同 译 武际可 校

责任编辑: 刘 勇

*

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

850×1168毫米 32开本 20.125印张 520千字

1990年3月第一版 1990年3月第一次印刷

印数: 0001—3,000册

ISBN 7-301-00992-5/O·169

定价: 9.25元

1711/27/26

译者前言

近年来，微分几何的语言在世界范围内迅速向物理界和力学界普及。沿着这一方向，国外许多著名大学的物理系，力学系以及数学系的教学内容都有重大革新。而国内尚缺少系统介绍这方面内容的专著。本书是国际上这一内容专著中较系统，范围较广而又易于阅读的一本好书。它实际上总结了近代数学对于近代力学和物理学的应用，并给力学和物理学理论的新发展提供极其有用的数学工具。它虽然是一本数学书，但正如作者在序言中所说，他主要的目的是向力学界和数学界的学者们介绍有用的先进数学工具，而不是在于严格精确地阐明数学理论，所以本书很适合同我国力学和物理学以及应用数学这些领域的工作者及研究生阅读。书中文字较为通俗易懂，凡具有大学数学，力学或物理知识水平以上的读者均可阅读。

本书翻译过程中得到杜珣副教授，朱照宣教授的帮助，在此表示感谢。由于译者水平所限，难免有误译之处，请读者批评指正。

译者

1987年9月于北京大学

序

现代数学的强大威力引起了数学物理（量子场论和基本粒子物理，固体物理，动力系统理论等等）中所用方法的根本改变，需要一些象本书这样的专著，本书的主要目的是为物理学者提供有关可微流形概念的数学工具，这些概念对物理学是十分贴切的。读者将会发现，“几何式”的工作方法为描述自然现象提供了一个新的精彩的统一的一组工具，这种方法将超过用分析法得到的描述结果。

微分形式的概念与可微流形的概念有关，可微流形是当代数学的主要基石之一，出现在偏微分方程理论，代数拓扑和微分几何中。人们已经发现用张量法研究几何或物理定律不太合适，因为它要求一个非奇异坐标系，以便可以相对于这个坐标系给出向量和张量的分量。然而，按照可微流形的定义，一个单一的非奇异坐标系是不足以覆盖一个流形的。因此在一般的可微流形中，将不可能通过给定相对于单一坐标系的分量来描述一个张量场。结果，张量场的分量比起张量表示的内在含意来说，是不重要的。张量场的所有类型中，反对称协变张量可由微分形式本质地表示出来。物理学理论，特别是马克斯威尔理论，杨-米尔斯理论，相对论，还有热力学的物理定律和分析力学（辛力学）可以通过它们给出明确而简洁的公式。

微分形式已由 de Rham 用来表示流形的拓扑结构和流形上向量分析的某些方面之间的深刻关系。埃·嘉当已将微分形式用于对微分系统和黎曼几何的发展上。因此本书主要是直接说明流形上的向量分析，将它们作为通向嘉当和 de Rham 工作的综合性基本途径。特别是，我们还说明，除非将微分形式的微积分学进一

步系统地发展，否则斯托克斯定理和散度定理推广到一般流形上将是十分笨拙的。将微分形式的微积分学用于形成积分理论，我们就可以为物理学者提供现代数学方法。同时，我们还希望对物理定律的概念性的和直观性的向量分析描述有所贡献。因此，全书各处将不时地提供许多物理应用。特别是本书的后两章将完全奉献给物理科学。

过去这些年中(1966—1977)，本书作者已在各大学中对听众作过一些关于数学物理学中微分形式及其应用的科学报告，听众中有数学家，数学物理学家，理论物理学家，数学上倾向于实验的物理学家及工程师们。本书包含并发展了上述科学报告中的内容。此外，应当强调的是，本书主要目的之一是要发展关于“数学物理中的微分形式”这一主题的直观的和适用的知识，而不打算在数学上作得极其严格和精确，达不到听众中纯数学家的要求。

顺利阅读本书所需的预备知识包括集合论，线性代数，微积分学的常用知识以及大学物理学的知识。

我深深感谢 Claire 不断对我的鼓励和她给我的宝贵意见。也非常感谢我的同事教授 Holmann 和 Rummler(Fribourg University), Mislin 和 Jost(Swiss Institute of Technology), Crumeyrolle (Université Paul-Sabatier, Toulouse), Kalina 和 Lawryniewicz(Instytut matematyczny, Polskiej Akademii Nauk, Łódź), E. Heil(Technische Hochschule, Darmstadt)以及 Geissler(Hamburg University), 感谢他们评论性地阅读本书和有益的建议。我特别感谢 Ernst Seligmann, 他以十分合作的态度，花费相当的时间和精力为本书提供适当的重要科学资料。

第 二 版 序

“数学物理中的微分形式一书的第一版出版两个月内就售完了，这清楚表明在这个领域内需要一种教材，为物理学者和数学物理学者提供现代数学工具，特别是提供流形理论的工具。

第二版是改进的版本，特别是包含了第十章两个补充的章节，即 § 5 和 § 6，其中清楚地说明通过 de Rham 上同调表示的内在场的结构与最小耦合原理相关，而后者在现代物理学中是至关重要的。近年来数学物理学者们已将内在场的概念用于对最小耦合原理的几何形式列出公式，通常称为规范结构。

第二版中第七篇的内容比第一版有所增加，它讨论了统一场结构，例如卡鲁札-克莱因理论(电磁相互作用和引力的统一)，非阿贝尔规范理论，因而继续扩大了前面已提到的第十章补充章节中引进的新内容，第七篇还讨论了规范对称的自发对称破缺机制的内在描述。引入自发对称破缺机制这一节的原因是它在现代物理的各个领域中已逐渐变得十分重要了，例如在超导性，铁磁学，基本粒子物理学中等等。第七篇中还简短描述了弱的和电磁的相互作用统一场，以及将超引力作为物理基本相互作用的可能统一等内容。

作者感谢 J. Voisin (Facultés Universitaires, Namur) 教授对本书第一版的建设性评论和意见。

最后，作者还感谢 G. Gerlich 教授 (Technische Universität Carolo-Wilhemina, Braunschweig)，感谢他的各种建议。

目 录

译者前言

序

第二版序

第一篇 基本概念

第一章 拓扑预备知识..... (3)

提要 (3)

§1 引言 (3)

§2 拓扑空间 (4)

§3 闭包, 内部, 边界..... (6)

§4 连续映射, 同胚..... (8)

§5 拓扑空间的性质..... (11)

§6 特殊拓扑 (14)

第二章 R^n 上的微分运算..... (20)

提要 (20)

§1 引言 (20)

§2 多变量映射的微分 (22)

§3 可微映射的性质 (23)

§4 方向导数 (25)

§5 偏导数 (26)

§6 微分矩阵, 雅可比行列式 (28)

§7 C^1 -映射和微分同胚 (34)

§8 中值定理 (35)

§9 高阶微分和泰勒(Taylor)公式 (36)

§10 C^k -微分同胚的概念 (39)

§ 11 反函数定理	(39)
§ 12 隐函数定理	(41)

第二篇 流 形

第三章 可微流形	(47)
----------------	------

提要	(47)
----------	------

§ 1 引言	(47)
--------------	------

§ 2 图和图册	(48)
----------------	------

§ 3 可微流形的定义	(50)
-------------------	------

§ 4 微分流形的性质	(52)
-------------------	------

4.1 M^n 的豪斯道夫性质	(52)
-------------------------	------

4.2 M^n 是局部欧几里德空间	(53)
---------------------------	------

4.3 M^n 是局部紧致的	(54)
------------------------	------

4.4 流形的开子集	(54)
------------------	------

4.5 积流形	(54)
---------------	------

4.6 单位分解	(54)
----------------	------

§ 5 可微流形的例	(56)
------------------	------

第四章 流形上的微分学	(62)
-------------------	------

§ 1 可微映射	(62)
----------------	------

§ 2 切向量和切空间	(68)
-------------------	------

§ 3 映射的微分	(75)
-----------------	------

§ 4 映射的秩	(80)
----------------	------

§ 5 浸没-浸入-子流形	(83)
---------------------	------

§ 6 在数学物理上的应用	(86)
---------------------	------

第五章 李群	(88)
--------------	------

提要	(88)
----------	------

§ 1 引言和历史背景	(88)
-------------------	------

§ 2 李群的定义; 例	(90)
--------------------	------

§ 3 左-不变向量场	(93)
-------------------	------

§ 4 李群的李代数	(95)
------------------	------

§ 5 李群同态	(98)
----------------	------

§ 6	李群的李子群	(100)
§ 7	单参数子群	(101)
§ 8	指数映射	(104)
§ 9	正则坐标系	(111)
§ 10	伴随表示	(112)
§ 11	李变换群	(115)
§ 12	李群的齐性空间	(121)
§ 13	应用: 弗·克莱因的“厄尔朗根纲领”	(122)
第六章	纤维丛	(125)
§ 1	引言	(125)
§ 2	纤维丛的定义; 例	(126)
§ 3	切丛和余切丛	(130)
3.1	引言和动机	(130)
3.2	切(余切)丛的一个严格描述	(132)
§ 4	张量丛	(136)
§ 5	向量丛	(140)
§ 6	主纤维丛	(141)
§ 7	相伴丛	(145)

第三篇 微分形式

第七章	微分形式的基本概念	(151)
提要		(151)
§ 1	微分形式的定义	(152)
1.1	作为横截面的微分形式	(152)
1.2	作为反交换多线性映射的微分形式	(154)
1.3	微分形式的正则形式	(157)
1.4	伴随微分形式	(158)
§ 2	微分形式的运算	(161)
2.1	外导数	(161)
2.2	可微映射的对偶映射 φ^*	(169)
2.3	在正则形式中 φ^* 的计算	(172)
2.4	庞加莱(Poincaré) 引理及其逆定理	(174)

2.5	微分形式与向量场的内积	(183)
2.6	微分形式的李导数	(186)
§ 3	李群上的不变微分形式	(190)
§ 4	在数学物理上的应用	(197)
A.	电磁学中的微分形式	(197)
4.1	电磁场	(198)
4.2	电磁场变换定律	(199)
4.3	闵可夫斯基空间-时间中的 Maxwell 方程	(201)
4.4	在三维空间中的 Maxwell 方程	(204)
B.	热力学中的微分形式	(209)
C.	数学物理中的毛里尔-嘉当形式	(212)
4.5	刚体动力学中的左不变形式	(213)
4.6	牛顿质点力学中的右不变形式	(218)
第八章	弗罗本尼斯理论	(229)
§ 1	引言	(229)
§ 2	弗罗本尼斯(Frobenius)条件	(233)
§ 3	弗罗本尼斯可积性定理	(238)
3.1	引言	(238)
3.2	k 维分布的积分流形	(239)
3.3	弗罗本尼斯可积定理的局部表述法	(243)
3.4	弗罗本尼斯定理的整体表述法; 层状结构	(246)
3.5	用微分形式表述的弗罗本尼斯可积定理	(246)
3.6	用微分理想表述的弗罗本尼斯定理	(251)
§ 4	在数学物理上的应用	(254)
4.1	力学系统的对合性(或完整性)	(254)
4.2	热力学的 Carathéodory 定理(Caratheodory's Theorem)	(258)
4.3	物理中的一阶联立微分方程组	(261)
4.4	物理中的一阶偏微分方程	(262)
4.4.1	偏微分方程初步	(262)
4.4.2	一阶偏微分方程的一般解法	(264)
4.4.3	一阶 PDE 的柯西问题	(269)
4.4.4	应用于物理上的 PDE 的嘉当理论	(278)

第四篇 流形上的积分理论

第九章 微分形式的积分	(283)
§ 1 欧几里德空间 R^n 上的积分	(283)
1.1 一次微分形式的线积分	(283)
1.2 二次微分形式的面积分	(285)
§ 2 定向	(287)
2.1 n 维向量空间 $V^n(R)$ 的定向	(287)
2.2 n 维流形的走向	(289)
§ 3 R^n 上 n 次形式的积分	(292)
§ 4 链上的积分	(294)
4.1 可微链的概念	(294)
4.2 微分形式在链上的积分	(299)
4.3 对于链的斯托克斯定理 (Stokes' Theorem)	(300)
§ 5 在定向流形上的积分	(303)
5.1 有紧致支集的微分形式的积分	(303)
5.2 对于流形的斯托克斯定理	(307)
5.3 在黎曼流形上的积分	(316)
第十章 de Rham 上同调	(320)
提要	(320)
§ 1 de Rham 上同调	(320)
1.1 普通 de Rham 上同调	(320)
1.2 de Rham 群的例	(323)
1.3 有紧致支集的 de Rham 上同调	(333)
§ 2 可微的奇异同调	(335)
§ 3 de Rham 定理	(338)
§ 4 映射度	(341)
§ 5 环绕数	(345)
§ 6 作为物理定律支承结构的 de Rham 上同调	(348)
§ 7 霍奇定理	(367)
7.1 引言	(367)
7.2 霍奇星算子	(368)

7.3	余微分 δ	(368)
7.4	拉普拉斯-贝特拉米算子	(369)
7.5	调和微分形式	(372)
7.6	霍奇分解定理	(374)
§ 8	庞加莱对偶性	(378)
§ 9	在数学物理上的应用	(382)

第五篇 联络理论

第十一章 在纤维丛上的联络

提要	(389)
§ 1 经典微分几何中的仿射联络	(390)
1.1 协变微分	(390)
1.2 协变微分法的几何意义	(392)
1.3 平行移动的物理意义	(394)
§ 2 柯斯朱尔意义下的仿射联络	(395)
2.1 柯斯朱尔联络的概念	(395)
2.2 向量场沿一条曲线的协变导数	(398)
2.3 沿曲线的平行移动	(399)
2.4 张量丛上的协变导数	(400)
2.5 仿射联络的挠率和曲率	(402)
2.6 挠率和曲率的固有定义	(403)
2.7 黎曼联络	(405)
2.7.1 逆变和协变张量场之间的正则对应	(406)
2.7.2 黎曼或勒维-奇维塔联络	(408)
2.8 在数学物理上的应用	(411)
§ 3 嘉当联络	(415)
§ 4 埃累斯曼联络	(422)
4.1 历史背景	(422)
4.2 用线性映射表示的埃累斯曼联络	(423)
4.3 用 $\mathcal{D}$ -值一次形式表示的埃累斯曼联络	(425)
4.4 联络的曲率形式。结构方程	(429)
4.5 平坦联络	(433)
4.6 完整群	(434)

4.6.1 沿曲线的平行移动	(435)
4.6.2 联络的完整群	(438)
4.6.3 安布罗斯-辛格完整性定理	(440)
§ 5 线性联络	(444)

第六篇 固有的分析力学

第十二章 哈密顿力学和几何	(449)
提要	(449)
§ 1 引言	(449)
§ 2 保守力学. 辛流形	(453)
2.1 局部坐标中的辛结构	(455)
2.2 哈密顿系统	(460)
2.3 诺特(Noether)定理	(468)
2.4 正则变换	(472)
2.5 正则变换和母函数	(479)
2.6 无穷小接触变换	(481)
2.7 母函数与无穷小接触变换(提要)	(483)
§ 3 与时间有关的力学	(485)
§ 4 研究哈密顿原理的几何途径	(489)
附录 勒让德变换	(500)
§ 5 哈密顿-雅可比方程的几何意义	(502)
5.1 保守系统	(503)
5.2 非保守系统	(503)

第七篇 统一结构

第十三章 引力论	(509)
提要	(509)
§ 1 引言(引力论的历史发展)	(509)
§ 2 牛顿联络	(514)
§ 3 支承引力的几何结构	(516)
§ 4 广义相对论中的对称	(519)

4.1	无穷小运动或基林向量场	(521)
4.2	基林方程和守恒定律	(524)
§ 5	相对论流体力学	(524)
5.1	引言	(524)
5.2	非相对论流体力学	(525)
5.2.1	运动的纳维尔-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程和 欧拉方程	(527)
5.2.2	伯努利 (Bernoulli) 方程	(533)
5.2.3	涡量守恒的亥姆霍兹 (Helmholtz) 定理	(534)
5.2.4	环流守恒的汤姆孙 (Thomson) 定理	(535)
5.3	相对论流体力学	(536)
5.3.1	积分不变量	(536)
5.3.2	环流守恒的汤姆孙定理	(540)
5.3.3	涡量守恒的亥姆霍兹定理	(547)
第十四章	统一场论	(552)
	提要	(552)
§ 1	卡鲁扎-克莱因四维理论	(552)
1.1	电磁场的构造	(557)
1.2	M^4 上的卡鲁扎-克莱因度量	(559)
1.3	用卡鲁扎-克莱因几何学研究带电粒子的相对论流体	(560)
§ 2	规范对称和整体对称	(561)
§ 3	几何规范结构	(564)
§ 4	自发对称破缺	(567)
附录	拓扑量子数	(571)
§ 5	自发破坏的整体对称	(577)
§ 6	弱的和电磁的相互作用的统一	(580)
6.1	统一的萨拉姆-威伯格模型	(583)
6.2	自发的 μ - e 质量分裂	(585)
§ 7	做为统一物理定律的超引力	(601)
参考文献		(610)
主题索引		(613)

第 一 篇

基 本 概 念

第一章 拓扑预备知识

提要 本章研究的对象是拓扑空间。一个拓扑空间由一个集合 E 和 E 上的一个“拓扑”组成，后者可等价地用开集，闭集或邻域来定义。虽然开集拓扑或闭集拓扑缺乏邻域拓扑的直观性，但逻辑上比较简单，因此用它们定义拓扑是一种较好的方法（第2节）。

拓扑空间的许多性质依赖于开集在这空间中的分布。如果一个拓扑空间有“很少”的开集，则它多半是第一或第二可数的。另一方面，如果一个拓扑空间有“很多”或“足够”的开集，则这个空间中的序列有唯一的极限，只要假设有一个适当的“分离性质”做为这个空间的先决条件，即对拓扑空间的公理体系补充一个分离公理这一点就可以办到。全书中，我们只限于讨论用豪斯道夫(Hausdorff)分离公理定义的空间（第5节）。

严格说来，拓扑学是研究空间的那些在同胚下不变的（第4节）性质（例如紧性或联通性，参看第5节），也就是说，拓扑学是拓扑不变量的研究。

必备知识 集合论（集合运算，笛卡尔积，映射）。

§1 引言

拓扑的概念使邻近性和连续性的直观想法具有意义。有几种等效的方法来定义拓扑：用开集或闭集，或用老式的一点邻域的概念。然而，尽管前者不如邻域定义法直观，但逻辑上比较简单，因而是定义拓扑的一种较好方法。

在第一章中，我们略去大多数的证明，只简要叙述本书所必需的拓扑知识，并向想了解详细内容的读者介绍一些参考书。