

土动力学原理

[美] Braja M. Das 著

吴世明 顾尧章译

曾国熙校

浙江大学出版社

土动力学原理

[美] Braja M. Das 著

吴世明 顾尧章译

曾国熙校

浙江大学出版社

土动力学是近年来发展较快的一门新兴学科，国际范围内的土动力学研究成果，已逐步渗透进土木建筑的规划、设计和施工过程之中，特别是在地震工程、核电站工程和海洋、石油开发中的应用越来越广泛。

本书阐述土动力学的基本原理，同时又介绍最新的研究成果，并附有习题，将有助于加深对基本原理的理解。

本书可供各图书馆，科研机构，高等院校教师、研究生、高年级大学生，以及有关专业的研究人员、工程技术干部等学习和参考。

土动力学原理

[美] Braja M. Das 著

吴世明 顾尧章译

曾国熙 校

* * * *

浙江大学出版社出版

浙江大学印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

* * * *

开本787×1092 1/16 印张14.5 字数360千字

1984年12月 第一版

1984年12月第一次印刷

印数 1—5,000

统一书号：15337·001 定价：2.95元

目 录

第一章 振动原理

1.1 基本定义	2
1.2 单自由度系统	2
1.2.1 质量—弹簧系统的自由振动	2
1.2.2 质量—弹簧系统的强迫振动	5
1.2.3 粘滞阻尼的自由振动	8
1.2.4 阻尼稳态强迫振动	11
1.2.5 旋转质量型的激振	14
1.3 两个自由度系统	15
1.3.1 质量—弹簧系统的自由振动(耦合平动)	15
1.3.2 质量—弹簧系统的平动和摇摆耦合自由振动	19
习 题	20
参考文献	21

第二章 有限弹性体中的应力波

2.1 杆件中的纵向弹性波	22
2.2 杆件中的扭转波	24
2.3 短杆的纵向振动	24
2.4 短杆的扭转振动	26
2.5 土的 ν_c 和 ν_s 值的实验测定	27
2.5.1 波速法	27
2.5.2 共振柱法	27
2.6 粒状土小应变幅振动下剪切模量的经验公式	33
2.7 粘性土小应变幅振动下剪切模量的经验公式	34
2.8 大应变振幅的剪切模量	38
2.9 预应变对土剪切模量的影响	39
2.10 共振柱试验测定内阻尼	40
2.10.1 概 述	40
2.10.2 实验测定	40
2.10.3 室内测试结果	41
习 题	42
参考文献	43

第三章 三维空间的应力波

3.1 弹性介质中的运动方程	44
3.2 应 变	45
3.3 虎克定律	46
3.4 无界弹性介质中的应力波方程	46
3.4.1 压缩波	46
3.4.2 畸变波或剪切波	47
3.5 瑞利波	48
3.6 弹性波振幅随距离的衰减	52
3.7 饱和土中的压缩波和剪切波	54
3.8 弹性体波的反射和折射	54
3.9 地震折射法原理(水平层)	56
3.10 折射法在倾斜土层中的应用	60
3.11 反射法在地基勘测中的应用	62
3.11.1 水平层	62
3.11.2 倾斜层	64
3.12 稳态振动法在地基勘测中的应用	65
3.13 上孔法、下孔法和跨孔法在地基勘测中的应用	66
习 题	68
参考文献	70

第四章 作用在地面上的空爆荷载

4.1 超 压	71
4.2 超压引起的地面运动	73
4.3 爆炸波引起的地面运动计算	74
4.4 土的侧限模量的确定	78
4.5 超压峰值随深度的衰减	80
4.6 应用空间衰减系数计算地面竖向位移(超震情况)	81
4.7 由超压引起的地面位移(亚震情况)	85
习 题	85
参考文献	86

第五章 基础振动: 弹性半空间理论

5.1 弹性半空间上圆形基础的竖向振动	87
---------------------	----

5.2 竖向振幅的容许值	91
5.3 关于机器基础设计避免共振的几点说明	92
5.4 基础的摇摆振动	94
5.5 基础的滑移振动	96
5.6 基础的扭转振动	97
5.7 基础振动的实测值与理论值比较	99
习 题	100
参考文献	101

第六章 基础振动分析：集总参数体系

6.1 竖向振动的集总参数体系	103
6.1.1 一般关系	103
6.1.2 刚性圆形基础	105
6.2 刚性圆形基础的摇摆振动	109
6.3 刚性圆形基础的滑移振动	110
6.4 刚性圆形基础扭转振动的集总参数体系	112
6.5 基础振动问题的集总参数法评述	113
6.6 摇摆和滑移的耦合振动	117
6.7 桩基的应用	118
6.8 振动屏蔽	119
6.8.1 主动隔振和被动隔振的定义	119
6.8.2 应用明沟的主动隔振	120
6.8.3 应用明沟的被动隔振	121
6.8.4 应用桩的被动隔振	121
习 题	123
参考文献	123

第七章 浅基础的动承载力

7.1 砂土的动极限承载力	125
7.2 粘土的动极限承载力	128
7.3 基础的刚塑性分析	130
7.3.1 作用在基础上的瞬态竖向荷载（转动型破坏）	130
7.3.2 作用在基础上的瞬态水平荷载（转动型破坏）	132
7.3.3 作用在条形基础上的竖向瞬态荷载（冲切破坏）	136
7.3.4 受竖向瞬态荷载基础的荷载—沉降关系的实验测试	142
7.4 瞬态荷载作用下的基础的弹塑性分析	145

习 题	146
参考文献	147

第八章 地震和地面振动

8.1 若干地震术语的定义	148
8.2 震 级	149
8.3 美国的地震影响区	150
8.4 地震时岩层运动的特点	150
8.5 弹性土层的水平向振动	151
8.6 地震引起土层振动的其它一些研究	157
8.7 土的剪切模量和阻尼比(应用于地震反应分析)	158
8.8 地震的等效均匀应力往复次数	164
习 题	166
参考文献	167

第九章 挡土墙土压力

9.1 Mononobe-Okabe 主动土压力理论	169
9.2 确定 K_{AE} 值的室内模型试验结果	173
9.3 影响主动土压力系数值的参数	174
9.4 土压力合力的作用点	175
9.5 图解法求主动土压力	176
9.6 有限位移的重力式挡土墙设计	177
9.7 孔隙动水压力的影响	181
9.8 挡土墙被动土压力公式	181
习 题	182
参考文献	183

第十章 动荷载下土的压缩性

10.1 竖向应力和竖向加速度对粒状土的压实作用	184
10.2 在受控往复竖向应力作用下, 粒状土上条形基础的沉降	186
10.3 粒状土上机器基础由竖向振动引起的沉降	189
10.4 往复荷载下粘土的一维固结	191
10.5 动剪应变引起的砂层沉降	194
10.6 地震作用下干砂层的沉降计算	195
10.7 多维振动下干砂层的沉降	196

习 题	197
参考文献	198

第十一章 饱和砂土的液化

11.1 室内模拟现场砂土液化的研究	199
11.2 动三轴试验	200
11.2.1 一般概念和实验方法	200
11.2.2 动三轴试验的典型实验结果	201
11.2.3 各种参数对土液化势的影响	204
11.2.4 起始液化标准曲线	206
11.3 动单剪试验	207
11.3.1 一般概念	207
11.3.2 典型试验结果	207
11.4 判断现场土液化的方法	208
11.4.1 单剪液化试验与三轴液化试验结果的相互关系	208
11.4.2 三轴液化试验和现场液化试验结果的相互关系	210
11.4.3 现场起始液化区域的确定	211
11.4.4 砂土液化的最大地面加速度和相对密度的关系	211
11.4.5 液化势判别表：与标准贯入阻力的相互关系	216
11.5 可能发生液化的砂层的加固	216
11.5.1 孔隙水压力的产生和消散方程式	217
11.5.2 砾石或碎石排水井的计算	218
习 题	219
参考文献	220

附录 A 单缸引擎的主扰力与次扰力

英制、国际单位制和公制换算表

译后记

第一章 振动原理

近年来，土动力学已取得相当大的进展。这些进展包括对受到动力荷载的土的性状有了更好的了解，在解析和实验测试的基础上拟订出承受动力荷载的基础的新的设计准则。这本教材阐述与基础设计、挡土结构侧向土压力、砂土液化和自然沉积土液化势以及浅基础承载力有关的土动力学原理。

振动设备基础的设计应满足位移的要求。由振动荷载引起的位移可分为下面两大类：

1. 振动荷载下，由土与基础的弹性变形所引起的往复位移。
2. 地基土被压实所产生的永久位移。

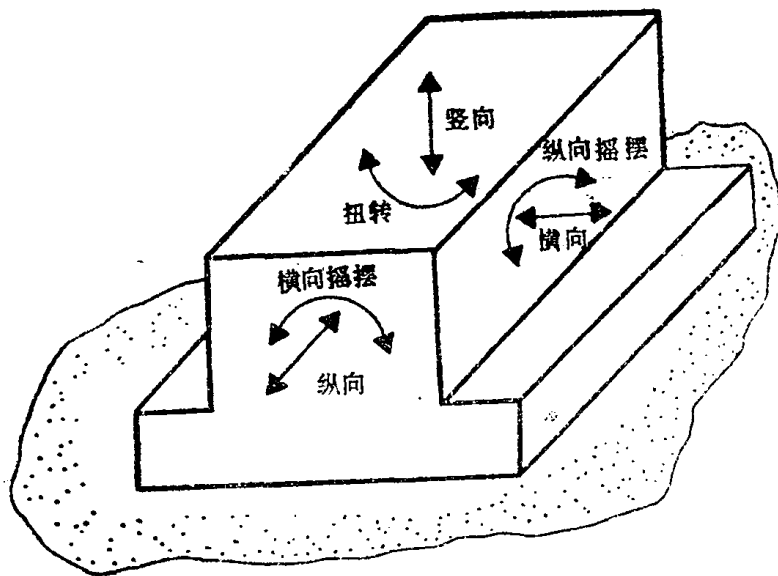


图1.1 基础振动的六种型式

考虑上述的第一种情况，有必要了解图1.1所示作用在一个基础上的扰力。可以看出：基础可能以任何一种或所有六种振动型式振动。为分析方便起见，每一种振动型式可以分别考虑，设计时也可分别考虑每一种振动型式产生的位移。进行基础位移的数学演算时，可把土视作粘弹性材料(图1.2a)。

该图表示一个竖向振动荷载的基础，用一个弹簧加一个阻尼器代替土，基础振动就简化成图1.2b所示的系统，通常称做为集总参数振动系统。

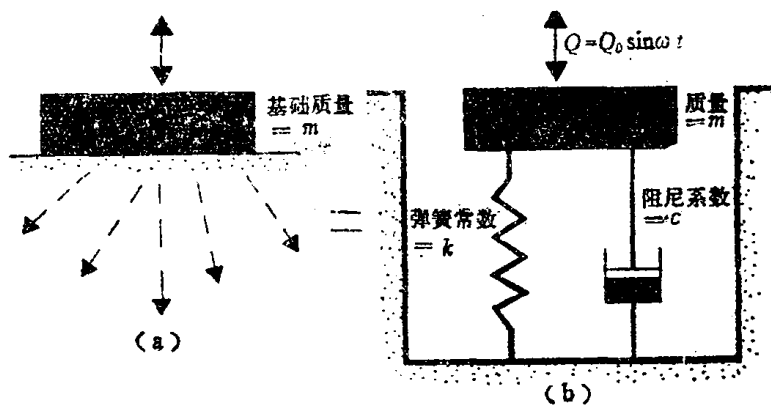


图1.2 集总参数振动系统

为了求解集总参数系统的振动问题，必须了解工程振动原理。因此，下面将扼要回顾一下简单振动问题的数学解，而有关解基础振动问题的其他方法，弹簧常数和阻尼系数等基本参数的计算，将在第五、六章中详细论述。

1.1 基本定义

自由振动 没有外力作用，仅在系统内力作用下的振动。

强迫振动 在外力作用下的振动。

自由度 描述一个振动系统所需要的独立的坐标数目。例如在图1.3a中质量 m 可以用单一坐标 z 来描述，所以它是单自由度系统。在图1.3b中，有必要用两个坐标 z_1 和 z_2 来描述系统的运动，因此，这个系统有两个自由度。同样，在图1.3c中，两个坐标 (z 和 θ) 是必要的，所以它的自由度也是两个。

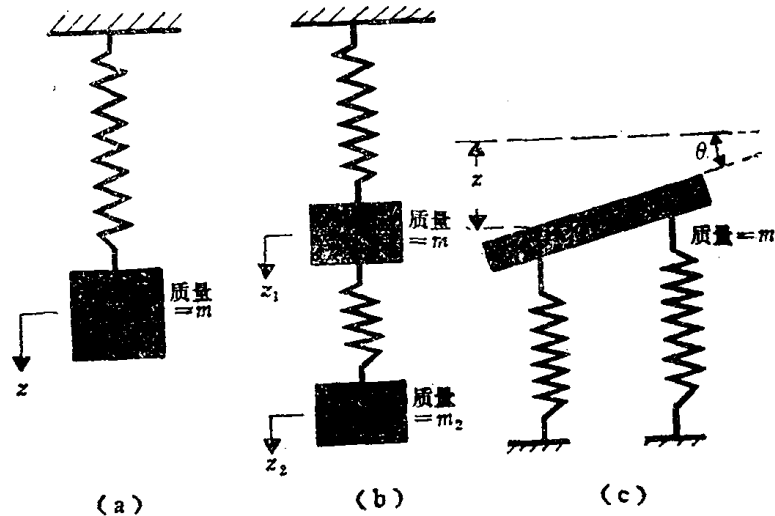


图1.3 振动系统的自由度

1.2 单自由度系统

1.2.1 质量—弹簧系统的自由振动

图1.4表示放置在弹簧上的一个基础，用弹簧代替土的弹性性质， W 表示基础和机器的重量。如果基础的底面积等于 A ，则传给地基土的荷载强度为

$$q = W/A \quad (1-1)$$

荷载 W 会引起弹性变形 z_s ，根据定义

$$k = W/z_s \quad (1-2)$$

式中 k 是弹性支承的弹簧常数。

地基反力系数 k_s 由下式给出

$$(1-3)$$

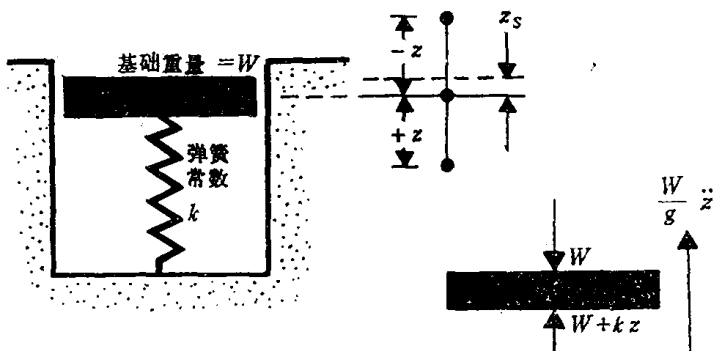


图1.4 质量—弹簧系统的自由振动

$$k_s = q/z_s$$

如果一个处于静态平衡的基础受到扰动，系统就产生振动。若基础离开静态平衡位置的距离为 z ，应用牛顿第二运动定律，基础的运动方程为

$$(W/g)\ddot{z} + kz = 0$$

或者 $\ddot{z} + (k/m)z = 0$ (1-4)

式中 g 是重力加速度， $\ddot{z} = d^2z/dt^2$ ， t 是时间， m 是质量，等于 W/g 。

为了求解式(1-4)，令

$$z = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$
 (1-5)

式中 A_1 和 A_2 均为常数， ω_n 是无阻尼自振圆频率。

将式(1-5)代入式(1-4)得到

$$-\omega_n^2(A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) + (k/m)(A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) = 0$$

或者 $\omega_n = \pm \sqrt{k/m}$ (1-6)

ω 的单位以弧度/秒表示。式(1-5)可以改写为

$$z = A_1 \cos(\sqrt{k/m} t) + A_2 \sin(\sqrt{k/m} t)$$
 (1-7)

为了确定常数 A_1 ， A_2 的值，必须代入适当的初始条件，当 $t=0$ 时，令

$$\text{位移 } z = z_0$$

$$\text{速度 } = dz/dt = \dot{z} = v_0$$

将第一个初始条件代入式(1-7)得

$$z_0 = A_1$$
 (1-8)

从式(1-7)又可得到

$$\dot{z} = -A_1 \sqrt{k/m} \sin(\sqrt{k/m} t) + A_2 \sqrt{k/m} \cos(\sqrt{k/m} t)$$
 (1-9)

将第二个初始条件代入式(1-9)得

$$\dot{z} = v_0 = A_2 \sqrt{k/m}$$

或者 $A_2 = v_0 / \sqrt{k/m}$ (1-10)

合并式(1-7)、(1-8)和(1-10)得

$$z = z_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \frac{v_0}{\sqrt{k/m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$
 (1-11)

令 $z_0 = Z \cos \alpha$ (1-12)

$$\frac{v_0}{\sqrt{k/m}} = Z \sin \alpha$$
 (1-13)

将式(1-12)和(1-13)代入式(1-11)得

$$z = Z \cos(\omega_n t - \alpha)$$
 (1-14)

式中 $\alpha = \tan^{-1}(v_0/z_0 \sqrt{k/m})$ (1-15)

$$Z = \sqrt{z_0^2 + (v_0/\sqrt{k/m})^2} = \sqrt{z_0^2 + (m/k)v_0^2}$$
 (1-16)

式(1-14)给出的基础位移关系表示在图1.5中。

$$t = 0, z = Z \cos(-\alpha) = Z \cos \alpha$$

$$t = \frac{\alpha}{\omega_n}, z = Z \cos\left(\omega_n \frac{\alpha}{\omega_n} - \alpha\right) = Z$$

$$\begin{aligned}
 t = \frac{\frac{1}{2}\pi + \alpha}{\omega_n}, \quad z &= Z \cos\left(\omega_n \frac{\frac{1}{2}\pi + \alpha}{\omega_n} - \alpha\right) = 0 \\
 t = \frac{\pi + \alpha}{\omega_n}, \quad z &= Z \cos\left(\omega_n \frac{\pi + \alpha}{\omega_n} - \alpha\right) = -Z \\
 t = \frac{\frac{3}{2}\pi + \alpha}{\omega_n}, \quad z &= Z \cos\left(\omega_n \frac{\frac{3}{2}\pi + \alpha}{\omega_n} - \alpha\right) = 0 \\
 t = \frac{2\pi + \alpha}{\omega_n}, \quad z &= Z \cos\left(\omega_n \frac{2\pi + \alpha}{\omega_n} - \alpha\right) = Z
 \end{aligned}$$

从图1.5中可以看出基础的位移具有正弦函数的性质，最大位移幅值为 Z ，通常称作单幅值，峰与峰之间的位移幅值为 $2Z$ ，有时称作全幅值。运动重复一次所需的时间叫做运动周期。由图1.5不难看出，运动在 A, B, C 点重复，这个运动的周期为

$$T = 2\pi/\omega_n \quad (1-17)$$

单位时间里往复的次数定义为振动频率，或者

$$f = 1/T = \omega_n/2\pi \quad (1-18)$$

对于这个系统，式(1-6)已表明 $\omega_n = \pm\sqrt{k/m}$ ，则

$$f = f_n = (1/2\pi) \sqrt{k/m} \quad (1-19)$$

f_n 通常称作无阻尼自振频率，因为 $k = W/z_s$ ， $m = W/g$ ，式(1-19)也可以表示为

$$f_n = (1/2\pi) \sqrt{g/z_s} \quad (1-20)$$

表1.1列出不同 z_s 值及其相对应的 f_n 值。

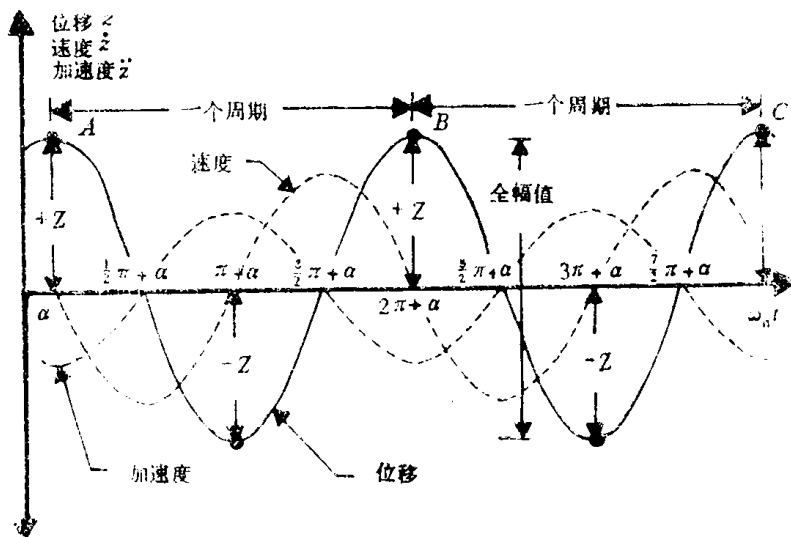


图1.5 质量—弹簧系统自由振动的位移、速度和加速度图解
(速度比位移超前 $1/2\pi$ 弧度，加速度又比速度超前 $1/2\pi$ 弧度)

速度和加速度对于时间的变化也可以用图表示，从式(1-14)可得到速度和加速度的表达式为

$$\dot{z} = -(Z\omega_n) \sin(\omega_n t - \alpha) = Z\omega_n \cos(\omega_n t - \alpha + \frac{1}{2}\pi) \quad (1-21)$$

和
$$\ddot{z} = -Z\omega_n^2 \cos(\omega_n t - \alpha) = Z\omega_n^2 \cos(\omega_n t - \alpha + \pi) \quad (1-22)$$

基础振动的速度和加速度变化规律由图1.5描述。

例1.1 一个由弹簧支承的质量,由质量产生弹簧的弹性变形为 0.015 吋,求自振频率。

解 根据式(1-20)

$$f_n = (1/2\pi) \sqrt{g/z_s},$$

$$g = 32.2 \text{ 呎/秒}^2,$$

$$z_s = 0.015 \text{ 吋}$$

$$\begin{aligned} \text{得 } f_n &= (1/2\pi) \sqrt{(32.2)(12)/0.015} \\ &= 25.54 \text{ 周/秒} \end{aligned}$$

例1.2 有一机器基础,重量为 45 千牛顿,弹簧常数为 10^4 千牛顿/米,

求 a) 自振频率,
b) 振动的周期。

解 a) $f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^4}{(45/9.81)}} = 7.43 \text{ 周/秒}$

b) 由式(1-18)

$$T = 1/f_n = 1/7.43 = 0.135 \text{ 秒}$$

1.2.2 质量—弹簧系统的强迫振动

图1.6表明一个理想而简单的质量—弹簧系统的基础,重量 W 等于基础自重与基础支承的上部荷载之和,弹簧常数为 k 。这个基础受到周期性变化的外力 $Q_0 \sin(\omega t + \beta)$ 的作用,通常支承作往复运动的发动机和类似机器的基础属于这一类问题。这类问题的运动方程为

$$m\ddot{z} + kz = Q_0 \sin(\omega t + \beta) \quad (1-23)$$

令 $z = A_1 \sin(\omega t + \beta)$ 为式(1-23)的一个特解 ($A_1 = \text{常数}$), 将其代入式(1-23)得

$$\begin{aligned} -\omega^2 m A_1 \sin(\omega t + \beta) + k A_1 \sin(\omega t + \beta) \\ = Q_0 \sin(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

$$A_1 = (Q_0/m) / (k/m - \omega^2) \quad (1-24)$$

因此,式(1-23)的特解具有下列形式

$$\begin{aligned} z &= A_1 \sin(\omega t + \beta) \\ &= \frac{Q_0/m}{(k/m - \omega^2)} \sin(\omega t + \beta) \quad (1-25) \end{aligned}$$

式(1-23)的补充解必须满足

$$m\ddot{z} + kz = 0$$

如上一节所示,上式的解为

$$z = A_2 \cos \omega_n t + A_3 \sin \omega_n t \quad (1-26)$$

式中 $\omega_n = \sqrt{k/m}$,

表1.1 无阻尼自振频率*

Z_s (毫米)	无阻尼自振频率 f_n (每秒振动次数)
0.02	111.47
0.05	70.5
0.10	40.85
0.20	35.25
0.50	22.29
1.0	15.76
2	11.15
5	7.05
10	4.98

* 注: $g = 9.81 \text{ 米/秒}^2$

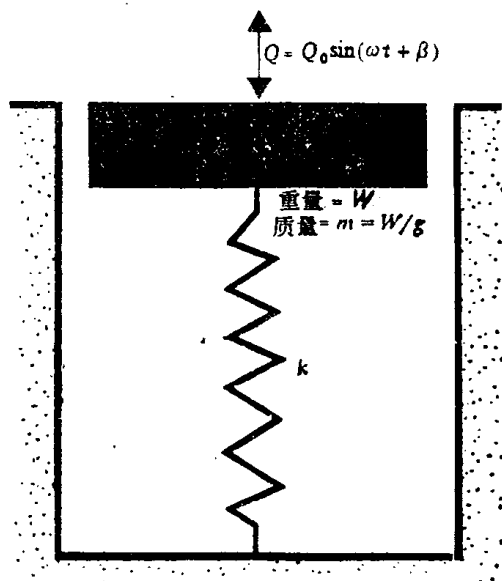


图1.6 质量—弹簧系统的强迫振动

$A_2, A_3 = \text{常数}$

将式(1-25)和(1-26)合并在一起即为式(1-23)的通解

$$z = A_1 \sin(\omega t + \beta) + A_2 \cos \omega_n t + A_3 \sin \omega_n t \quad (1-27)$$

现在令 $t = 0$ 时的初始条件为

$$z = z_0 = 0 \quad (1-28)$$

$$dz/dt = \text{速度} = v_0 = 0 \quad (1-29)$$

根据式(1-27)和(1-28)

$$A_1 \sin \beta + A_2 = 0$$

或者

$$A_2 = -A_1 \sin \beta \quad (1-30)$$

又根据式(1-27)

$$dz/dt = \dot{z} = A_1 \omega \cos(\omega t + \beta) - A_2 \omega_n \sin \omega_n t + A_3 \omega_n \cos \omega_n t$$

将式(1-29)给出的初始条件代入上式

$$A_1 \omega \cos \beta + A_3 \omega_n = 0$$

或者

$$A_3 = -(A_1 \omega / \omega_n) \cos \beta \quad (1-31)$$

合并式(1-27), (1-30)和(1-31)得

$$z = A_1 [\sin(\omega t + \beta) - \cos(\omega t) \sin \beta - (\omega / \omega_n) \sin(\omega_n t) \cos \beta] \quad (1-32)$$

对于一个真实的系统, 式(1-32)括号中的最后两项由于阻尼作用而消失了, 只剩下一项稳态解。

如果外力与振动系统同相位 (即 $\beta = 0$), 那末

$$\begin{aligned} z &= A_1 \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) = \frac{Q_0/m}{k/m - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \\ &= \frac{Q_0/k}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \end{aligned} \quad (1-33)$$

式中 $Q_0/k = z_s$ = 静力挠度。如果令 $1/(1 - \omega^2/\omega_n^2)$ 等于 M [等于放大系数或者等于 $A_1/(Q_0/k)$], 式(1-33)可写成

$$z = z_s M [\sin \omega t - (\omega/\omega_n) \sin \omega_n t] \quad (1-34)$$

放大系数 M 与 ω/ω_n 之间的变化关系用图1.7a表示。注意, 当 $\omega/\omega_n = 1$ 时, 放大系数趋向无穷大, 这就是共振。共振时, 式(1-34)右边为 $0/0$ 的形式, 根据洛必达法则 (Hopital's rule),

L

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} (z) = z_s \frac{(d/d\omega) [\sin \omega t - (\omega/\omega_n) \sin \omega_n t]}{(d/d\omega) (1 - \omega^2/\omega_n^2)}$$

或者

$$z = \frac{1}{2} z_s (\sin \omega_n t - \omega_n t \cos \omega_n t) \quad (1-35)$$

共振时, 速度可由式(1-35)求得

$$\dot{z} = \frac{1}{2} z_s (\omega_n \cos \omega_n t - \omega_n \sin \omega_n t + \omega_n^2 t \sin \omega_n t) = \frac{1}{2} (z_s \omega_n^2 t) \sin \omega_n t \quad (1-36)$$

因为速度为零时, 位移达到最大值, 所以最大位移为

$$\dot{z} = 0 = \frac{1}{2} (z_s \omega_n^2 t) \sin \omega_n t$$

或者

$$\sin \omega_n t = 0, \text{ 即 } \omega_n t = n\pi \quad (1-37)$$

式中 n 是正整数。

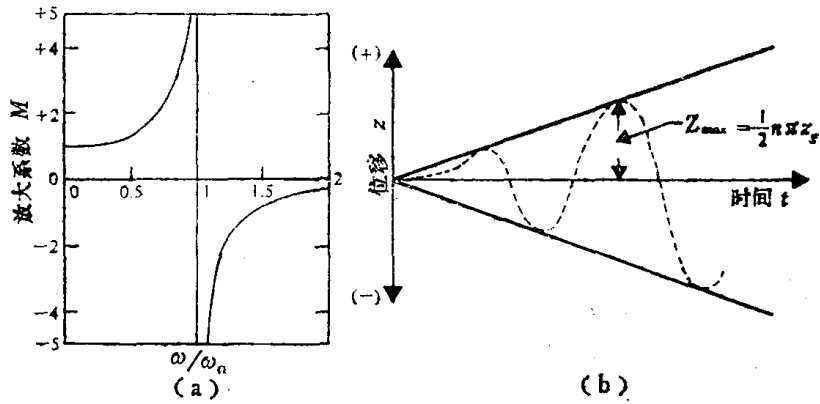


图1.7 质量—弹簧系统的强迫振动
(a) 振动放大系数与 ω/ω_n 的关系 (b) 共振时 ($\omega = \omega_n$) 振幅与时间的关系

根据式(1-37)给的条件, 由式(1-35)得

$$|z_{max}|_{\text{共振}} = \frac{1}{2} n \pi z_s \quad (1-38)$$

式中 z_{max} = 最大位移。

应该注意, 当 n 趋于无穷大时, $|z_{max}|$ 也趋于无穷大, 这会给基础带来危害。在共振时, z/z_s 与时间的变化规律由图1.7b表示。

基底上的最大作用力

基底上的最大作用力和最小作用力发生在当位移是最大值即速度为零时, 它可以由位移式(1-33)导出

$$z = \frac{Q_0}{k} \frac{1}{(1 - \omega^2/\omega_n^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right)$$

任何时候的速度为

$$\dot{z} = \frac{Q}{k} \frac{1}{(1 - \omega^2/\omega_n^2)} (\omega \cos \omega t - \omega \cos \omega_n t)$$

变形最大时, $\dot{z} = 0$

或 $\omega \cos \omega t - \omega \cos \omega_n t = 0$

因为 ω 不等于零, 所以

$$\cos \omega t - \cos \omega_n t = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\omega_n - \omega\right)t \sin\left(\frac{1}{2}\omega_n + \omega\right)t = 0$$

则 $\left(\frac{1}{2}\omega_n - \omega\right)t = n\pi; \quad t = 2n\pi/(\omega_n - \omega) \quad (1-39)$

或者 $\left(\frac{1}{2}\omega_n + \omega\right)t = m\pi; \quad t = 2m\pi/(\omega_n + \omega) \quad (1-40)$

式中 m 和 $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

式(1-39)与问题无关(拍现象)。将式(1-40)代入式(1-33), 简化后得

$$z = z_{max} = \frac{Q_0}{k} \frac{1}{(1 - \omega/\omega_n)} \sin\left(\frac{2\pi m \omega}{\omega_n + \omega}\right) \quad (1-41)$$

为了求得最大作用力, 必须由式(1-41)给出的 z_{max} 的最大值是

$$z_{max(max)} = (Q_0/k)(1 - \omega/\omega_n)^{-1} \quad (1-42)$$

所以 $F_{动(max)} = k[z_{max(max)}] = k(Q_0/k)(1 - \omega/\omega_n)^{-1} = Q_0(1 - \omega/\omega_n)^{-1} \quad (1-43)$

因此，作用在基底上的总的力将在两个极值

$$W - Q_0(1 - \omega/\omega_n)^{-1} \quad \text{和} \quad W + Q_0(1 - \omega/\omega_n)^{-1}$$

之间变化。

例1.3 一个机器基础可以理想地简化为质量—弹簧系统，作用在基础上的力为 Q (磅) = $8000 \sin \omega t$ ，已知： $f = 800$ 转/分，机器 + 基础的重量 = 40000 磅，弹簧常数 = 400000 磅/时。

求 传给基底的最大和最小作用力。

解 自振圆频率 $= \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{400000 / \left(\frac{40000}{32.2 \times 12}\right)} = 62.16$ 弧度/秒

$$F_{\text{动}} = Q_0(1 - \omega/\omega_n)^{-1}$$

而 $\omega = 2\pi f = 2\pi(800/60) = 83.78$ 弧度/秒

则 $F_{\text{动}} = 8000 / \left(1 - \frac{83.78}{62.16}\right) = 23000$ 磅

基底上最大作用力 = $40000 + 23000 = 63000$ 磅

基底上最小作用力 = $40000 - 23000 = 17000$ 磅

1.2.3 粘滞阻尼的自由振动

1.2.1 节描述的无阻尼自由振动的情况，系统一旦发生运动，振动就会一直继续下去。而实际情况是所有振动的振幅都随时间而逐渐减小，振动的这个特性称作阻尼。图 1.2b 表示一个由弹簧和阻尼器支承的基础，阻尼器代表土的阻尼特性，阻尼系数等于 c 。对于基础的自由振动(即作用在基础上的力 $Q = Q_0 \sin \omega t$ 为零)，运动的微分方程为

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = 0 \tag{1-44}$$

令 $z = Ae^{rt}$ 是式(1-44)的一个解，其中 A 是常数，将它代入式(1-44)得

$$mAr^2e^{rt} + cAre^{rt} + kAe^{rt} = 0$$

或 $r^2 + (c/m)r + k/m = 0 \tag{1-45}$

式(1-45)的解为

$$r = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \tag{1-46}$$

式(1-46)可分为三种情况：

1. 如果 $c/2m > \sqrt{k/m}$ ，式(1-45)的两个根为负实数，这称为超阻尼。
2. 如果 $c/2m = \sqrt{k/m}$ ， $r = -c/2m$ ，这称为临界阻尼，在这种情况下，

$$c = c_c = 2\sqrt{km} \tag{1-47a}$$

3. 如果 $c/2m < \sqrt{k/m}$ ，式(1-45)的根为复数

$$r = -\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

这称为弱阻尼。

现在来定义阻尼比 D ，它可表示为

$$D = c/c_c = c/(2\sqrt{km}) \tag{1-47b}$$

应用阻尼比，式(1-46)可以改写为

$$r = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \omega_n (-D \pm \sqrt{D^2 - 1}) \quad (1-48)$$

式中 $\omega_n = \sqrt{k/m}$

对于超阻尼情况 ($D > 1$),

$$r = \omega_n (-D \pm \sqrt{D^2 - 1})$$

位移方程 (即 $z = Ae^{rt}$) 可以改写为

$$z = A_1 \exp[\omega_n t (-D + \sqrt{D^2 - 1})] + A_2 \exp[\omega_n t (-D - \sqrt{D^2 - 1})] \quad (1-49)$$

式中 A_1 和 A_2 是两个常数。现在, 令

$$A_1 = \frac{1}{2}(A_3 + A_4) \quad (1-50)$$

$$\text{和} \quad A_2 = \frac{1}{2}(A_3 - A_4) \quad (1-51)$$

将式(1-50)和(1-51)代入式(1-49), 经整理后得

$$z = e^{-D\omega_n t} \left\{ \frac{1}{2} A_3 \left[\exp(\omega_n \sqrt{D^2 - 1} t) + \exp(-\omega_n \sqrt{D^2 - 1} t) \right] + \frac{1}{2} A_4 \left[\exp(\omega_n \sqrt{D^2 - 1} t) - \exp(-\omega_n \sqrt{D^2 - 1} t) \right] \right\}$$

或者, 对于 $D > 1$,

$$z = e^{-D\omega_n t} \left[A_3 \cosh(\omega_n \sqrt{D^2 - 1} t) + A_4 \sinh(\omega_n \sqrt{D^2 - 1} t) \right] \quad (1-52)$$

式(1-52)表明处于超阻尼的系统根本没有发生任何振动。 z 随时间的变化如图1.8a所示。

式(1-52)中的系数 A_3 和 A_4 可以从初始条件求得。令在时间 $t = 0$ 时, 位移 $= z = z_0$ 及速度 $= dz/dt = v_0$, 根据式(1-52)和第一个初始条件得

$$z = z_0 = A_3 \quad (1-53)$$

再从式(1-52)和第二个初始条件得

$$\begin{aligned} dz/dt &= v_0 \\ &= (\omega_n \sqrt{D^2 - 1} A_4) - D\omega_n A_3 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{v_0 + D\omega_n A_3}{\omega_n \sqrt{D^2 - 1}} \\ &= \frac{v_0 + D\omega_n z_0}{\omega_n \sqrt{D^2 - 1}} \quad (1-54) \end{aligned}$$

将式(1-53)和(1-54)代入式(1-52)

$$\begin{aligned} z &= e^{-D\omega_n t} \left[z_0 \cosh(\omega_n \sqrt{D^2 - 1} t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_0 + D\omega_n z_0}{\omega_n \sqrt{D^2 - 1}} \sinh(\omega_n \sqrt{D^2 - 1} t) \right] \quad (1-55) \end{aligned}$$

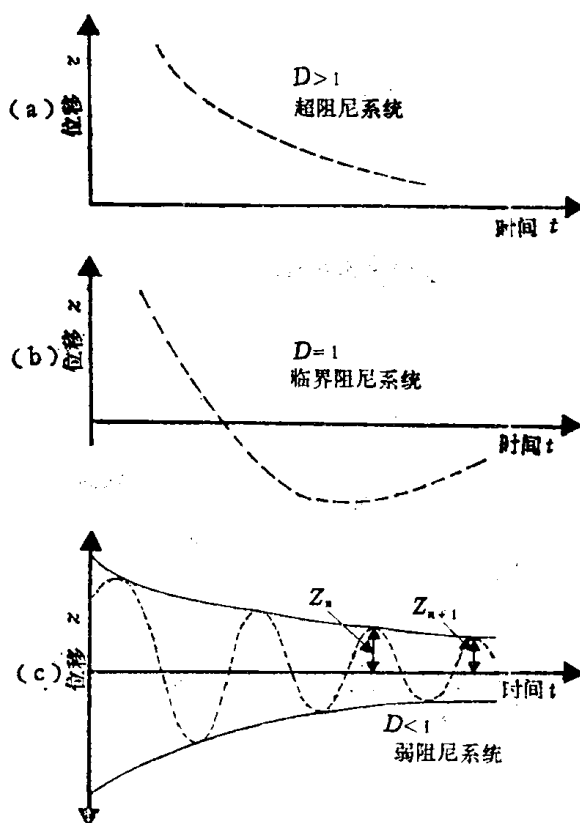


图1.8 质量—弹簧—阻尼器系统的自由振动
(a)超阻尼 (b)临界阻尼 (c)弱阻尼