

高等学校试用教材

结 构 力 学

Jiegou

Lixue

上海海运学院 余崇义 主编

人 民 交 通 出 版 社

高等学校试用教材

结 构 力 学

Jiegou

Lixue

上海海运学院 余崇义 主编

人 民 交 通 出 版 社

内 容 提 要

本书是高等学校起重运输及工程机械专业“结构力学”课程的试用教材。

全书共分九章。主要阐述结构的机动分析、静定平面结构和空间结构的内力计算、结构影响线的绘制和应用、结构的位移计算、解超静定结构的力法、位移法和力矩分配法。由于电子计算机的应用日趋广泛，本书除介绍结构矩阵分析理论外，还介绍一个用 BASIC 语言编写的平面刚架静力分析通用程序。本书在理论叙述中力求结合起重运输及工程机械的实际。

本书除作为起重运输及工程机械专业“结构力学”课程的试用教材外，还可供有关工程技术人员参考。

高等学校试用教材

结 构 力 学

上海海运学院 余崇义 主编

人民交通出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：13.75 字数：337 千

1986年12月 第1版

1986年12月 第1版 第1次印刷

印数：0001—6,550册 定价：2.00 元

目 录

绪论	1
§0-1 结构力学的研究对象和基本任务	1
§0-2 结构的计算简图及其分类	1
§0-3 载荷的分类	4
第一章 体系的机动分析	5
§1-1 概述	5
§1-2 平面体系的自由度	5
§1-3 几何不变体系的组成规律	6
习题	13
第二章 静定平面结构	16
§2-1 静定平面桁架的概述	16
§2-2 静定平面桁架的数解法	17
§2-3 静定平面桁架的图解法	27
§2-4 静定平面刚架的概述	29
§2-5 静定平面刚架内力图的绘制及校核	30
§2-6 静定结构的特性	34
§2-7 零载法	37
习题	38
第三章 静定空间结构	43
§3-1 概述	43
§3-2 空间桁架的机动分析	44
§3-3 空间桁架的内力计算	46
§3-4 空间桁架受扭计算	52
§3-5 静定空间刚架的内力计算	55
习题	57
第四章 影响线及其应用	59
§4-1 影响线的概念	59
§4-2 用静力法绘制简支梁的影响线	59
§4-3 间接载荷作用下的影响线	63
§4-4 桁架内力影响线	64
§4-5 利用影响线求量值	67
§4-6 最不利载荷位置	68
§4-7 简支梁的绝对最大弯矩	72
习题	74
第五章 结构位移的计算	77
§5-1 概述	77
§5-2 实功和变形位能	78

§5-3 虚功和虚功方程..... 81

§5-4 载荷作用下的位移公式..... 82

§5-5 图乘法..... 87

§5-6 在非载荷因素作用下位移的计算..... 92

§5-7 功的互等定理..... 97

习题.....100

第六章 力法.....103

§6-1 超静定结构的概述.....103

§6-2 超静定次数的确定.....103

§6-3 力法的基本原理.....105

§6-4 力法的典型方程.....107

§6-5 力法计算步骤及举例.....109

§6-6 力法的简化计算.....114

§6-7 超静定结构位移的计算及最后内力图的校核.....122

§6-8 空间载荷作用下的平面刚架.....125

§6-9 支座移动对超静定结构的影响.....129

§6-10 转角位移方程132

§6-11 超静定结构的特性138

习题.....138

第七章 位移法和力矩分配法.....143

§7-1 位移法的基本概念.....143

§7-2 基本未知量的确定.....144

§7-3 位移法的计算举例.....145

§7-4 经典的位移法基本原理和解题步骤.....149

§7-5 对称性利用.....153

§7-6 力矩分配法的基本原理.....156

§7-7 用力矩分配法计算连续梁和无侧移刚架.....160

习题.....164

第八章 杆系结构矩阵分析.....167

§8-1 概述.....167

§8-2 直接刚度法的基本概念.....167

§8-3 单元刚度矩阵.....170

§8-4 单元刚度矩阵的坐标变换.....174

§8-5 结构总刚度矩阵.....177

§8-6 边界约束条件处理和结点位移计算.....180

§8-7 非结点载荷的处理.....182

§8-8 用直接刚度法计算平面刚架.....183

§8-9 平面刚架的计算机程序.....194

习题.....207

附录 平面刚架静力分析程序——PFRAME.....210

绪 论

§0-1 结构力学的研究对象和基本任务

工程机械中，按一定规律组成、并支承载荷而起骨架作用的体系称为结构。如门座起重机的臂架、转台、门座（图0-1）等。

结构一般分为杆系结构、板壳结构和实体结构三大类。杆系结构是由若干杆件组合而成。本书只研究杆系结构，所以下面提“结构”是狭义地指杆系结构。

材料力学是研究单根杆件在载荷作用下的强度、刚度和稳定性。结构力学是研究结构的组成规律和合理形式，以及在载荷、温度变化等因素作用下，结构的强度、刚度和稳定性。

工程机械中的金属结构是整机的重要组成部分，其重量通常占整机的50%以上。合理地选择金属结构的结

构型式，正确地确定结构尺寸。以便设计出既牢固可靠而又轻巧的金属结构，这对提高整机的质量和经济性具有重大的意义。为了正确地设计金属结构，就必须掌握结构的组成规律、结构在载荷作用下的内力、变形和稳定性的计算方法。也就是说，结构力学是设计金属结构所必须掌握的基本理论。

结构力学是起重运输机械和工程机械类专业的一门重要技术基础课。不但要求学生掌握结构力学的基本理论，同时还要通过大量习题，培养学生的计算能力。

由于电子计算机的应用日益普及，本书除叙述经典的内容外，还增加了适应计算机编程计算的结构矩阵分析的内容。另外，有关结构稳定的内容在专业课金属结构设计的课程中有专门论述，故本书中不再重复。

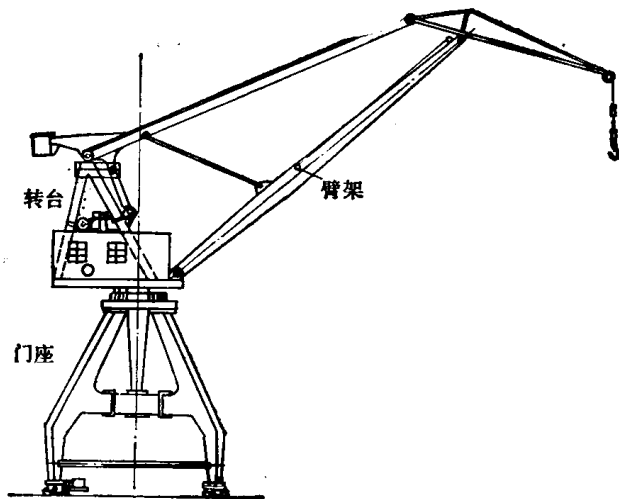


图 0-1

§0-2 结构的计算简图及其分类

一、计算简图

在工程结构设计中，需要计算结构在载荷作用下的内力和变形，但实际结构的受力和变形情况是很复杂的，要完全按实际情况进行计算是很困难的，有时甚至是不可能的。所以在实际工程计算中，总是先把实际结构的受力情况简化为既能正确地反映实际结构受力情况，

又便于计算的力学模型。一般称该力学模型为计算简图，如图0-2a)所示的一台龙门起重机，其计算简图如图0-2b)所示。

把实际结构简化为计算简图的工作一般包括三个方面，即结构的简化、支座的简化和载荷的简化。简化的原则是：

1)尽可能反映结构的主要受力特征，使计算结果尽量精确、其计算误差在工程设计允许的范围内。

2)确定的计算简图应尽量简单、以便于计算。

另外，计算简图的确定还必须考虑其他一些因素。比如在初步设计中，就可以采用比较简单、但计算精度稍差的简图。而在最后的设计验算中则应选用计算精度较高、但较复杂的计算简图。

要正确地确定一个结构计算简图是不容易的。它要求工程技术人员对整个结构的受力情况有个正确地了解，需要丰富的结构计算经验，有时还需要进行模型实验。

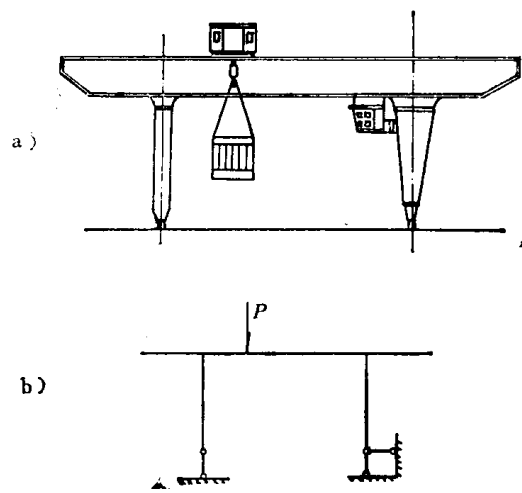


图 0-2

二、支座和结点的分类

这里只讨论平面结构的支座和结点的分类。实际结构构造型式是很多的。在计算简图中，根据其反力的特性，把支座简化归纳为四种型式：活动铰支座、固定铰支座、定向支座和固定支座。

1.活动铰支座

如图0-3a)所示，它允许结构绕铰 A 转动，同时又允许沿支承面 $m-n$ 移动，但不允许结构沿垂直 $m-n$ 方向的位移。它只有一个通过铰点 A ，垂直于 $m-n$ 的反力 R_A 。在计算简图中一般用一根链杆 AB 表示。如图0-3b)所示。

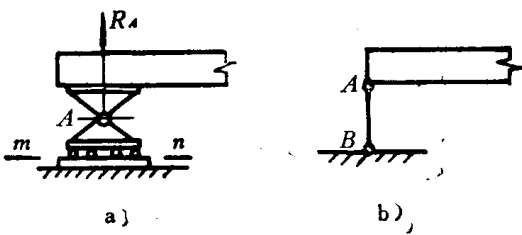


图 0-3

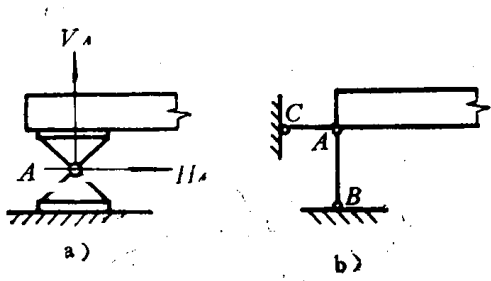


图 0-4

2.固定铰支座

如图0-4a)所示，它只允许结构绕铰点 A 转动，能产生通过铰点 A 的水平反力 H_A 和垂直反力 V_A 。在计算简图中通常用两根链杆来表示，如图0-4b)所示。

3.定向支座

如图0-5a)所示，定向支座只许结构沿某一方向移动，但不允许转动。它能产生一个垂直于移动方向的反力 R_A 和力矩 M_A 。在计算简图中通常用两根平行的链杆来表示，如图

0-5b)所示。

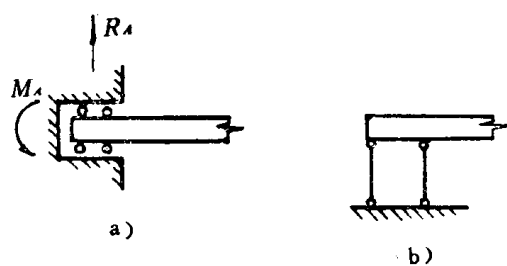


图 0-5

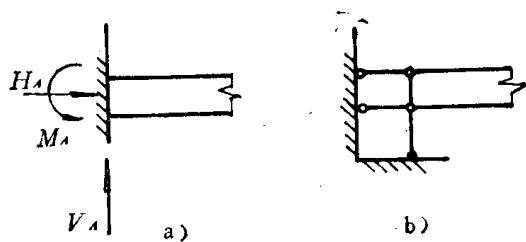


图 0-6

4. 固定支座

如图0-6a)所示，固定支座不允许结构在支座处有任何转动和移动。它能产生一水平反力 H_A 、垂直反力 V_A 和力矩 M_A 。在计算简图中可以用三根链杆来表示，如图0-6b)所示。

上述四种支座都忽略支座本身受力后的变形，故统称为刚性支座。如果考虑这种变形，则称为弹性支座。

在结构中各杆件相联结处称为结点。在计算简图中通常将结点简化为铰结点和刚结点两种。

1. 铰结点

铰结点的特征是各杆可以绕铰结点自由转动。杆件只能产生杆端力，而无杆端力矩，如图0-7所示。

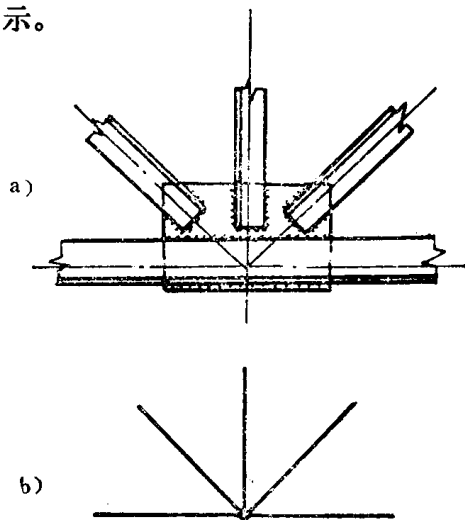


图 0-7

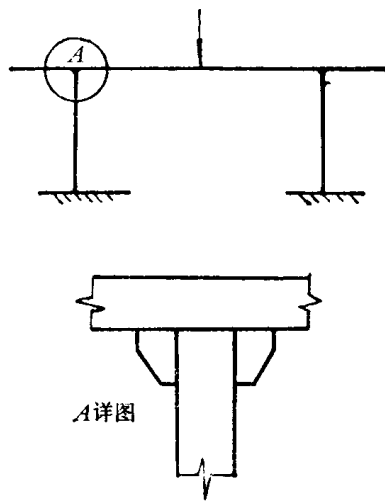


图 0-8

2. 刚结点

刚结点的特征是当结构受载发生变形时，各杆不能绕结点作相对转动，即各杆轴线间的夹角在变形过程中始终保持不变。各杆件不但能产生杆端力，同时还能产生杆端力矩，如图0-8所示。

三、杆系结构的分类

在工程结构中，杆系结构按其组成的杆件受力特征可分成三种类型：

1. 桁架结构

如图0-9所示，桁架结构是由只受轴力作用的直杆所组成，各杆之间的连接均为铰接，外力只作用在结点上。在实际工程结构中只要所有杆件以受轴力作用为主，而附加弯矩可以忽略不计时，虽然各杆件之间不是铰接连接，该杆系结构仍可以简化为桁架结构。

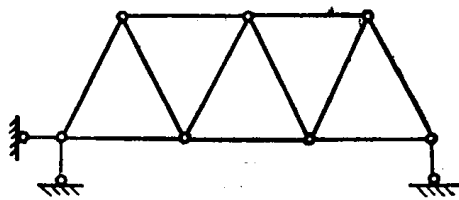


图 0-9

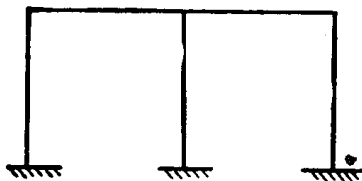


图 0-10

2.刚架结构

如图0-10所示，刚架结构是由受弯曲的杆件所组成，杆件之间多数为刚接。也就是说，它的主要特征是结构受载时各杆件以受弯曲为主。

3.混合结构

如图0-11所示，混合结构是由受弯曲杆件和受轴力杆件混合组合成的。实际上，它是桁架和刚架的混合结构。

杆系结构从几何空间角度还可以分成平面结构和空间结构。如果组成结构的所有杆件的轴线均在一个平面内，同时载荷也作用在该平面内，则该结构称为平面结构。如果组成结构的所有杆件的轴线不在一个平面内，或者载荷不作用在结构平面内，均称为空间结构。平面结构又可以分成平面桁架结构和平面刚架结构。空间结构也可以分成空间桁架结构和空间刚架结构。

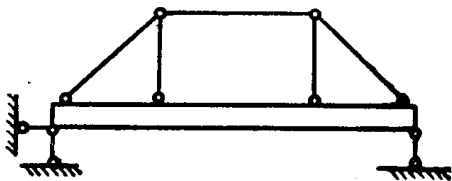


图 0-11

§0-3 载荷的分类

载荷是作用在结构上的外力，如起重机的吊重、结构的自重、风载荷等。载荷可以从不同的角度，根据不同的特点进行分类。

1.分布载荷与集中载荷

分布作用于结构上的载荷称为分布载荷，如结构自重和风载荷等。集中作用于结构某一点上的载荷称集中载荷，如起重机的吊重等。

2.静力载荷与动力载荷

静力载荷是缓慢地加到结构上，其值可以看成是不随时间变化的。动力载荷是随时间迅速变化的载荷，如冲击载荷、周期性载荷等。它将引起结构的冲击和振动。动力载荷就应该考虑它的动力影响。

3.固定载荷与移动载荷

作用点在结构上固定不变的载荷称固定载荷。作用点在结构上是移动的，则称为移动载荷。如桥式起重机上移动小车的载荷就是移动载荷。

第一章 体系的机动分析

§1-1 概 述

由若干个构件用某种联系组成的一个整体称体系。在任何载荷作用下，如果不考虑构件材料的变形，能保持其形状和位置不变的体系称为几何不变体系，如图1-1a)所示。反之，如不能保持其形状和位置的不变，而发生机械运动，则称为几何可变体系，如图1-1b)所示。很明显，由于结构要起支承载荷的作用，所以结构必须是几何不变体系。

判别结构是否为几何不变体系，以及如何正确地组成结构以保证结构是几何不变体系，这工作称为体系的机动分析或称为体系的几何组成分析。本章只讨论平面体系的几何组成分析。

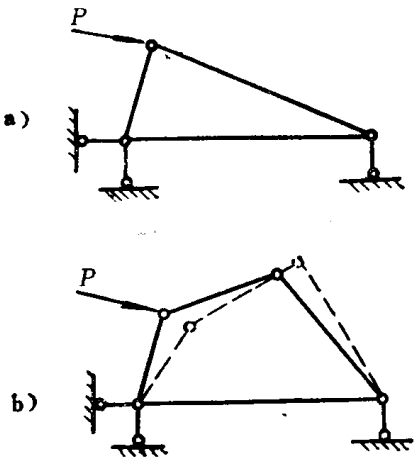


图 1-1

§1-2 平面体系的自由度

要判断一个体系是否为几何不变体系，首先要计算该体系的自由度。一个体系的自由度，就是该体系运动时可以独立变化的几何参数的数目。也就是确定该体系位置所需的独立参数的数目。

一个点在平面内运动时，可以独立变化的参数有 x 和 y 两个坐标，如图1-2a)所示。所以一个点在平面内有两个自由度。一个几何形状不变的平面体（简称刚片）在平面内运动时，可以有三个独立的几何参数 x, y 和 φ ，如图1-2b)所示。因此一个刚片在平面内有三个自由度。

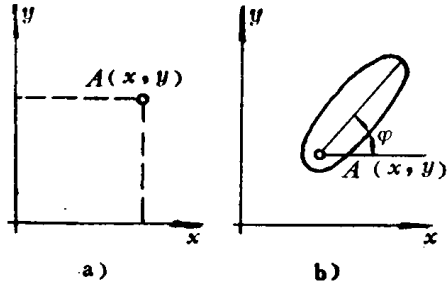


图 1-2

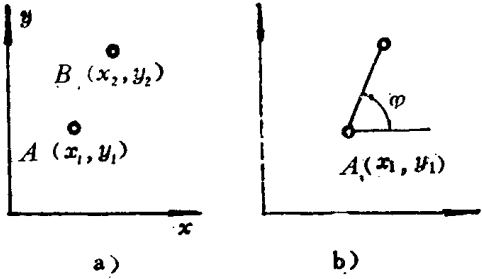


图 1-3

能使体系减少自由度的装置称联系。能减少一个自由度的装置称为一个联系。由两个自

由点 A 和 B 所组成的体系共有四个自由度，如图1-3a)所示。当它们之间用一根链杆相连接后，就只需用三个独立的几何参数 (x_1, y_1 和 φ) 来确定，如图1-3b)所示。这样，体系就从四个自由度降为三个自由度，所以一根链杆就是一个联系。

由两个自由的刚片组成的体系共有六个自由度，用一个铰将它们连接起来，该体系就由六个自由度减为四个自由度。因此一个连接两刚片的简单铰（简称单铰）是两个联系，如图1-4a)所示。连接三个刚片的铰，使体系减少四个自由度，所以它是四个联系，相当两个单铰，如图1-4b)所示。连接两个以上刚片的铰称为复铰，由上述可以推出，连接 n 个刚片的复铰，其联系数就相当 $(n-1)$ 个单铰。

一个平面体系，一般都是由若干刚片彼此用铰相联并用支座链杆与基础相联而成。该体系的计算自由度 W 为：

$$W = 3m - 2h - r \tag{1-1}$$

式中： m ——体系的刚片数；

h ——体系的单铰数；

r ——体系的支座链杆数。

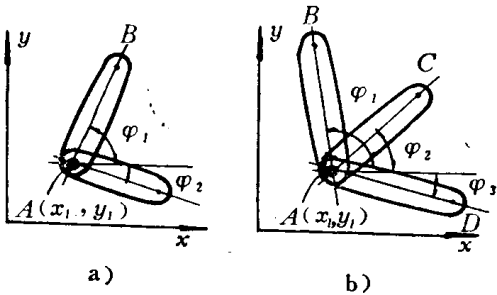


图 1-4

例如图1-5所示平面刚架，其刚片数 $m = 4$ ，单铰数 $h = 3$ ，支座链杆数 $r = 6$ 。根据公式(1-1)可得平面刚架的计算自由度为：

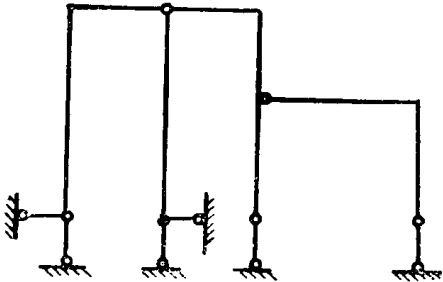


图 1-5

$$W = 3m - 2h - r = 3 \times 4 - 2 \times 3 - 6 = 0$$

在算单铰数 h 时要注意不能把刚片与支座链杆相连接的铰计算进去。分析复铰时应根据它所连接刚片数来确定它相当几个单铰。

如果平面体系是平面桁架结构，用公式(1-1)来计算体系的计算自由度是不方便的。而把结点看成是具有两个自由度的点，把杆件看成是连接各点的链杆，即看成是一个联系。这样，计算平面桁架计算自由度的公式为：

$$W = 2j - b - r \tag{1-2}$$

式中： j ——平面桁架的节点数；

b ——平面桁架内部的链杆数；

r ——平面桁架的支座链杆数。

例如图1-6所示平面桁架，其节点数 $j = 6$ ，内部链杆数 $b = 9$ ，支座链杆数 $r = 3$ 。它的计算自由度为：

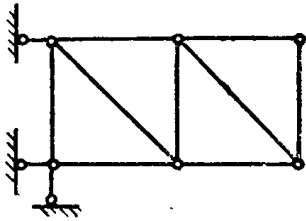


图 1-6

$$W = 2j - b - r = 2 \times 6 - 9 - 3 = 0$$

§1-3 几何不变体系的组成规律

从几何不变体系的定义即可得出，几何不变体系必须是体系的计算自由度 $W \leq 0$ ，因为当体系的计算自由度 $W > 0$ 时一定是几何可变体系。但是体系的计算自由度 $W \leq 0$ 并不能保证体系一定是几何不变体系。如图1-7所示的两个平面桁架，其计算自由度均为零。但很明显，图1-7a)桁架为几何不变体系，而1-7b)桁架则是几何可变体系。为什么一个计算自由度

为零的体系而又是几何可变的，即该体系实际存在自由度？这是由于一个联系只具有使体系减少一个自由度的可能，但不一定使体系减少一个自由度。要使体系减少一个自由度，还要靠合理地布置。如图 1-7 b) 中杆 3-6 由于安排不当就不能使体系减少一个自由度。因此，该体系虽然计算自由度 $W=0$ ，而体系的实际自由度为 1。故用公式(1-1)和(1-2)计算出来的自由度称为计算自由度，以区别实际的自由度。

通过上面分析可以看出，体系的计算自由度 $W \leq 0$ 只是几何不变体系的必要条件，而不是充分条件。要完全判别体系的几何不变性，还要进一步研究几何不变体系的组成规律。

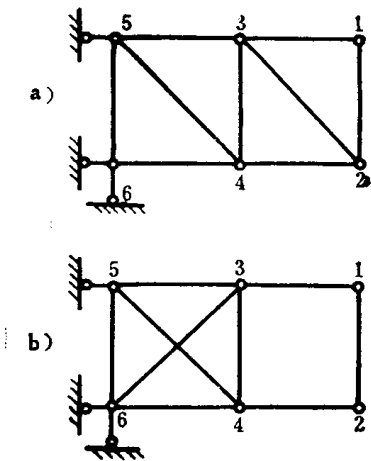


图 1-7

一、二元体规律

如图1-8所示，在一个刚片上增加两根不在一直线上的链杆 AC 和 BC ，在两链杆的另一端用铰 C 相连接。这种用两根不在一直线上的链杆连接一个新结点的构造称为二元体。

假设刚片固定不动，结点 C 如果只受 AC 链杆约束，则沿圆弧 m 运动。如果只受 BC 链杆约束，则沿圆弧 n 运动。当结点同时受 AC 和 BC 链杆约束，则它只有一个确定的位置，即两圆弧的交点。所以这体系是几何不变体系。这样，就得到二元体规律：一个刚片和一个结点用不在一直线上的两根链杆相连接，则组成一几何不变体系。也就是说，一个几何不变体系加上一个二元体，其所组成的新体系仍是一个几何不变体系。它的逆过程也是正确的，即如果将一个体系拆去一个二元体，所得体系仍是一个几何不变体系，则原体系也一定是几何不变体系。用二元体规律来分析桁架的几何不变性是很方便的。

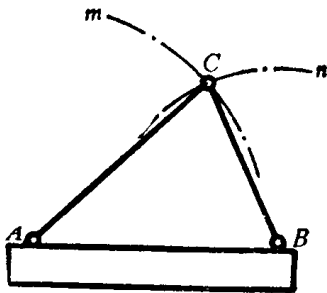


图 1-8

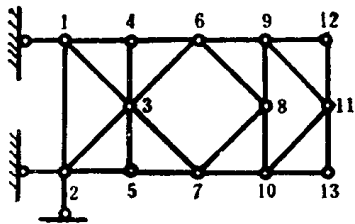


图 1-9

如图1-9所示桁架，先以铰接三角形1-2-3（它由三根支座链杆支承，很容易看出，它是一个几何不变体系）为基础，加一个二元体1-4-3，所组成的新体系1-2-3-4仍是一个几何不变体系。再加一个二元体2-5-3，所组成的新体系1-4-3-5-2还是一个几何不变体系，以此类推……。最后可得如图1-9所示桁架是一个几何不变体系。反过来进行也可以，将图1-9所示桁架拆去二元体10-13-11，再拆二元体11-12-9，以此类推……。最后得被支承在三根支座链连上铰接三角形1-3-2是一个几何不变体系。那么，根据二元体规律原桁架也一定是一个几何不变体系。

有人问，为什么二元体的两根链杆要规定不在一直线上，如果在一直线上，如图1-10所

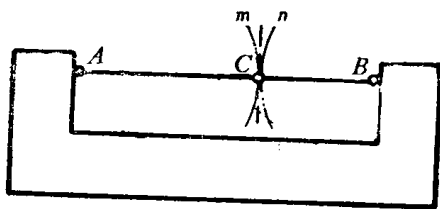


图 1-10

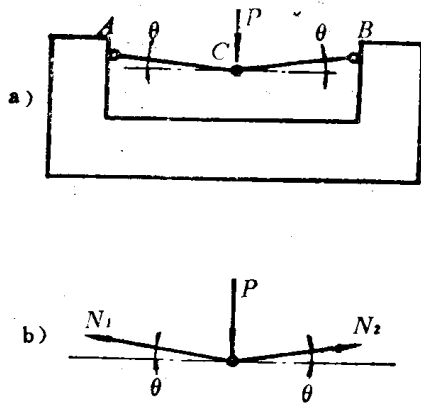


图 1-11

示，那体系将会怎样呢？由于链杆 AC 和 BC 在一条直线上，因此对应的圆弧 m 和圆弧 n 将在 C 点相切。这时结点 C 将可以沿两圆弧的公切线做微小移动。但发生微小移动之后，链杆 AC 和 BC 将不在一条直线上。这样移动也就不再继续了。这种在某一瞬时可以产生微小移动的体系称为瞬变体系。瞬变体系是几何可变体系的一种特殊形态。工程结构是不允许采用瞬变体系，其原因分析如下：

如图1-11a)所示的瞬变体系，链杆 AC 和 BC 的长度相等。在 C 点作用一垂直力 P 时，链杆 AC 和 BC 将产生一很小的倾角 θ 。取 C 点为隔离体，如图1-11b)所示，通过隔离体的力的平衡方程，得：

$$\sum \bar{X} = 0 \quad N_2 \cos \theta - N_1 \cos \theta = 0$$

$$N_2 = N_1 = N$$

$$\sum \bar{Y} = 0 \quad 2N \sin \theta - P = 0$$

$$N = \frac{P}{2 \sin \theta}$$

从上式中可以看出，当 θ 很小时，杆件内力 N 将很大。当 θ 角趋于零时，内力 N 就趋于无穷大。这表明，如果工程结构采用瞬变体系时，即使外载荷不大，也会产生很大的内力，从而导致结构的破坏。另外还应特别指出，工程结构不但不能采用瞬变结构，同时还应避免采用接近于瞬变的结构。

二、两刚片规律

若将图1-8所示的二元体中 AC 链杆看成刚片，如图1-12所示，则二元体规律将演变成两刚片规律。即两个刚片用一个铰和一根不通过此铰的链杆相连接，则组成一几何不变体系。

两刚片用两根链杆相连接就相当于一个铰连接，如图1-13所示。设刚片②不动，在刚片①相对刚片②移动时， A 点将垂直于链杆 AB 运动， C 点将垂直于链杆 CD 运动。因此，刚片将围绕 AB 和 CD 延长线的交点 O 转动。由于这转动中心的位置是变化的，所以 O 点称为刚片①和②的相对转动瞬心，又称为虚铰。

如果用虚铰代替实铰，即用三根链杆连接两刚片，如图1-14a)所示。这时，两刚片的组成规律是：两个刚片用三根既不完全平行也不汇交于一点的链杆相连接，则组成几何不变体系。三根链杆相交于一点，就意味着第三根链杆将通过前二根链杆所组成的虚铰。另外，三

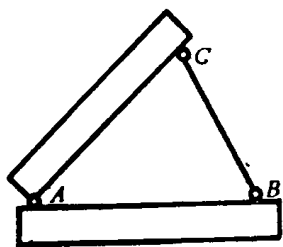


图 1-12

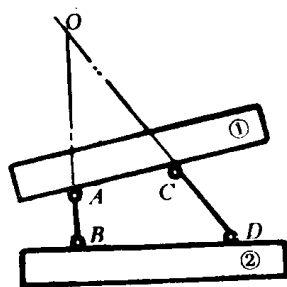


图 1-13

根平行的链杆就相当于它们在无穷远处相交于一点，如图1-14b)和图1-14c)所示，它们都是瞬变体系。用三根平行且相等的链杆连接两刚片，则组成一几何可变体系。因为在刚片①相对刚片②的移动过程中三根链杆始终是平行的，如图1-14d)所示。

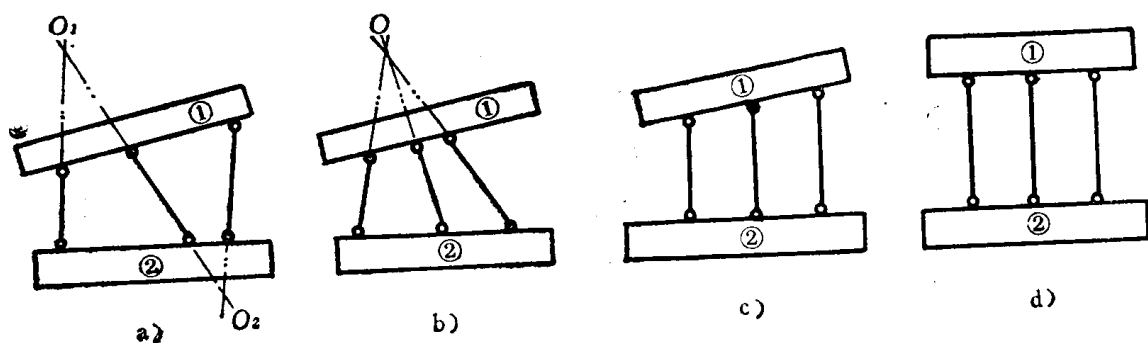


图 1-14

三、三刚片规律

如果将图1-8所示，二元体中 AC 和 BC 链杆看成两个刚片，这样，二元体规律就变成三刚片规律：三刚片用三个铰两两相联，且三个铰不在一直线上，则组成一几何不变体系，如图1-15所示。所谓两两相联就是每两个刚片之间均用一个单铰相连接。

上述几条规律虽然表达方式不同，但在实质上是一致的，即不在一直线上的三个铰，组成一个铰接三角形，则该体系为几何不变体系。这铰可以是实铰，也可以是由两根相交的链杆所组成的虚铰。

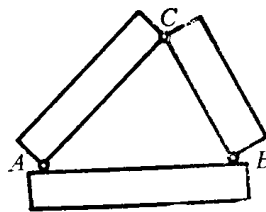


图 1-15

通过上面的讨论，可以得到下面几点结论：

- 1) 若体系的计算自由度 $W > 0$ ，体系一定是几何可变的。
- 2) 若体系的计算自由度 $W = 0$ ，则表明它是无多余联系的体系，可能是几何不变体系，也可能是几何可变（或瞬变）体系，这要由机动分析来确定。
- 3) 若体系的计算自由度 $W < 0$ ，则表明它是有多余联系的体系，可能是几何不变体系，也可能是几何可变（或瞬变）体系。这也要由机动分析来确定。

结构几何组成规律虽然只有几条，但是要学会灵活地应用它是不容易。下面通过具体例题来说明对结构进行机动分析时应如何灵活应用这几条规律。

例题1-1 试对图1-16a)所示桁架进行机动分析。

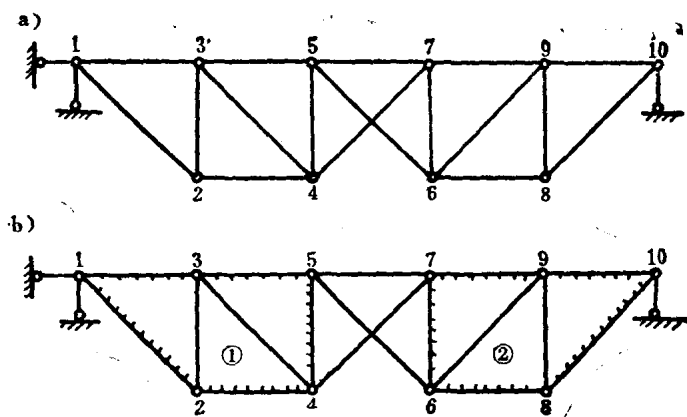


图 1-16

解：首先按公式(1-2)计算体系的计算自由度：

$$W = 2j - b - r = 2 \times 10 - 17 - 3 = 0$$

计算结果表明该体系具有几何不变所必需的联系数。

接着，对它进行几何组成分析。根据二元体规律，可以将桁架看成由刚片 1-2-4-5-3 和刚片 10-9-7-6-8 用三根不交于一点的杆件 5-7、4-7、5-6 相连接而成。另外，整个桁架又有三根不交于一点的支座链杆相连接。如图1-16b)所示。所以，根据两刚片规律，该桁架是几何不变体系。

例题1-2 试对图1-17a)所示桁架进行机动分析。

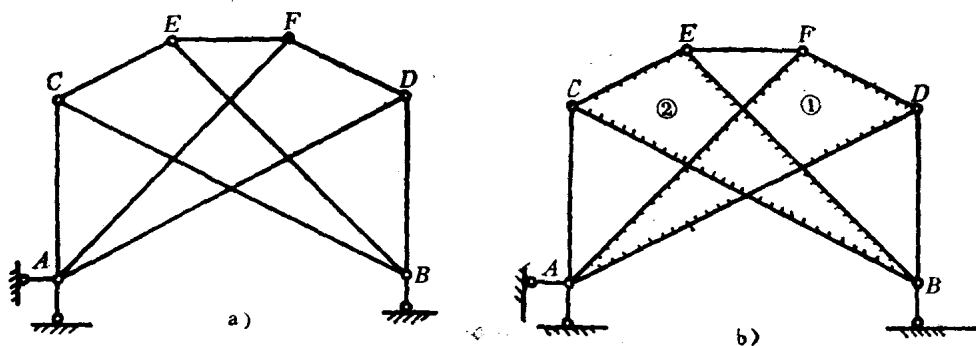


图 1-17

解：首先按公式(1-2)进行体系计算自由度的计算：

$$W = 2j - b - r = 2 \times 6 - 9 - 3 = 0$$

它表明体系具有几何不变所必需的联系数。

接着对体系进行几何组成分析。将铰接三角形 ADF 和 BCE 看成刚片①和②，它们之间用杆件 AC 、 EF 、 BD 相连接，如图1-17b)所示。由于三根杆件不交于一点。另外，三根支座链杆也不相交于一点。根据两刚片规则，该桁架是几何不变体系。

例题1-3 试对图1-18a)所示刚架进行机动分析。

解：根据公式(1-1)计算刚架的自由度：

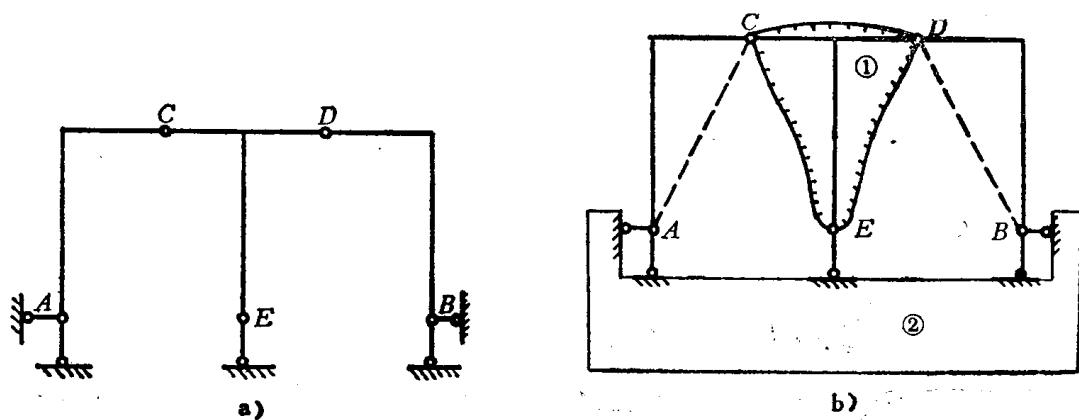


图 1-18

$$W = 3m - 2h - r = 3 \times 3 - 2 \times 2 - 5 = 0$$

它表明，该刚架具有几何不变所必需的联系数。

在计算单铰的数目 h 时，应当注意只能计算连接刚片与刚片之间的铰。

将刚架 CDE 看成一个刚片①，基础和 A、B 两点的支座链杆组成刚片②，将刚架 AC 和 BD 看成是连接刚片①和②的杆件，如图1-18b)所示。这样，刚片①和②之间由杆件 AC 和 BD 以及支座链杆 E 来连接，由于三根杆件相交于一点，根据两刚片规律，该体系是瞬变体系。

例题1-4 试对图1-19a)所示桁架进行机动分析。

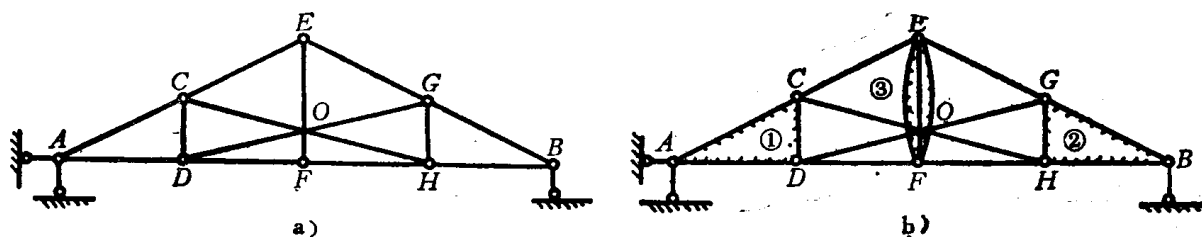


图 1-19

解：按公式(1-2)计算该体系的计算自由度：

$$W = 2j - b - r = 2 \times 8 - 13 - 3 = 0$$

计算结果表明该桁架满足几何不变所需的联系数目。

把三角形 ACD、BGH 和杆件 EF 看成三个刚片，它们通过杆件 CE、DF、EG、FH、CH 和 DG 两两相连接，其对应的虚铰为 A、B 和 O，如图1-19b)所示。三个虚铰不在一直线上，满足三刚片规律。所以桁架本身是几何不变的。同时，三根支座链杆也满足几何不变的要求。因此，该桁架是几何不变的。

例题1-5 试对图1-20a)、c)所示体系进行机动分析。

(1)分析图1-20a)中的体系：

解：按公式(1-2)计算体系的计算自由度为：

$$W = 2j - b - r = 2 \times 6 - 8 - 4 = 0$$

它表明该体系具有几何不变所必需的联系数。

很容易看出，该体系本身是几何可变的，而支座链杆有四根，有多余联系。在这种情况下

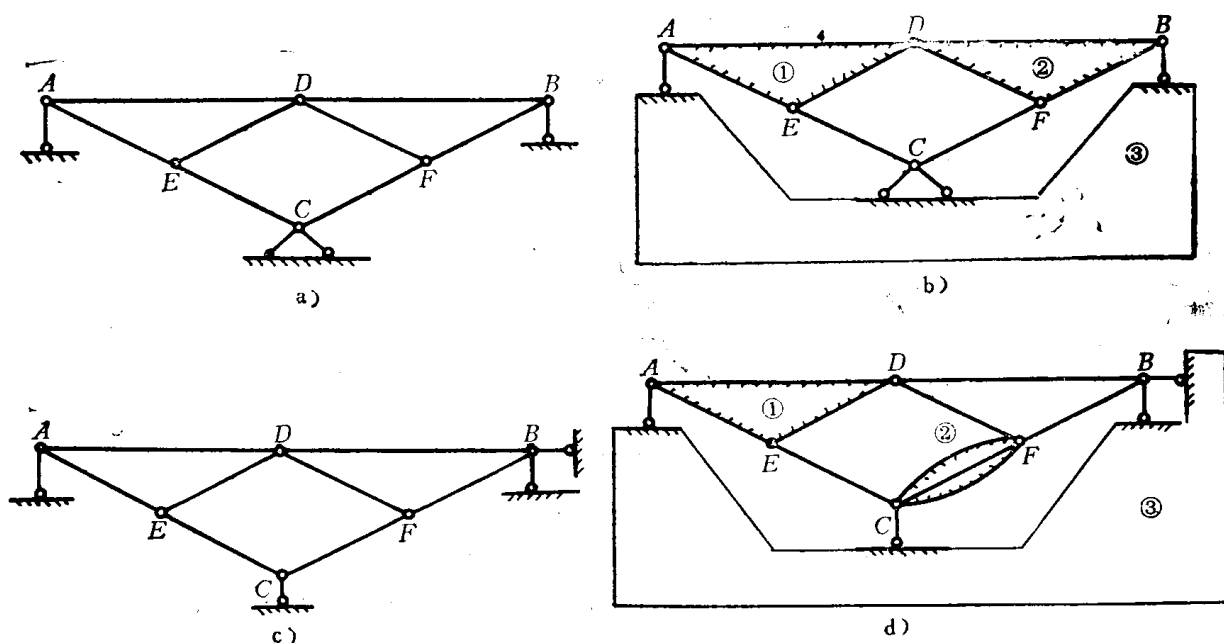


图 1-20

下，必须将桁架和基础合在一起研究。将三角形 ADE 和 BDF 看成是两个刚片，把基础看成第三个刚片，如图 1-20b) 所示。刚片①和②之间有铰 D 相连接，刚片①和③之间有杆件 CE 和支座链杆 A 相连接，其虚铰位于 A 点。刚片②和③之间有杆件 CF 和支座链杆 B 相连接，其虚铰位于 B 点。由于三刚片的三个铰 A 、 B 、 D 位于一直线上，所以该体系是瞬变体系。

(2) 分析图 1-20c) 中的体系：

解：它的计算自由度与 1-20a) 图中的体系一样，即 $W = 0$ 。所以也具有几何不变所需的联系数目。

该体系不能再将两个三角形 ADE 和 BDF 看成两个刚片，因为按这思路分析下去， EC 和 FC 将不是刚片①和②与基础刚片的联系杆件，这时应用三刚片规律将发生困难。该题必须将三角形 ADE 看成刚片①，杆件 CF 看成刚片②，基础看成刚片③，如图 1-20d) 所示。刚片①和②之间有两根平行的杆件 EC 和 DF 相连接，其虚铰位于 EC 的延长线上。刚片①与刚片③之间有支座链杆 A 和杆件 BD 相连接，其虚铰位于 A 点。刚片②与刚片③之间有支座链杆 C 和杆件 FB 相连接，其虚铰位于 C 点。这样，三个虚铰在一直线上，根据三刚片规律，该体系为瞬变体系。

从上面几个例题中可以看出，在应用几何组成规律解题时应注意下列几点：

1) 解题时应首先运用二元体规律分析结构中存在那些几何不变构造单元。根据解题的需要将它看成刚片或杆件，这是解题的基础。

2) 解题时究竟将哪个几何不变单元看成刚片，哪个看成是联系杆件，这要根据解题的需要灵活掌握。既可以将一根杆件看成是一个刚片，如图 1-19b) 中 EF 杆和图 1-20d) 中 CF 杆。也可以相反地将一个刚片（用两个铰与体系其他部分相联系的刚片）看成是一根杆件，如图 1-18b) 中 AC 和 BD 刚架，这是解题的关键。

3) 当结构本身缺少必要的联系数是几何可变时，而支座链杆又有多余，即 $r > 3$ 。这时