

芝加哥大学

高等物理试题与解答

JEREMIAH A. CRONIN | DAVID F. GREENBERG

VALENTINE L. TELEGDI

宁夏大学物理系 译

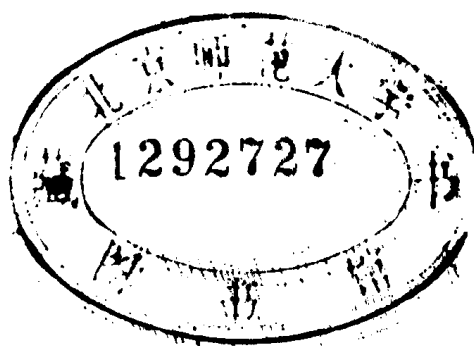
宁夏回族自治区物理学会

JY11182/24

高等物理试题与解答

芝加哥大学 物理系 编

宁夏大学 物理系 译



宁夏回族自治区物理学会

1 9 8 2

封面设计：肖颂

芝加哥大学

高等物理试题与解答

宁夏大学物理系译

宁夏回族自治区物理学会出版

宁夏大学印刷厂印刷

字数：244,000

印数：1—5000

工本费：1.80元

说 明

芝加哥大学物理系的研究生在获准攻读哲学博士学位之前，必须通过经典与近代物理基础的综合考试。本书就是该系历年这种考试试题的选集。译文是根据1979年版本翻译的。

原编者所选试题适合于该校两年研究生的水平。与我国情况相比，我们认为本书中大部分内容适合国内大学物理系本科学生在学过普通物理、理论物理等基础课后阅读。量子力学、固体物理、核物理中的部分内容则需学过选修课后阅读。本书中有一些新颖的选题和许多别具特色的解法，每题的解答简明扼要，力求避免重述一般教科书上的材料。因此本书不仅可以帮助物理系本科高年级学生特别是报考研究生者检验对经典与近代物理基础知识的掌握程度，并加深对这些内容的理解；而且对大专院校理工科物理教学都有参考价值。

原书题解中有几处译者认为欠妥，已作了改动并加了译者注。至于原书中许多明显的印刷错误，凡发现者均已改正，但未加译注。为使本书尽快与读者见面，本书的译、校工作都是采用集体突击的方式搞的。徐核、李鹤林、魏一鸣、郑璐石、张磐兰、刘建宏、张碧林、刘军、黄静分别为数学物理、电磁学、电子学、光学、量子力学、原子物理、固体物理、核物理、实验、附录各部分提供了初译稿。刘庆云翻译了力学部分。张大濯承担了数学物理、原子物理两部分的审校工作，汪锡沧承担了量子力学、核物理以及部分实验的审校工作。其余的翻译、审校以及总的校对由张奎承担。译、校者水平本来很有限，再加上“突击”，致使译、校工作都很粗糙，不妥之处尚且难免，又何谈文字推敲。敬希读者见谅，并给予批评指正。

宁夏是个落后地区。只靠本区力量印刷公式如此复杂的物理学书籍，在宁夏还是首次。宁夏大学印刷厂工人同志克服了印刷设备简陋与不足所带来的重重困难，终于使这本书与读者见面，对此我们表示衷心感谢。

宁夏大学物理系 1982. 12.

符号说明：因印刷厂没有斜体上下角字模，所有希腊文、英文的上下角均采用正体。英文正体小写 l （正体为 l ）与 1 相似，为了避免与 1 混淆，采用了倒排方法。即 l 代表斜体 l ，例如 q_l, r_l 等。此外还有极个别的黑体上角，因没有字模，采用了普通体，特此说明。

目 录

试 题:

1. 数学物理.....	(1)
2. 力学.....	(5)
3. 电磁学.....	(9)
4. 电子学.....	(14)
5. 光学.....	(15)
6. 量子力学.....	(17)
7. 热力学.....	(21)
8. 统计物理.....	(24)
9. 原子物理.....	(26)
10. 固体物理.....	(28)
11. 核物理.....	(29)
12. 实验.....	(34)

解 答

1. 数学物理.....	(40)
2. 力学.....	(52)
3. 电磁学.....	(67)
4. 电子学.....	(83)
5. 光学.....	(85)
6. 量子力学.....	(90)
7. 热力学.....	(110)
8. 统计物理.....	(120)
9. 原子物理.....	(127)
10. 固体物理.....	(135)
11. 核物理.....	(141)
附录: 常用资料.....	(162)

一 数 学 物 理

1. 某地区按下述特定方式实行节育, 每对双亲可以连续生育, 直到有一个男孩出生为止。若不实行节育, 婴儿中男孩占51%, 问该地区男孩与女孩的比例是多少?
2. 立方形的骰子, 六面颜色各不相同。若只用六种颜色, 问:
 - (a) 能做出多少种不同的骰子?
 - (b) 作成一对骰子有多少种方法?
3. 正八面体各面涂上不同颜色。若只用八种颜色, 能作出多少种不同的八面体?
4. 52张扑克牌有四种花色, 每种13张。将它们分发给两个队(每队两人), 问其中某队最少得到一整套同花牌的概率是多少?
5. 某过程具有如下性质: 在 $[t, t+h]$ 间隔内发生一事件的概率为 λh , 与以前发生什么情况无关。假定在此区间内发生更多事件的概率等于 h 的高次方项, 试取 h 趋于零的极限确定在 $0-t$ 时间内发生 n 个事件的概率, 并用这个分布函数求 n 和 n^2 的平均值。
6. 肉眼可以看清的星球约有6500个。有时两个星看起来非常靠近, 可是通过仔细研究发现它们之间并没有物理上的联系, 这样一对星体称为光学双星。
 - (a) 假设星球在天穹中是随机分布的, 试计算角距不大于 $1'$ 的光学双星数目的期望值。
 - (b) 只有两个光学双星的概率是多少?
 - (c) 粗略估算一个光学三重星的概率。

7. 已知

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求此矩阵的本征值和归一化的本征矢。

8. 设 λ_i ($i=1, 2, 3$) 是矩阵 H 的本征值, 计算和式

$$(a) \sum_{i=1}^3 \lambda_i, \quad (b) \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2.$$

其中: $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

9. 计算 $T = \text{Tr}[\exp(i\sigma \cdot a)\exp(i\sigma \cdot b)]$, 其中 σ 的分量是三个标准的自旋 $\frac{1}{2}$ 的泡利矩阵。

10. 假定有一对称二秩张量 T , 其分量为 $T_{ik} (i, k=1, 2, 3)$ 。

(a) 证明相对于坐标变换有三个与 T 有关的不变量, 譬如说 I_3, I_1, I_2 。

(b) 把曲面 $1 = \sum_{i,k} T_{ik} X_i X_k$ (X_i = 笛卡尔坐标) 和 T 联系起来, 根据曲面的性质来说明三个不变量的意义。

11. 下列函数在给定点的留数是多少?

(a) $\frac{e^{1/z}}{z^6}$ 在 $z=0$ 处

(b) $\frac{1}{\sin^3 z}$ 在 $z=0$ 处。

12. 计算 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(k^2 - a^2 - i\epsilon)^3}, \quad a > 0.$

13. 计算 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx.$

14. 计算 (a) $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1},$ (b) $I_3 = \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$

15. 将 $f(x) = \cos(x^2)$ 展开为傅立叶积分。

16. 将拉普拉斯变换

$$\frac{a^2}{p^2 + a^2} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

反演, 求 $f(t)$

17. 计算 $\int_0^{2\pi} d\phi / (\alpha + \cos \phi)$

(a) 当 $\alpha > 1$; (b) 当 $\alpha = \alpha_0 + i\epsilon$, α_0 和 ϵ 都是实数, $\epsilon > 0$, 而且当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $0 < \alpha_0 < 1$, (c) 当 $\alpha = -1$ 。

18. 求 $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx / \cosh x,$ $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx / \cosh^3 x.$

19. 求 $I = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{b + a \cos \phi}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \phi}, \quad ||a| \neq |b|.$

20. 伽玛函数定义为

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(x) > 0.$$

证明当 $0 < x < 1$,

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} \cos t dt = \Gamma(x) \cos \frac{\pi x}{2},$$

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} \sin t dt = \Gamma(x) \sin \frac{\pi x}{2}.$$

21. 绕一适当的围道对 $e^{1/z} / \sinh(\pi z)$ 积分, 从而证明

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh(ax)}{\sinh(\pi x)} dx = \frac{1}{2} \tan \frac{a}{2}, \quad -\pi < a < \pi.$$

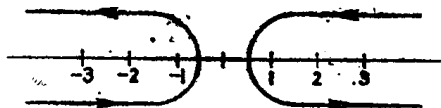
22. 用围道积分计算

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{1+x^2}.$$

将你所选的围道和全部极点、分支切割在复平面上示出。

23. 用围道积分法计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}$$



[提示: 利用函数 $1/(\sin z\pi)$ 沿实轴在 $z=0$,

$\pm 1, \pm 2, \dots$ 有极点这一事实, 考虑右上图中的围道。]

24. 假定有一解析函数

$$F(z) = \rho(z) \ln \left[1 - \frac{2z}{a} (1 - \rho(z)) \right]$$

其中 $\rho(z) = \sqrt{(z-a)/z}$, a 为正实数。选择 $\rho(z)$ 的支线沿实轴从 $-\infty$ 到 0 、以及从 a 到 ∞ 。

(a) 讨论 $F(z)$ 的黎曼面

(b) 证明对其中一叶 $F(z)$ 可以表示成下述形式

$$F(z) = F(z_0) + (z - z_0) \int_a^{\infty} ds \frac{W(s)}{(s-z)(s-z_0)}$$

並确定 $W(s)$

25. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+x^2)^n},$ 其中 n 为正整数。

26. 计算 $f(a, b) = \int_0^{\infty} (dx/x) (e^{-x^a} - e^{-x^b}).$

27. 求下列无穷级数的和

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \quad |x| < 1.$$

28. 厄米多项式 $H_n(x)$ 的生成函数为

$$F(x, t) = \exp[x^2 - (t-x)^2] = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x) t^k / k!.$$

(a) 将 $H_n(x)$ 表示成一个围道积分。

(b) 证明 $H_n(x)$ 满足厄米微分方程

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - 2x \frac{dH}{dx} + 2nH = 0.$$

(c) 导出关系式 $\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x).$

29. 勒让德多项式 $P_l(x)$ 的生成函数为

$$G(x, r) = \frac{1}{(1 - 2xr + r^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x), \quad x = \cos \theta, |r| \leq 1.$$

证明 $xP_l'(x) = P_{l-1}'(x) + lP_l(x)$ 其中 $P_l'(x) = dP_l(x)/dx$ 。

30. 已知 $e^{(\mu/2)(z-1/z)}$ 的罗朗级数为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n$ 其中 $A_n = J_n(\mu)$ 。

试将贝塞尔函数 $J_n(\mu)$ 表示成一个三角函数从 $-\pi$ 到 π 的积分。

31. 在 $z=0$ 平面上, 函数 $\phi(x, y)$ 已知。求适用于 $z>0$ 的拉普拉斯方程的解 $\psi(x, y, z)$, 这个解在 $z=0$ 平面上约化为 $\phi(x, y)$ 。

32. 证明 $K_0(x) = \int_0^{\infty} \exp(-x \cosh \phi) d\phi$

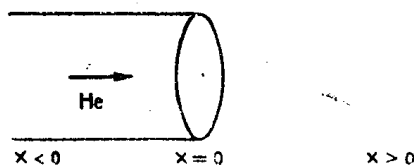
满足零阶虚宗量贝塞尔方程, 即 $K_0(x) = J_0(ix)$ 。证明当 x 很大时 $K_0(x)$ 具有渐近形式 $D e^{-x}/\sqrt{x}$ 并给出常数 D 的值。

33. 在一环面上计算 $\int \mathbf{r} \cdot d\mathbf{A}$ 。

34. 计算四维单位球体的体积:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \phi_2 \sin \phi_1 \cos \phi, & x_3 &= r \sin \phi_2 \cos \phi_1, \\ x_2 &= r \sin \phi_2 \sin \phi_1 \sin \phi, & x_4 &= r \cos \phi_2. \end{aligned}$$

35. 氦气以速度 v 无湍流地顺着一根管子流向大气。在距管子末端很短的一段距离内, 氦的浓度已迅速稀释到基本为零的程度。试将管内空气浓度作为到管端距离的函数, 建立其微分方程, 并求出它的解。采用平衡条件、忽略管壁摩擦和末端效应, 并假定没有温度差, 而且 O_2 和 N_2 向 He 的扩散系数都等于 D 。



36. 描述链式反应堆里中子密度的方程为 $\nabla^2 n + K^2 n = 0$ 。

(a) 借助于中子密度在反应堆内处处为有限正数, 在反应堆外等于零这个条件, 对于给定的 K 值找出球形反应堆的半径。

(b) 假设将厚度为 t 的材料薄层加到表面上, 层内中子密度由 $\nabla^2 n - \mu^2 n = 0$ 描述。假定在界面上 n 和 n 的梯度都连续, 并要求反应堆和附加层之外 n 等于零。对一定的 K, μ, t , 求内部区域半径的表达式。假定 $K \ll \mu$, 导出有附加层和没有附加层时半径之差的近似关系式。

37. 位于长方石墨柱轴上的中子点源每秒发射 10^6 个中子。若石墨柱截面边长为 150 厘米, 中子扩散系数为 $D = \lambda v/3$, v 是中子速度, $\lambda = 2.8$ 厘米是中子散射的平均自由程, 并忽略慢化和俘获效应, 试计算通过轴上距中子源 1 米处的中子流。

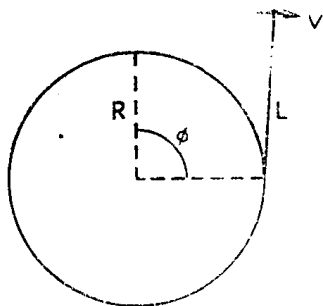
二 力 学

1. 假定粘滞力与流体的密度 ρ 无关, 通过量纲分析导出斯托克斯定律。当这个假定不成立时, 会发生什么情况?

2. 在水下深处由爆炸产生一气泡, 以周期 $T \sim p^a d^b e^c$ 振动, 其中 p 是静压强、 d 是水的密度、 e 是爆炸的总能量, 求 a 、 b 和 c 。

3. 一卫星进入距离地心 R_0 的圆形轨道。由上层稀薄大气所引起的粘滞力的数值为 $F_0 = Av^n$, 式中 v 是卫星的速度。注意径向距离 r 的变化率可以表示为 $dr/dt = -C$, 其中 C 是一个足够小的正常数, 因此每一圈所损失的能量远小于总动能。求 A 和 n 的表达式。

4. 一质点 m 不受外力, 用没有重量的绳子系在半径为 R 的圆筒上。最初绳子完全绕在圆筒上, 质点与圆筒接触。现给质点一个径向冲击力, 使其离开圆筒。

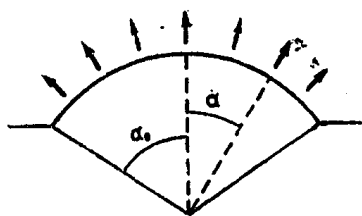


(a) 求采用适当广义坐标时的运动方程。

(b) 找出满足初始条件的一般解。

(c) 利用(b)的结果, 求质点对圆筒轴的动量矩。

5. 草地喷水器的球面喷头($\alpha_0 \approx 45^\circ$)有大量相同的小孔, 水以速度 v_0 由小孔喷出。如果小孔距离均匀分布, 草地就不能均匀喷洒。要使草地在圆形面积内喷洒均匀, 单位面积小孔的数目 $\rho(\alpha)$ 应如何选择? 假设喷头的半径远小于喷洒面积的半径, 而且喷头的表面与草地在同一水平面上。



6. 一个质点在约束面上振动, 其周期与振幅无关, 求约束面轮廓的微分方程。

7. 三个质点(m_1 、 m_2 、 m_3), 处在等边三角形的顶角上, 按照牛顿万有引力定律相互吸引。试确定保持质点相对位置不变条件下的转动状态。

8. 一质点 m 在有心力的作用下, 沿半径为 r_0 的圆形轨道运动, 其势能等于 $-km/r^n$ 。证明如果 $n < 2$, 这圆形轨道在微小的振动下(即质点在圆形轨道附近振动)是稳定的。

9. 两个质点在万有引力作用下彼此围绕沿圆形轨道运动, 周期为 τ 。在给定的瞬间, 突然停止运动, 然后质点脱离轨道相向降落, 彼此靠拢, 证明经时间 $\tau/(4\sqrt{2})$ 后发生碰撞。

10. 若地球的半径和密度分别为 r 和 ρ_e , 月球相应的量分别为 $0.275r_e$ 和 $0.604\rho_e$ 。一个人站在地球上曲膝, 他的质心降低50厘米。当他尽全力向上跳时, 可使质心比直立时提高60厘米。按照这种方式, 他在月球上能跳多高?

11. 一重量为 W 的刚性均匀细杆, 两端用竖直支架支撑以保持水平。当 $t = 0$ 时, 去掉一端

的支架，求此后另一支架所受的力。

12. 三个轴线平行的相同圆柱相互接触，

置于粗糙水平面上，两个圆柱放在下面，

第三个放在它们的上面，如下面左图所示。圆柱体与水平面之间的作用力方向与铅垂方向的最小夹角是多少？

13. 一个线轴置于水平面上，用一水平力

(见右图) 缓缓拉线，使线轴作纯滚动而没有滑动，其滚动方向如何？为什么？

14. 一质量为 M 的水平圆盘，可以绕过其边缘某点的垂直轴自由旋转。如果一个

质量为 m 的小狗沿着圆盘边沿走一圈，证明圆盘所转过的角度可以表示为：

$$\int_0^{\pi} \frac{4m \cos^2 \gamma d\gamma}{(3M/2) + 4m \cos^2 \gamma}.$$

15. 从四面八方地球落下的流星，形成厚度为 h 呎的一层灰尘 (h 远小于地球的半径)。通过研究角动量来证明天长的变化大约等于一天的 $(5hd/RD)$ 倍，其中 R 是地球半径， D 、 d 分别是地球和灰尘的密度。所使用的符号中，初态各量的下标用 0，末态各量的下标用 1。球体对过球心的轴的转动惯量为 $(2/5)MR^2$ ，质量为 m ，半径为 R 的薄壁空心球壳对过球心的轴的转动惯量为 $(2/3)mR^2$ 。

16. 一简单回转罗盘由以角速度 ω 绕自身轴转动的陀螺仪组成。陀螺仪对这个轴的转动惯量为 C ，对于横轴的转动量为 A 。陀螺仪悬浮在水银面上，因而作用在陀螺仪上的唯一力矩是使它的轴保持在水平面内的约束力矩。若将陀螺置于地球赤道上，地球的角速度为 Ω ，证明陀螺轴将在南北方向附近振动。求振幅很小时的振动周期，注意 $\omega \gg \Omega$ 是个极好的近似。

17. 一个球体的表面缓慢地振动，其轴转动惯量是时间的谐函数：

$$I_{zz} = \frac{2mr^2}{5} (1 + \epsilon \cos \omega t), \quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{2mr^2}{5} \left(1 - \epsilon \frac{\cos \omega t}{2} \right)$$

其中 $\epsilon \ll 1$ 。球同时还以角速度 $\Omega(t)$ 转动。证明角速度 Ω 的 z 分量近似为常数，而且 $\Omega(t)$ 围绕 z 进动，如果 $\Omega_z \gg \omega$ 则进动频率 $\omega_p = (3\epsilon\Omega_z/2) \cos \omega t$ 。

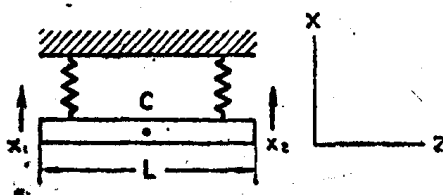
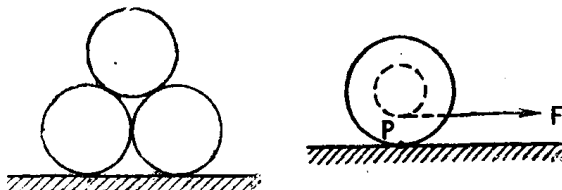
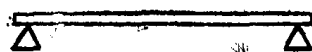
18. 三个刚性球用能变形的轻杆连接，各球之间的相对质量如下：

$$\begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \\ m_1 \quad m_2 \quad m_3 \end{array} \quad m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 2 : 1$$

作图说明系统所有的简正模式并指出相对频率。

19. 一质量为 M 长度为 L 的均质刚性棒，两端系在没有质量的弹簧上，使棒在水平位置维持平衡。两弹簧具有相同的力常数 K ，重心受到约束，只能平行于竖轴 x 移动。如果运动限制在 xz 平面内，求系统振动的简正模式和频率。

20. 一质量为 M 的质点，挂在质量为 m 长度为 L 的均匀细绳的一端，绳的另一端固定。给质点一个小



的横向位移 δ 並从静止释放, 建立微分方程和边界条件以确定细绳和质点的运动。建立一个决定固有频率的超越方程, 並在 $m \ll M$ 的情况下, 解出这个方程。

21. 一边缘固定的薄膜, 表面张力为 T , 单位面积的质量为 σ 。试建立薄膜频率的变分原理, 即找到一个遍及薄膜面积的积分, 其极值等于薄膜的频率。

22. 若将一只手表移到很高的位置, 它加快还是变慢?

23. 一质量为 m 的物体系于没有质量的细绳上, 细绳长为 L , 截面积为 S , 绳中张力为 T 。物体突然从靠近细绳固定端处释放, 要保证细绳不断, 细绳的杨氏模量 Y 应该小到什么程度。

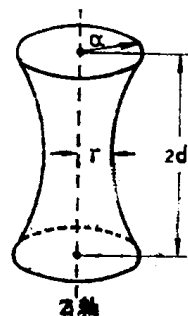
24. 借助于螺旋弹簧缓冲器, 使质量为 M 以速度 v 运动的火车停车。弹簧未压缩时的长度为 l_0 , 弹性系数为 k_0 。直到弹簧被充分压缩为止, k_0 始终保持常数。当 $l \ll l_0$ 时弹簧系数 k 突然变得远大于 k_0 。若采用任意选择的 k_0 , 且最大减速度的绝对值不超过 a_{max} , l_0 的最小值是什么?

25. (a) 一半径为 R 、高为 h 、密度为 ρ 的圆柱体, 直立悬浮在密度为 ρ_0 的流体中。如果给它一个幅度为 x 的向下的小位移, 求所引起的(无阻尼的)简谐振动的圆频率 ω 。

(b) 在圆柱的振动较小时, 证明靠近圆柱的流体其运动所波及的范围从圆柱的边缘延伸出一段距离 $\delta \sim \sqrt{\eta/\rho_0 \omega}$ 。因此, 圆柱附近速度梯度的最大值等于 $dV/dr \approx \omega x/\delta$ 。忽略圆柱体底面上的摩擦力, 证明圆柱体上所受的最大粘滞阻力为

$$F \approx 2\pi R h \rho (\eta \omega^3 / \rho_0)^{1/2} x_0$$

26. 表面张力为 τ 的液体薄膜, 被两个半径为 a 的圆环绷紧, 如图所示。求方程 $r(z)$ 。又当比值 (d/a) 等于多少时, 图中所示的表面形状是稳定的?



27. 一根方形立柱, 长为 L 截面边宽为 a , 紧固于地面上。证明立柱不发生弯曲时, 自由端支持的最大重量为 $W = \pi^2 a^4 Y / 48 l^2$, 其中 Y 是立柱材料的杨氏模量。

28. 长为 L 截面为 $(a \times a)$ 的矩形梁, 一端固定在垂直的砖墙里。计算由自身的重量引起的自由端的下垂。梁的密度为 ρ , 杨氏模量为 Y , 假定弯曲很小。

29. 一匀质细烟筒支点位于低端。证明烟筒的任一截面都经受一弯曲应力, 並计算当烟筒倒下时破裂的最可几位置。

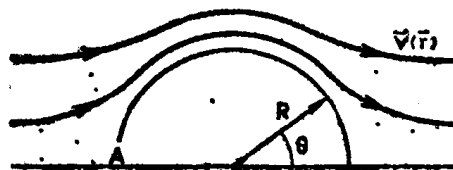
30. 液体的自由表面上压强为常数。如果将不可压缩的流体装在一柱形容器内並以恒定角速度 ω 旋转, 证明自由表面变成旋转抛物面。

31. 一个长 L 半径为 R 的半柱面形飞机库, 遭受大风袭击。风向垂直于柱面的轴, 其速度在无穷远处为 v_∞ 。若位于 A 的库门是打开的, 飞机库受的风力多大? 已知速度势为

$$\Phi = -v_\infty (r + R^2/r) \cos \theta$$

$$L = 70 \text{ 米}; R = 10 \text{ 米}; v = 72 \text{ 公里/小时};$$

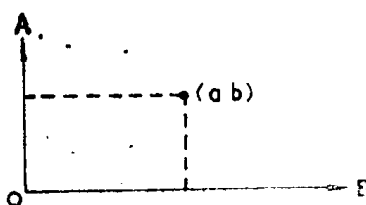
$$\text{空气密度} = 1.2 \text{ 公斤/米}^3.$$



32. 一水平面将 $T = 280\text{K}$ 的气团与上面 $T = 300\text{K}$ 的气团隔开。假定有波长为 λ 的小振幅引力波在分界面上引起了正弦波, 求波速与波长的函数关系。设这一分界面远离其它的水平界

面，並將两气团的振动看作是不可压缩的。

33. 两垂直的半无限长墙OA和OB相交于原点O，阻断了密度为 ρ 的不可压缩流体的二维流动，流体来自坐标为 (a, b) 强度为K的点源。试计算流体对墙的压强。



34. 设M和m为太阳和月亮的质量，R和r分别为它们与地球的距离，在赤道上被太阳和月亮引起的潮汐之比是多少？

35. 一不可压缩的孤立水团，具有地球的半径（6300公里），在其自身的万有引力作用下振动，假定速度流是无旋的，求振动基频的周期。

36. 坐标系 S_1 和 S_2 沿着参照系S的x轴移动，相对于S的移动速度分别为 v_1 和 v_2 。在S中测量 S_1 里的时钟指针转一圈经过的时间为t，在 S_2 里测量转一圈的时间 t_2 是多少？

37. 从地球发射一火箭，进入星际空间，除了开始的短时间之外，乘客测量的火箭加速度为一常数。火箭指向与地球距离固定的恒星，並沿直线运动。按火箭内部的时钟计时，将花费多长时间到达恒星？恒星与地球之间的距离和火箭加速度分别用D和 a' 表示。

38. 一静止质量为m的质点沿伽利略参照系的x轴运动，且受到一指向原点O的引力（动量的时间变化率） $m\omega^2 x$ ，以振幅a振动。用一定积分表示这个相对论振动的周期，並求出此积分的近似值。

39. 反质子被氘俘获而静止引起反应 $\bar{p} + D \rightarrow n + \pi^0$ （在本题中，忽略其它可能性）试确定 π^0 的总能量。静止质量分别为 $M(\bar{p}) = M(p) = 938.2 \text{ MeV}$,

$$M(D) = 1875.5 \text{ MeV}, M(n) = 939.5 \text{ MeV}, M(\pi^0) = 135.0 \text{ MeV}.$$

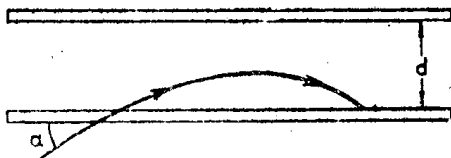
40. 在电子偶产生的过程中生成一正电子(能量 E_+ 、动量 P_+)和一电子(能量 E_- 、动量 P_-)

(a) 电子偶具有零动量的坐标系（质心坐标系）的速度是多少？

(b) 导出在这个坐标系中每个粒子的能量，

(c) 给出粒子间相对速度数值的表达式，即在一个粒子上的观察者所看到的另一个粒子的速度。

41. 一快速（极端相对论的）电子，以角度 α 进入电容器，如图所示。V是电容器两极间的电压，d是板间的距离，写出电子在电容器里的轨迹方程，



42. 静止质量为M的中性 π^0 介子，衰变为两个光子。在 π^0 的静止系统里， γ 射线的角分布是各向同性的。如果在实验室里 π^0 以速度v沿z方向运动，试问当介子在飞行中衰变时，沿 θ 附近的立体角 $d\Omega$ 射出一个光子的概率 $P(\theta)d\Omega$ 是什么？其中 θ 是在实验室测量的光子相对于z轴的角度，且速度v可与光速比拟。

43. (a) 如果中子来自距地球一光年处的宇宙射线相互作用，使它们以 $1/e$ 或更大一些的概率到达地球，其最少能量应该是多少？

- (b) 如果中子发生衰变, 衰变产生的电子与中子飞行方向的最大夹角是多少?
 (c) 衰变产生的中微子与中子飞行方向的最大夹角又是多少?
 (d) 按(c)中计算的角度, 中微子的最大能量是多少?

44. 根据广义相对论已经得到行星轨道近日点的进动。然而即使是狭义相对论也预言有这样一种效应, 因为惯性质量依赖于速度。已知一个在太阳的引力场中运动的行星角动量为 L , 静止质量为 m , 能量为 E , 试导出这个行星的狭义相对论的进动公式。

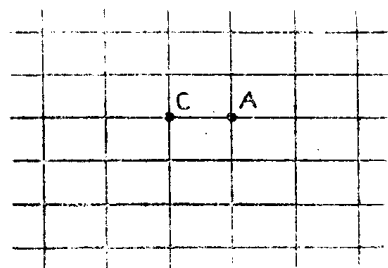
[提示: 利用极坐标 $u = 1/r$ 和 θ , 並找到一个含有 u 和 θ , 但不显含时间的微分方程]。

45. 星际空间有一充满空气的密闭容器, 空气处于标准状况, 在容器内漂着一个充氦的气球, 容器沿给定方向加速, 其加速度等于地球表面上的重力加速度, 相对于这个加速度气球怎样运动?

三 电 磁 学

1. 立方框的每条棱均由阻值为 R 的相同电阻构成, 电阻的接头位于隅角。将电池组接到立方框某一侧面的对角上, 问等效电阻是多少?

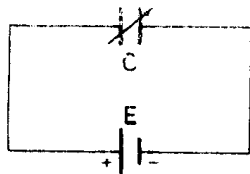
2. 沿平面无限延展的矩形金属网络上, 从A点输入1安电流, 从C点输出1安电流, 如图所示。求导线AC中的电流。



3. 两根外形相同的铁棒, 一根已经磁化, 另一根没有磁化。如果不用外磁场如何进行识别? (允许测量相互作用力。)

4. 一导体通过和带电金属板反复接触而充电, 金属板所带电量在每次和导体接触后又重新补充到 Q 。如果 q 是导体第一次充入的电量, 问导体最后的电量是多少?

5. 一可变电容器接在电动势为 E 的电池组两端, 电容器最初的电容为 C_0 , 所带电量为 q_0 。让电容量随时间变化, 从而将电流稳定在 I 值。计算电池组供给的功率, 並和电容器能量的时间变化率进行比较, 解释其差别。



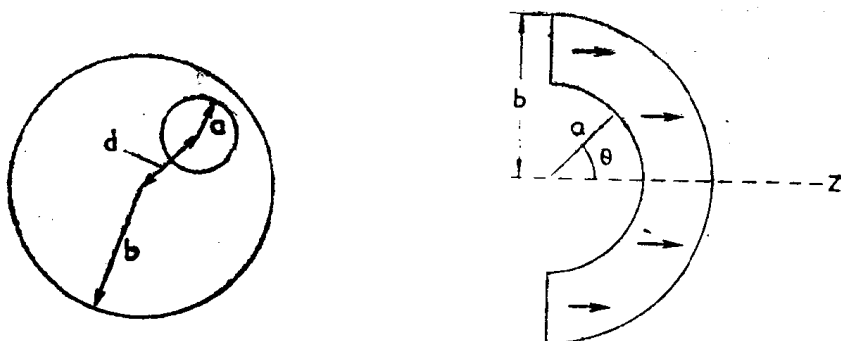
6. 一个电容器浸没在电导率为 g 的介质中, 测出电容器两极板间的电阻为 R 。证明 $RC = \epsilon/g$, 与电极的几何形状无关, 其中 ϵ 是介质介电常数, C 是电容器在此介质中的电容。

7. 在半径为 b 的直圆柱上距轴心为 d 处钻一个与轴线平行的圆孔, 其半径为 a ($b > a$)。若柱体中通过的电流为 I (安), 求圆孔中心的磁场强度。

8. 无限大导体平面上凸起一半径为 a 的半球, 在球心之上距平面为 p 处置一电荷 q , 计算作用在电荷上的力。

9. 假定有半个厚球壳, 内半径为 a , 外半径为 b , 其剖面如附图所示。若沿对称轴 (图中

的 z 轴)将球壳均匀磁化,证明置于原点的小磁针将自由摆动。



10. 一圆形均质薄金属盘置于无限大导体平面上,平面与均匀重力场垂直。最初圆盘及平面均不带电,然后慢慢增加电荷。欲使圆盘离开平面,电荷密度需达到何值?

11. 计算一球形电容器的电容 C ,电容器内半径为 R_1 、外半径为 R_2 ,其中充满按下述规律变化的电介质:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos^2 \theta,$$

式中 θ 为极角。

12. 一载有电流 I 的长直导线,置于充满半无限空间的磁介质上方,相距为 a 。若磁介质的磁导率为 μ ,计算导线上每单位长度所受的力,并说明方向。

13. 在下述两种不同的环境下测量细金属圆环(可以忽略通过导线本身的通量)的自感系数:

(A) 回路置于 $X-Y$ 平面内,平面以下充满磁导率 $\mu = 2$ 的介质,平面之上为真空;

(B) 各处的磁导率均为 $\mu = 1$ 。

问:(A)、(B)两种情况的自感系数 L 之比等于多少?

14. 在电导率为 σ_0 的金属中有一小块电导率为 σ_1 的杂质,干扰了另一恒定电场。求在远离杂质的地方扰动与距离的关系(只分析稳定情况)。

15. 一直长空心圆筒形导体半径为 a ,由过轴线的平面划分为两部分,并拉开很小的间隔。如两部分的电势分别保持在 V_1 和 V_2 ,证明筒内任意一点的电势为:

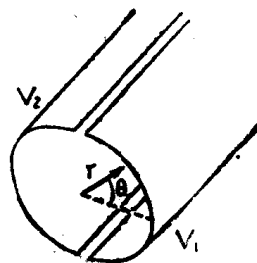
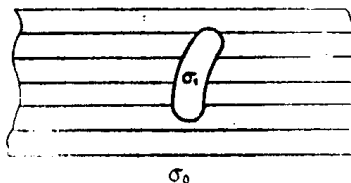
$$V = \frac{(V_1 + V_2)}{2} + 2 \frac{(V_1 - V_2)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1} \cos(2n-1)\theta,$$

其中, r 是从轴心到该点的距离,如图所示。

16. 确定位于导体内部任意点的初始电荷密度随时间减少的规律。分布在铜质导体内部的初始电荷大约需要多长时间消失(铜的电阻率为 1.7×10^{-8} 欧姆—厘米)?分析答案的正确性。如果导体完全绝缘,电荷将运动到何处?

17. 一极化率为 α 的小球,半径为 a ,距离半径为 b 的导体球很远。若导体球的电势 V 保持不变,求当 $a \ll r$ 时介质球受力的近似表达式。

18. 导出介电常数 ϵ 与极化率 α 之间的克劳修斯—莫索提关系式。



19. 在一简立方晶格中, 晶格常数为 $2.00 \text{ \AA}$, 折射率 (对钠光) 为 $n = 2.07$ 。假定介质受一脉冲强, 使其沿一条立方棱伸长 2% , 沿另外两条立方棱收缩 1% 。

在下述两种情况下分别计算形变介质的折射率:

(a) 电矢量 $\mathbf{E}$ 平行于主应变轴;

(b) 电矢量 $\mathbf{E}$ 垂直于主应变轴。

设原子极化率 α 为常数。

[提示: 作用在上述晶体中一个原子上的局域场可用如下方法求出。在原子周围想象一包含六个最近邻原子的球形空腔, 腔外介质可认为是连续和各向同性的, 空腔中心的局域场可以表示为

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}' + \sum_{j=1}^6 \mathbf{E}_j'',$$

其中 $\mathbf{E}$ 是外场, $\mathbf{E}'$ 是腔外极化的连续介质的贡献, $\mathbf{E}_j''$ 是腔内第 j 个原子感生的偶极子的贡献。在各向异性介质中 $\sum_{j=1}^6 \mathbf{E}_j''$ 不等于零, 并取决于外场 $\mathbf{E}$ 的方向。]

20. 波长为 λ 的高能 x 射线照射在一块金属板上, 金属板中每单位体积内的所有 N 个电子基本上都是自由的, 问发生完全外反射的临界角等于多少?

21. 可以将电离层看成是电离了的介质, 其中每单位体积包含 N 个基本上是自由的电子。如果线偏振波沿平行于地球的弱均匀磁场 $\mathbf{H}$ 的方向在电离层中传播, 证明它的偏振面将旋转一个角度, 角度大小与传播距离成正比。计算比例常数。

22. 证明电磁波可以在具有理想传导壁的矩形截面空心金属管中传播。求电磁波的相速和群速, 并证明存在一截止频率, 低于截止频率的波不能传播。

23. 在超导体内我们采用伦敦方程来代替欧姆定律 ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$), 当电流密度为 $\mathbf{J}$ 时有:

$$\text{curl}(\lambda \mathbf{J}) = -\mathbf{B}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\lambda \mathbf{J}) = \mathbf{E},$$

(用高斯单位) 其中 λ 看作常数。其它方面, 麦克斯韦方程 ($\epsilon = 1, \mu = 1$) 和相应的边界条件都没有变化。

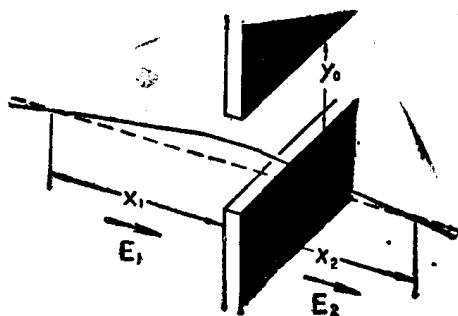
假定有一厚度为 $2d$ ($-d \leq z \leq d$) 的无限大超导板, 板外有一平行于板面的已知恒磁场:

$$H_x = H_z = 0, \quad H_y = H_0 \quad (\text{对 } z > d \text{ 和 } z < -d \text{ 数值相同}),$$

而 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 处处为零。如果没有表面电流和电荷, 计算板内的 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{J}$ 。

24. 长为 L 的玻璃圆柱以角速度 Ω 绕轴线转动, 一偏振光平行轴线通过圆柱, 求偏振面所转过的角度 (假设折射率 n 为常数, 而磁导率为 1)。

25. 一个与宽度 y_0 相比开口很长的隙缝透镜把电场分为两个区域 E_1 和 E_2 , 如图。一束在隙缝左侧相距 x_1 处聚焦的带电粒子又在隙缝右侧相距 x_2 处



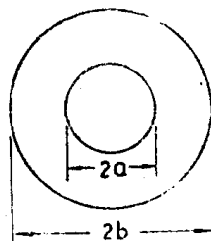
重新聚焦。若粒子到达透镜前的加速电压为 V_0 ，证明：

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} \cong \frac{(E_2 - E_1)}{2V_0}。$$

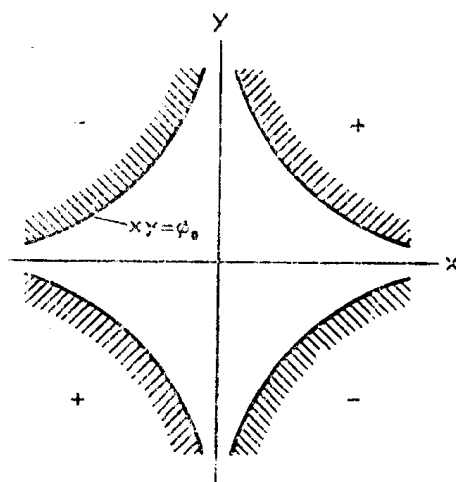
利用近似 $V_0 \gg E_1 x_1$ 、 $V_0 \gg E_2 x_2$ 以及 $x_1 \gg y_0$ ， $x_2 \gg y_0$ 。

26. 离子绕长螺线管的轴线作螺旋运动，螺线管这样来绕制以便使离子遇到一个场强从 B_1 逐渐增加到 B_2 的区域，在什么情况下离子会被折回？

27. 附图是磁控管的园筒状板极（半径为 b ）和阴极（半径为 a ）的截面图。阴极接地，板极电位处于正 V 伏，沿着园筒的轴向有一均匀磁场 H 。电子离开阴极，沿曲线向板极运动，初速度为零。问 V 低于何值时电流才会被磁场 H 抑止？



28. 如图所示的磁四极具有使与 z 轴近于平行的带电粒子束聚焦的性质。是聚焦在 $x = 0$ 平面还是 $y = 0$ 平面，取决于粒子电荷的符号。试找出以类似方式使极化磁矩 μ 平行（或反平行）于 x 轴的不带电粒子束聚焦的最简单的磁极分布。



29. 一束完全平行的质子流，以半径为 R 的圆柱形式通过空间，其速度为 v ，单位体积的质子数为 ρ 。求距射束轴线为 r 处的一个质子所受的力。定性讨论质子束的稳定性。

30. 在强度为 Γ 的固定磁单极附近建立一个带电粒子的非相对论运动方程，并求运动恒量。

31. 为标定动量为 p 的带电粒子在静磁场中的轨道，一种标准方法是：用实验来确定一根完全柔软的载流导线在磁场中的位形，导线所受张力为 T ，通过的电流为 I 。导出这种方法的物理依据。〔提示：导出适用于下述两种情况的一般微分方程：（a）一个粒子轨道 $d^2r/ds^2 = ?$ ，（b）载流导线的平衡位形。〕

32. 已知一具有球对称电荷分布的原子，处于外磁场 H 中。证明在这个原子核附近由抗磁电流引起的磁场为 $\Delta H = -(eH/3mc^2)\phi(0)$ ，其中 $\phi(0)$ 是原子中的电子在原子核附近产生的静电势。对于原子序数 $Z=50$ 的原子极其粗略地估算 $\Delta H/H$ 值的大小。

33. 有限范围的球对称电荷分布以某一频率 ω 作径向脉动，怎样才能检测到这些径向的脉动？说明你的答案。

34. 半径为 R 的飞轮，沿轮缘均匀分布着电荷 Q ，飞轮以角速度 ω 旋转，问该系统单位时间辐射出的能量为何？

35. 根据经典辐射理论证明在无自旋全同性粒子的非相对论碰撞中，不发生电和磁的偶极辐射。

36. 电磁辐射平面线偏振波入射到一个极化率为 α 的原子上。根据经典电磁理论，求在远离原子处散射波的电场，并问总散射截面等于什么？

37. 细铜环绕垂直于均匀磁场 H_0 的轴旋转（见图），其初始旋转频率为 ω_0 。计算频率减少到