许莼舫初等几何四种

中国青年出版社

许莼舫初等几何四种

中国青年出版社

许莼舫初等几何四种

*

中国青年出版社出版

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092 1/32　14印张　284千字

1978年10月北京第1版　1979年2月北京第2次印刷

印数300,001—800,000册　　定价0.95元

内 容 提 要

无产阶级文化大革命前，许莼舫氏为了帮助中学同学学习初等几何，编写了《几何定理和证题》、《几何作图》、《轨迹》、《几何计算》四本书，就这四方面的问题，分别讲解基本知识，并举示大量例题，分析解题的思路和方法。鉴于这四本书对青年学习初等几何还有一定参考价值，爰照旧版重印，合订一册。

重印说明

许莼舫氏著《几何定理和证题》、《几何作图》、《轨迹》、《几何计算》四本初等几何学习参考书，在无产阶级文化大革命前作为初中学生课外补充读物，曾多次印行。现在中学数学教材已经改革，这四本书作为配合教学的读物，已不适用。但鉴于这四本书讲解初等几何基本知识，对一般青年学习初等几何，还有一定参考价值，许多青年读者和中学教师也纷纷来信要求重版，由于作者已于文化大革命前夕因病去世，不能再作修订，爰照旧版重印，合订一册，改用现在这个书名。

中国青年出版社

1973年3月

几何定理和证题

作者的話

有些中學同学在学习平面几何学的时候，由于对基本概念了解得不够清楚，对定理和法則卽使都明白也还不会灵活运用，因而难于获得良好的学习成果．作者因为有这样的感覺，才編写了这一套小書．这套書分“几何定理和証題”、“几何作图”、“軌迹”和“几何計算”四册．内容主要是：（1）幇助同学們透徹了解教科書里的材料；（2）把这些材料分类和总結，指导同学們怎样去运用，从而掌握解题的正确方法；（3）举示多量例題，对同学們作出較多的引导和启示，借此收到观摩的效果；（4）提供一些补充材料，使同学們扩大眼界，充实知識，提高理論基础，为进一步学习創造有利条件．

这一册是“几何定理和証題”，定理和証題是全部几何学里最主要的部分，初学的人必須先把这部分基本概念認識清楚，才能收到学习效果．因此，本書第一章里对这些基本概念作了詳細的解释．为了避免解释流于空泛，尽量用具体而浅显的实例来說明，一面使同学們获得深刻的印象，一面又可以增加他們学习的兴趣．

在第二章里，依証題的种类，分別举示有正軌可循的法則．每一法則必有一二代表性的范例．范例中首列“思考”或“解析”一項，启示思索的过程，培养同学們的思考能力，以加强他們解决問題的眞实本領．

本書每講述一个証題法以后，就选录能和范例密切配合的"研究題"若干則，以备同学們习作。对于其中較难的題目，都作了适当的"提示"，借以启发思路，使同学們乐于尝試。

几何証題非常繁多，証法也千变万化，学习者除掉对有一定法則可循的証題法必須熟練外，还要发揮創造的能力，拿定理和証題法来灵活运用。所以，本書第三章里就列举了一些活用的实例。讀者若能細心研討，在这方面一定会得到显著的进步。

本書每遇到同学們易犯錯誤的地方，就特別指出，促起注意。題材可以推闊，或証法可以変通的，就提供資料，鼓励同学自动研究。在这些地方，希望同学們特別留意，养成細心和深入鑽研的习慣。

本書在編写时虽經仔細斟酌，但錯誤之处还恐难免，希望讀者多多批評和指正。

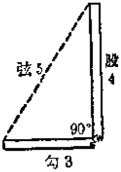
许莼舫

目　次

一 基本知識

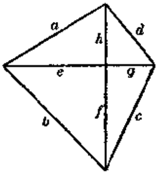
什么是几何定理和証明題

中国最古的一部算書，大概是汉朝时候的作品，名叫"周髀算經"。在这本書里，記載着商高回答周公的話，有一段說："把直尺折成一个直角(就是 90° 的角)，假使勾(就是較短的一段)長三，股(就是較長的一段)長四，那末弦(就是尺的兩端間的距离)一定是長五。"意思是說："假使直角三角形(有一个角是直角的三角形)的兩条直角边的長是三和四，那末斜边(直角所对的边)的長是五。"在古代埃及建造庙宇时，必須依照一定的方向，他們先观察天上的星，决定南北方向以后，再取一条繩子，按照 3:4:5 的連比，打兩个結，然后沿着結折成一个三角形，放在地上，使一条短边沿南北的方向，那末另一条短边所取的方向一定是东西向。这一件事实，是說明"假使三角形的三边成 3:4:5 的連比，那末兩条短边夹的角是直角"。这些关系，又經过后人的推广，在中国有陈子所說的"把勾，股各自乘，兩数相加(例如 $3^2+4^2=25$)，开平方就得弦(例如$\sqrt{25}=5$)"；在西洋有希臘人畢达哥拉斯(Pythagoras)所証明的"在直角三角形中，兩条直角边的平方的和，等於斜边的平方(例如 $3^2+4^2=5^2$)"。像这样，用来显示圖形的性質的每一个敍述，它的眞确性須經証明的，就是几何学中的**定理**。



几何学中的系，又叫**推論**，也是定理的一种。譬如說"在直角三角形中，从斜边的平方减去一条直角边的平方，等於另一条直角边的平方"，这是可以从前述定理（以后統称商高定理）立刻推得的，所以是該定理的系；其实就是附屬的定理。

几何学中又有許多要我們証明的習題，通常称做**証明題**，或簡称**証題**，其实也是定理。在教科書里面把証明詳細記下的定理，是在証明别的定理或習題时必須用作根据的，又叫基本定理；至於其余在証定理或習題时不常用，留着給学者作証明的練習的定理，就是証明題。例如前举的商高定理，在几何教科書中都有它的証明，將来在証題上用得很多，所以是基本定理。若另有一定理："四边形的兩条对角綫互相垂直（就是相交而成直角），那末一双对边平方的和等於另一双对边平方的和。"这是要根据商高定理，先确定



$$a^2=e^2+h^2,\quad c^2=f^2+g^2,$$

相加得 $$a^2+c^2=e^2+f^2+g^2+h^2,$$

同法得 $$b^2+d^2=e^2+f^2+g^2+h^2,$$

就能証明 $$a^2+c^2=b^2+d^2.$$

这一条定理在証其他定理时不需要用作根据，所以算作証明題，普通都列在習題里面。

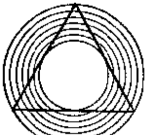
在有些几何教科書中，往往把重要的定理也放在習題里面，譬如"直角三角形的斜边的中点，距离三个角頂一样远"，在証題上用途很大，但常被列在習題里，学者应特别注意。

总之，不論定理，系或証明題，实际都是定理，以后我們統称做定理就是。但"証題"兩字以后常指証明定理的手續而說。

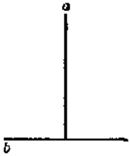
最后要附帶談及的，中国的“周髀算經”里記載的都是关於天文方面的計算，古代人民为了在农業的劳动生产上的需要，必須研究天文，於是發見許多几何定理。埃及人为了解决住的問題，在建筑工程上也發見許多几何定理；又因尼罗河的定期泛濫，須在水退后重行丈量土地，分别耕种，又發見各种圖形求积的定理。从这些事实，証明了几何学的發生和發展，是以生产条件为基础的。人类要生活，就需要劳动生产，一定的生产方式，决定一定的社会形态，同时决定了对形狀和数量上的一定認識。可見几何学同其他的数学或自然科学一样，都是劳动的产物。

几何定理为什么要証明

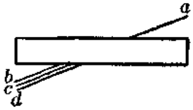
下面有三幅圖，可以用来試試你的眼力。請你先看圖(1)，就“形狀”来观察一下，其中有一个三角形，它的三条边不是都向內弯曲嗎？繼續比較一下圖(2)中 a,b 兩綫段的“大小”，不是一看就覺得 a 比 b 長嗎？最后再就圖(3)中各綫的“位置”来观察，你不是要說 a 綫段同 c (或 d)綫段是在一直綫上的嗎？其实你是完全看錯了！不相信的話，可以用一根尺



(1)



(2)



(3)

来量一下，就知道(1)的三角形的各边都是直綫，(2)的 a，b 兩綫段一样長，(3)的 a 綫段同 b 綫段在一直綫上。

这事实可以說明，我們研究圖形的形狀、大小和位置等性質，不能單靠眼睛，因为有时候眼睛要發生"錯覚"。

但是我們要注意，这里並非是說研究圖形不可以或不需要用眼睛来观察，只是說單憑观察还是不够的。

人們認識一切事物，必然要通过实踐。在实踐中由於感官的覚察，看到各个事物的現象方面，看到各个事物的片面，看到各个事物間的外部联系。这样看到的虽然还是一些粗糙的东西，有时会造成錯覚，但是它畢竟是由人們的意識和客观現实接触而来，是知識的一个开端。这种由感覚来認識事物，是認識的基本阶段，叫做感性認識。

在实踐的繼續中，人們运用腦子，想上一想，加了一番判断和推理的工夫，就把認識推进了一大步。这时能够抓住事物的本質，事物的全面和事物的內部联系。好比粗糙的玉石經过了琢磨，已經晶瑩可照，纖毫畢露了。这是認識的發展阶段，叫做理性認識。

几何学是从感性認識發展到理性認識的，也就是理論和实际联系的。

因为几何学只抽出物体的一部分性質——形狀、大小和位置，作为研究的对象，而且是發展到理性認識的，所以可舍去物体，就物体所占的空間部分用理論来演繹。所謂演繹、就是从已知的理逐步推演而得未知的理，借此找出一个正确的結論。这种离开了物体，而就物体占据过的空間来想像的(即

抽出形状、大小和位置来研究的），就是几何学的抽象性.

几何定理的证明，就是用理论演绎的方式，来断定图形的真实性质的记叙. 证明的主要任务是在于要我们说明为什么在一定条件之下必然产生一定的结论，即要我们提出根据，证实结论的正确性，揭发它们之间的内在联系.

几何定理的论证，必须以若干公理为基础(详见下节)，这些公理是从实践得来的，与客观事实相符的. 从这里出发，推证而得种种定理，这些定理又可与实际生活上遇到的事物互相参证，即理性认识是符合于感性认识的. 可见几何学是根据现实，又从现实发展成一理论体系，转过来又指导我们对现实作进一步的认识. 这样从现实而抽象，再从抽象而指导现实，循环往复以至无穷，可说完全是唯物辩证的。

因此，几何定理的证明决不是纯粹抽象的理论，而是与现实结合，即理论与实践趋于一致的.

定理的基础

你遇到了喜欢寻根究底的人，不是常被问得哑口无言吗？这也不能怪你缺乏辩才，因为各种事物的理由，虽然初时是不难解释的，但是继续不断地解释下去，终究会达到一个无法解释的地步；这时候除掉回答说“这是当然的”以外，再也没有相当的理由了. 譬如人们要在方场的一角走到对角，都依对角线方向在场上斜走过去，假使我问你：为什么他们不从场边的道路转一个弯走过去，而要去走斜径呢？我想你一定会回答说：这是为了要节省时间的缘故. 那末怎样会节省时间呢？你

回答说：因为走斜径比从道路上转弯过去来得近，距离愈近，时间就愈省．那末为什么斜径的距离比较近呢？这时候你被逼着，只好说“这是当然的”了．其实这一件事实，不但我们人类知道它是当然的，即使是一只野兔，当它被猎狗追逐时，它决不会转弯抹角地沿着田岸奔跑，而是依一直线从田间逃回洞穴的。可见“在所有连接两点的线中，线段最短”这一句话，可说是自然的真理，为人人所公认，即使不加理由——事实上已无法给以明确的理由——也不会使人怀疑的了．

几何学既然是理论演绎的科学，那末必须依据逻辑的推理法则，去寻求空间的一般性质．所谓逻辑的推理，就是每一句话都有确切的理由；每一理由又须有其所以成立的缘故．这样寻根究底，一定要同上举的实例一样，有一个起点，用来作立论的基础．因此有些理由只能根据经验或直觉，肯定它成立，就是认为已极正确，无可怀疑，以作基本的真理，这就叫做**公理**．

譬如我们在几何学中要证 a, b 两线段的相等，往往先去寻出另一线段 c，然后根据种种理由，逐步推得 $a=c$ 和 $b=c$，到这时候，要断定 $a=b$，已经没有相当的理由可以根据，于是只能作一个“等于同量的量相等”的假定，认为 a, b 二量既然都等于 c 量，那末这二量的相等已经是自然的真理，不必再怀疑了．像这样的假定，就是最基本，不必再加理由而可以认为成立的公理．

不论哪一种科学，都有若干专门的名词．我们知道了这些名词的意义，就是对这些名词有了一个概念，才能着手研究