

非线性有限元

吕和祥 蒋和洋 编著
唐立民 龙驭球 审
化学工业出版社

非线性有限元

吕和祥 蒋和洋 编著

唐立民 龙驭球 审



化学工业出版社

(京)新登字039号

内 容 提 要

本书系统地阐述了非线性有限元的基本理论和方法。在深入浅出地概括介绍非线性连续体力学的基础上,详细地介绍了几何非线性有限元、材料非线性有限元和两者耦合的非线性有限元及其在弹塑性、大变形不可压缩材料、非线性稳定性等问题中的应用。

本书反映了近年来在非线性有限元领域内取得的新进展,并介绍了一系列有效的有限元计算方法。

本书可供从事非线性有限元理论和应用工作的高等学校师生、研究生以及科技人员入门和深入学习、参考之用。

非线性有限元

吕和祥 蒋和洋 编著

唐立民 龙驭球 审

责任编辑:任文斗

封面设计:季玉芳

*

化学工业出版社出版发行

(北京和平里七区十六号楼)

化学工业出版社印刷厂印刷

河北三河县东升装订厂装订

新华书店北京发行所经销

*

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ 印张23字数589千字

1992年10月第1版 1992年10月北京第1次印刷

印数 1-15,000

ISBN 7-5025-1000-1/TQ·578

定价 18.30 元

前 言

由于现代科学技术和生产建设的飞速发展,人们面临着越来越多的非线性力学问题,特别是在导弹、飞机、舰船和巨型结构等科技部门,尤为突出。许多结构在大载荷、高速、高温和高压条件下,呈现出一系列复杂的非线性现象。随着高强度合金日益广泛的应用,薄壁构件的大位移分析和稳定性分析日益重要。例如,在工程实际中,四边简支的矩形薄板在其平面内承受压力的能力可以大大超过线性理论的临界值,甚至在出现局部屈曲时也可以继续工作,因此按线性理论设计就浪费了材料;而受轴压的圆柱壳却在线性理论临界力的几分之一的作用下就会突然破坏,这时按线性理论设计就会造成灾难。临界载荷如此巨大的离散现象,用线性理论是无法解释的。

另一方面,许多材料表现出明显的物理非线性。为了充分发掘材料的承载能力,就必须对结构作弹塑性分析,而基于线性分析的结构设计就显得过于保守。例如,由于材料的塑性变形或蠕变作用,可以使构件中应力集中现象得以缓和。而金属塑性成形和橡胶等超弹性材料在进入大变形、大应变阶段,其本构关系呈现复杂的非线性。这些问题只有用非线性连续介质力学的观点和方法才能有效地分析其结构反应。

非线性有限元是用有限元法解决非线性连续介质力学问题的数值方法。为了使初次接触这个领域的读者便于入门,本书的第一章介绍了用于研究大变形状态的拉格朗日描述和欧拉描述。第二章至第四章介绍了张量分析的基本知识和张量的抽象表示及其运算,推导详细,易于初学。第五章和第六章介绍了连续体的非线性应变和应力分析。第七章从理性力学的观点简单介绍了本构关系应当遵循的准则,介绍了一些材料的本构关系。为了使读者建立一定的非线性力学的概念,第八章给出了超弹性材料的一些有用的解析解。通过这些解析解,读者可以深入理解前面各章所介绍的有关公式。第九章介绍了建立有限元分析基础的大变形虚功原理;介绍若干变分原理,最后给出了各种非线性广义变分原理的统一形式及它们之间的联系和区别。第十章首先介绍了各种应变离散的模式,从而建立了非线性平衡方程的离散形式;详细地介绍了非线性方程的各种解法。最后还介绍了大位移大应变的非线性分析。第十一章介绍了主要用于几何非线性分析的各种非线性应变分量简化的一般方法。第十二章介绍了位移模式几何非线性有限元的基本列式和梁板壳单元的推导,这些单元被工程界和大型程序广为采用。第十三章介绍了杂交应力模式几何非线性有限元(包括线性杂交元)的经典列式和最新列式,以及拟协调模式有限元对它的影响。第十四章则介绍了拟协调模式几何非线性有限元的列式和具体构造方法。第十五章主要还是介绍小变形梁板壳有限元弹塑性分析,但也考虑了几何非线性的影响。第十六章对九个稳定性理论作了简介,具体介绍了非线性有限元在结构的非线性稳定分析中的应用和计算方法。

我们把本书献给读者,是为了促进这个领域的学术交流和繁荣。由于我们水平有限,难免有错,望读者给予批评、指正。

衷心感谢我们的老师唐立民、龙驭球教授对本书的支持和宝贵的帮助。

作者于大连理工大学 1991.

目 录

第一章 物体变形状态的描述	1
第一节 参考状态和变形状态.....	1
第二节 物质描述和空间描述.....	1
第三节 曲线坐标和流动坐标.....	4
参考文献.....	5
第二章 张量及其运算	6
第一节 基向量.....	6
第二节 张量.....	7
第三节 度量张量.....	9
第四节 张量的并矢表示及其代数运算.....	10
第五节 置换符号.....	11
第六节 向量的点积和叉积.....	13
第七节 线、面和体积元素.....	14
第三章 二阶张量——仿射量	15
第一节 仿射量.....	15
第二节 仿射量的重向及其不变量.....	16
第三节 正则与退化仿射量.....	17
第四节 Cayley-Hamilton定理.....	18
第五节 几种特殊仿射量.....	18
第六节 对称仿射量的重向及其主向.....	23
第七节 仿射量的分解.....	25
第八节 张量函数.....	26
第九节 表示定理.....	27
第十节 旋转张量.....	28
参考文献.....	31
第四章 向量和张量分析	32
第一节 基向量和向量的导数.....	32
第二节 张量的微分.....	33
第三节 黎曼-克里斯托夫张量.....	34
参考文献.....	36
第五章 有限变形分析	37
第一节 变形物体的基向量及其度量张量.....	37
第二节 变形梯度及其极分解.....	38
第三节 变形体的体积和面积元素.....	39
第四节 长度比、面积比、容积比和剪切.....	40
第五节 主长比和变形张量 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{c}$ 的主向.....	42

第六节	格林 (Green) 和阿耳曼西 (Almansi) 应变张量	43
第七节	直角坐标系的格林和阿耳曼西应变张量	46
第八节	速度梯度	48
第九节	变形率及旋率	49
第十节	应变张量的物质导数	50
	参考文献	50
第六章	应力分析及动量和能量方程	51
第一节	外力和内力	51
第二节	柯西 (Cauchy) 应力和偶应力张量 (真应力)	51
第三节	柯西动量和动量矩方程	54
第四节	皮奥拉-克希荷夫 (Piola-Kirchhoff) 应力	56
第五节	应力速率	58
第六节	能量守恒定律和能量方程	60
第七节	热力学第二定律和熵不等式	63
	参考文献	64
第七章	本构关系	65
第一节	本构方程一般原理	65
第二节	客观性	65
第三节	流体的本构方程	69
第四节	热弹性体的本构方程	71
第五节	各向同性超弹性体	73
第六节	不可压缩超弹性体	74
第七节	弹性势的形式	75
第八节	弹性体本构关系	76
第九节	线性弹性体的本构方程	78
第十节	线性粘弹性材料	79
第十一节	弹塑性材料	86
第十二节	塑性材料本构关系和塑性势	94
	参考文献	100
第八章	超弹性材料有限变形解析解	101
第一节	基本方程	101
第二节	均匀拉伸	101
第三节	简单剪切	105
第四节	简单剪切 (续)	107
第五节	圆柱扭转	109
第六节	厚壁筒的轴对称变形	113
	参考文献	116
第九章	变分原理	117
第一节	虚位移原理	117
第二节	虚应力原理	118

第三节	总势能驻值原理	119
第四节	总余能驻值原理	120
第五节	广义变分原理	120
第六节	小变形变分原理	121
第七节	非线性广义变分原理的统一形式	124
第八节	非线性广义变分原理的联系和区别	129
第九节	非线性广义变分原理的其他形式	132
	参考文献	135
第十章	弹塑性及非线性弹性问题的有限元解法	136
第一节	应变离散的位移模式	136
第二节	应变离散的杂交模式	141
第三节	应变离散的拟协调模式	143
第四节	弹塑性平衡方程的有限元离散	144
第五节	数值积分	146
第六节	非线性方程解法	148
第七节	弹塑性矩阵	158
第八节	弹塑性问题的求解步骤	166
第九节	算例	167
第十节	大位移大应变的非线性分析	168
第十一节	不可压缩超弹性材料轴对称大变形分析	176
	参考文献	189
第十一章	非线性有限元中的应变近似	190
第一节	四种应变度量的条件等值性	190
第二节	一个简化的非线性壳体应变分量及其合理性	199
第三节	非线性应变、应力和结构反力的计算	207
	参考文献	210
第十二章	位移模式的几何非线性有限元	211
第一节	非线性增量平衡方程	211
第二节	几何非线性杆单元的推导	215
第三节	几何非线性梁单元的推导	218
第四节	梁单元的节点反力及算例	223
第五节	几何非线性板壳单元的一般列式	224
第六节	几何非线性旋转壳单元的构造	230
	参考文献	235
第十三章	杂交应力模式非线性有限元	236
第一节	引言	236
第二节	线性杂交应力有限元的列式	236
第三节	线性杂交应力矩形平面单元的构造	239
第四节	线性杂交应力矩形板单元的构造	240
第五节	几何非线性杂交应力有限元的列式	244

第六节	几何非线性杂交应力扁壳单元	247
第七节	线性杂交应力有限元的新列式	250
第八节	几何非线性杂交应力元的新列式	252
参考文献		256
第十四章	拟协调模式非线性有限元	257
第一节	引言	257
第二节	平面单元的构造	257
第三节	平板单元的构造	261
第四节	扁壳单元的构造	271
第五节	拟协调模式非线性有限元列式	272
第六节	非线性壳体应变分量的积分离散	273
第七节	几何非线性梁单元的构造	276
第八节	几何非线性扁壳单元的构造	281
第九节	几何非线性板单元的构造	285
第十节	算例	286
第十一节	几何非线性旋转壳单元	287
附表		295
参考文献		307
第十五章	梁、板、壳结构的弹塑性分析	308
第一节	引言	308
第二节	屈服准则和弹塑性矩阵	308
第三节	梁、板、壳的小变形弹塑性刚度阵列式	313
第四节	梁、板、壳弹塑性刚度阵的近似计算	317
第五节	用数值积分计算弹塑性刚度阵	319
第六节	沿厚度方向采用分层法的弹塑性分析	321
第七节	用分区法进行弹塑性分析	323
参考文献		326
第十六章	非线性稳定性理论和有限元分析	328
第一节	引言	328
第二节	弹性稳定性经典线性理论及其方法	328
第三节	非线性大挠度稳定性理论	330
第四节	Stein前屈曲一致稳定性理论	331
第五节	Koiter初始后屈曲理论	333
第六节	关于壳体的塑性屈曲	339
第七节	非线性稳定性的摄动有限元分析	342
第八节	用切线刚度法解非线性稳定性问题	345
第九节	用特征刚度法进行非线性稳定性分析	348
第十节	用当前刚度参数法解非线性稳定问题	350
第十一节	分支点失稳分析	352
第十二节	缺陷分析	355
参考文献		361

第一章 物体变形状态的描述

第一节 参考状态和变形状态

在小变形固体力学中, 因为变形很小, 因而忽略了物体受力后在空间位置的改变, 但在有限变形中, 由于变形很大, 则必须考虑这种改变。为了描述物体变形前后两种不同的状态, 引入了参考状态和变形状态。

在某一瞬时, 物体在空间所占据的区域 V 称为物体的构型 (Configuration)。令在时间 $t = 0$ 时, 物体的初始构型为 V_0 , 并参考于一固定的直角坐标系 $\{x_i\}$, 物体的任一质点 P 的位置可由一向径 $\mathbf{P}(x_1, x_2, x_3)$ 或其质点坐标 x_1, x_2 和 x_3 确定。构型 V_0 称为物体的参考状态。在后来某一瞬时 t , 物体被移动到空间另一位置, 其构型为 V , 这时的状态称为变形状态。描述这一变形状态, 用另一直角坐标系 $\{y_i\}$ 。初始构型中的 P 点, 变形后被移动到空间的 p

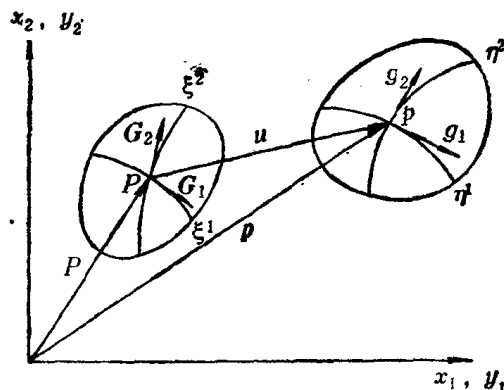


图 1.1.1 构型及坐标系

点, 可由一向径 $\mathbf{p}(y_1, y_2, y_3)$ 确定。如果令坐标系 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 重合, 则在二维情形如图 1.1.1 所示。

同一个质点变形前后有关系

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1.1)$$

y_i 是 x_i 的单值连续函数, 其雅可比 (Jacobi) 行列式的值不等于零。由定义, 显然有

$$y_i(x_1, x_2, x_3, 0) = x_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1.2)$$

如果取 u_i 为质点沿 x_i 轴方向的位移, 那么显然有

$$y_i = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1.3)$$

或写成向量的形式, 有

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{u} \quad (1.1.4)$$

其中

$$\mathbf{p} = y_1 \mathbf{i}_1 + y_2 \mathbf{i}_2 + y_3 \mathbf{i}_3, \quad (1.1.5)$$

$$\mathbf{P} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3 \quad (1.1.6)$$

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i}_1 + u_2 \mathbf{i}_2 + u_3 \mathbf{i}_3 \quad (1.1.7)$$

$\mathbf{i}_k, k = 1, 2, 3$, 是 x_k 轴上的单位向量。

第二节 物质描述和空间描述

方程 (1.1.1) 实质上给出的是初始位置坐标为 x_1, x_2 和 x_3 的质点运动轨迹, 其速度是

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{P}, t) = \frac{\partial}{\partial t} y_i(\mathbf{P}, t) \quad (1.2.1)$$

加速度是

$$\dot{v}_i(\mathbf{P}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y_i(\mathbf{P}, t) = \frac{\partial}{\partial t} v_i(\mathbf{P}, t) \quad (1.2.2)$$

其中 $\mathbf{P}$ 代表坐标为 x_1, x_2 和 x_3 的质点, 是不随时间 t 而变化的。方程(1.2.1)和(1.2.2)分别是在时间 $t=0$ 时坐标为 x_1, x_2 和 x_3 的质点, 在 t 时的速度和加速度。

把 x_1, x_2, x_3 和 t 作独立变量来描述物体的运动(或变形), 称为物质描述(material description)^[2]或拉格朗日(Lagrange)描述, 而 x_1, x_2, x_3 和 t 称为拉格朗日变量。这种描述是跟随着运动的质点研究质点的运动状态。

另一种描述运动(或变形)的方法称为空间描述(spatial description^[2])。在空间描述中, 取 y_1, y_2, y_3 和 t 作独立变量。这种描述又称欧拉(Euler)描述, y_1, y_2, y_3 和 t 称为欧拉变量。空间描述的研究方式不是跟随着运动的质点研究其运动状态, 而是研究各不同的质点经过空间某一定点 y_1, y_2 和 y_3 时的状态。

或者说, 拉格朗日描述是以变形前的状态, 即以已知的初始构型 V_0 为参考状态来描述物体的运动, 而欧拉描述则是以当前的构型 V 为参考状态来描述物体的运动状态。

例如, 运动物体各质点的速度场, 用空间描述方式为 $v_i(\mathbf{p}, t) = v_i(y_1, y_2, y_3, t)$, 是与每一质点在空间的瞬时位置 $\mathbf{p}$ 和时间 t 有关, 它所描述的是空间各不同的质点经过空间一定点 y_1, y_2, y_3 时的“换班”速度。其加速度是

$$\dot{v}_i(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \quad (j \text{ 求和}) \quad (1.2.3)$$

$\mathbf{p}$ 代表变量 y_1, y_2 和 y_3 。这个公式可以这样证明。一个在时间 t 时位于空间坐标为 y_1, y_2 和 y_3 的质点, 在时间 $t+dt$ 时, 被移动到空间坐标为 $y_i + v_i dt$ ($i=1, 2, 3$)的位置。在时间 dt 过程中, 这个质点速度的变化为

$$\dot{v}_i(\mathbf{p}, t) dt = v_i(y_i + v_i dt, t + dt) - v_i(y_i, t)$$

将上式右边用泰勒(Taylor)公式展开, 有

$$\dot{v}_i(\mathbf{p}, t) = v_i(\mathbf{p}, t) + \frac{\partial v_i}{\partial t} dt + v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dt - v_i(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t} dt + v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dt$$

将上式两边用 dt 除, 即得(1.2.3)式。其中第一项表示速度和时间有关, 第二项表示速度随空间位置的改变而变化。

推广到一般情况, 对于任意函数 $F(\mathbf{p}, t)$, 类似于公式(1.2.3), 有

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{DF}{Dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{\mathbf{P}=\text{const}} + v_i \frac{\partial F}{\partial y_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{\mathbf{P}=\text{const}} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \text{grad} F \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

量 $\dot{F} \equiv \frac{DF}{Dt}$ 称为函数 F 的物质导数, 显然物质导数是针对欧拉描述而言。

物体质量在变形过程中是不变的, 下面讨论质量守恒定律在物质描述和空间描述中的不同表达式。在初始构型 V_0 中任取一体积 v_0 , 这个体积所包含的质量是 $\int_{v_0} \rho_0(\mathbf{P}) dx_1 dx_2 dx_3$, 其中 $\rho_0(\mathbf{P})$ 是构型 V_0 中在 $\mathbf{P}$ 点处的密度。这个体积 v_0 变形为 v , 由于质量守恒, 有

$$M = \int_{v_0} \rho_0(\mathbf{P}) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_v \rho(\mathbf{p}) dy_1 dy_2 dy_3 = \text{const} \quad (1.2.5)$$

其中 $\rho(\mathbf{p})$ 是在 V 中 $\mathbf{p}$ 点处的密度。由坐标变换关系(1.1.1)有等式

$$\int_V \rho(\mathbf{p}) dy_1 dy_2 dy_3 = \int_{v_0} \rho(\mathbf{p}) \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| dx_1 dx_2 dx_3$$

所以有 $\int_{v_0} \left[\rho_0(\mathbf{P}) - \rho(\mathbf{p}) \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0$

由于 v_0 的任意性,故有等式

$$\rho_0(\mathbf{P}) = \rho(\mathbf{p}) \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| \equiv J \rho(\mathbf{p}) \quad (1.2.6)$$

这就是拉格朗日描述的质量守恒定律的表达式,其中 J ,由(1.1.3)式,有

$$J \equiv \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| = \left| \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \quad (1.2.7)$$

对于欧拉描述,由(1.2.5)式,有

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left[\int_{v_0} \rho(\mathbf{p}(\mathbf{P}, t)) J dV_0 \right] = \int_{v_0} \left(J \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{DJ}{Dt} \right) dv_0 = 0 \quad (1.2.8)$$

因为, $J dV_0 = dv = dy_1 dy_2 dy_3$, 所以有

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (dv) &= \frac{DJ}{Dt} dV_0 = \frac{D}{Dt} (dy_1 dy_2 dy_3) = \left(\frac{D}{Dt} dy_1 \right) dy_2 dy_3 + \\ &+ dy_1 \left(\frac{D}{Dt} dy_2 \right) dy_3 + dy_1 dy_2 \left(\frac{D}{Dt} dy_3 \right) \end{aligned}$$

因为在计算 dy_1 时, y_2 和 y_3 看作是常数,所以有

$$\frac{D}{Dt} dy_1 = d \frac{D}{Dt} y_1 = dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial y_1} dy_1$$

同理有

$$\frac{D}{Dt} dy_2 = dv_2 = \frac{\partial v_2}{\partial y_2} dy_2, \quad \frac{D}{Dt} dy_3 = dv_3 = \frac{\partial v_3}{\partial y_3} dy_3$$

在上面三式的推导中,应用了(1.2.4)式,如令 $F=y_1$,因为在欧拉描述中 y_1, y_2, y_3 和 t 是独立变量,故有 $\frac{\partial y_1}{\partial t}=0$,而(1.2.4)式中的第二项为 $v_i \frac{\partial y_1}{\partial y_i}=v_1$,于是有

$$\frac{D}{Dt} (dv) = \frac{DJ}{Dt} dV_0 = \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} \right) dy_1 dy_2 dy_3 = (\text{div} \mathbf{V}) J dV_0 +$$

将上式代入(1.2.8)式,由于 v_0 的任意性,有欧拉描述的质量守恒方程

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \mathbf{V} \equiv \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} \right) = 0 \quad (1.2.9)$$

由(1.2.4)式,有 $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \text{grad} \rho$ 及

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) &= \frac{\partial \rho v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \rho v_3}{\partial y_3} = \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} \right) + \\ &+ v_1 \frac{\partial \rho}{\partial y_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial y_2} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial y_3} = \rho \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \rho,\end{aligned}$$

因此得 (1.2.9) 式的另一表达形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.2.10)$$

由 (1.2.8) 式和 (1.2.9) 式可得在欧拉描述下更一般的表达式,

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_V F dv \right) = \int_V \left(\frac{DF}{Dt} + F \operatorname{div} \mathbf{V} \right) dv \quad (1.2.11)$$

现将本节所述结果概述如表 1.2.1^[3]。

表 1.2.1 物质描述和空间描述的量

	物质描述	空间描述
独立变量	P, t 或 x_1, x_2, x_3 和 t	p, t 或 y_1, y_2, y_3 和 t
因变量	$\rho(P, t)$	$V(p, t), \rho(p, t)$
位移	$\mathbf{u}(P, t) = \mathbf{p}(P, t) - \mathbf{P}$	$\mathbf{u}(p, t) = \mathbf{p} - \mathbf{P}(p, t)$
速度	$\mathbf{V}(P, t) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \quad (\equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})$	$\mathbf{V}(p, t)$
加速度	$\mathbf{a}(P, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \quad (\equiv \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2})$	$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{V}$
质量守恒方程	$\rho_0(P) = \rho(\mathbf{p}(P, t), t) J$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$
质点轨迹	$\mathbf{p} = \mathbf{p}(P, t)$	$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{V}(p, t)$

第三节 曲线坐标和流动坐标

上面介绍了用直角坐标系 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 描述物体运动状态。有时为了方便, 在坐标系 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 中分别引入曲线坐标 $\{\xi^i\}$ 和 $\{\eta^i\}$ 描述物体的变形状态, 如图 1.1.1 所示。例如, 一平板变形后板面为圆柱面, 那么描述变形前的几何形状, $\{\xi^i\}$ 取直角坐标系, 而描述变形后的状态可取 $\{\eta^i\}$ 为柱坐标系。对于一般情况, 令

$$x_i = x_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad y_i = y_i(\eta^1, \eta^2, \eta^3, t), \quad i=1, 2, 3 \quad (1.3.1)$$

由 (1.1.1) 式可建立关系

$$\eta^i = \eta^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \quad \xi^i = \xi^i(\eta^1, \eta^2, \eta^3, t), \quad i=1, 2, 3 \quad (1.3.2)$$

如果取 $\eta^i = \xi^i$, 那么 ξ^i (或 η^i) 就是流动坐标^[1]。所谓流动坐标, 就是当物体运动时该坐标值不变。流动坐标可以这样理解, 物体的质点流动坐标值永远固结在质点上, 即使物体变了形, 各质点已离开了它的原来位置, 但它们的流动坐标值不变; 或者说, 建立流动坐标值的坐标系受到了跟物体一样的变形。虽然在运动过程中, 各质点的流动坐标值不变, 但由方程 (1.3.1) 的第二式, 还能识别出各质点在不同瞬时的空间位置 $y_i (i=1, 2, 3)$ 。

参 考 文 献

- (1) Mason Jayme, "Variational, Incremental and Energy Methods in Solid Mechanics and Shell Theory", Elsevier Scientific Publishing Company, 1980.
- (2) Fung, Y. C., "Foundations of Solid Mechanics", Prentice-Hall, Inc., 1965.
- (3) Huter, S. C., "Mechanics of Continuous Media", Second edition, Ellis Horwood Limited, 1983.

第二章 张量及其运算

第一节 基 向 量

为了描述物体的初始构型 V_0 在空间的位置,引入了一固定直角坐标系 $\{x_i\}$,其任一质点 P 的位置由(1.1.6)式给出的向径 P 确定。在坐标系 $\{x_i\}$ 中引入一曲线坐标 $\{\xi^i\}$,那么有

$$P = P(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_{k=1}^3 x_k(\xi^1, \xi^2, \xi^3) i_k \equiv x_k(\xi^1, \xi^2, \xi^3) i_k \quad (2.1.1)$$

因此有线元素

$$dP = \sum_{k=1}^3 G_k d\xi^k \equiv G d\xi^k \quad (2.1.2)$$

式中

$$G_k = \frac{\partial P}{\partial \xi^k} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi^k} i_\alpha \equiv \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi^k} i_\alpha \quad (2.1.3)$$

今后凡是遇到上下相同的角标,都意味着该角标从1至3求和,如(2.1.2)式所示,有时两个相同的下角标(例如对于直角坐标系)也意味着求和,如(2.1.1)和(2.1.3)式。

由(2.1.3)式所定义的向量 G_k 称为协变基向量(covariant base vector),其方向是与坐标线的切线方向一致的,如图1.1.1。基向量 G_k , $k=1, 2, 3$,是空间三个非共面向量,但它们之间不一定相互正交。

有了协变基向量 G_i ,可由下式

$$G_i \cdot G^j = G_i^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1.4)$$

定义逆变基向量 G^j , $j=1, 2, 3$ (contravariant base vector)。对于二维情况逆变和协变基向量的关系如图2.1.1。

应当指出,无论协变基向量还是逆变基向量,它们本身的大小不一定等于单位1,即它们不一定是单位基向量。

有了基向量 G_i 和 G^i (一般情况是随坐标而变化的),那么空间任一点 P 的向量 u ,就可以表示为该点的基向量的线性组合,即

$$u = u^1 G_1 + u^2 G_2 + u^3 G_3 = u_i G^i + u_1 G^1 + u_2 G^2 + u_3 G^3 = u^i G_i = u_i G^i \quad (2.1.5)$$

u^i 和 u_i ($i=1, 2, 3$) 分别是向量 u 的逆变分量和协变分量。由(2.1.4-5)式,得

$$u^i = u \cdot G^i, \quad u_i = u \cdot G_i \quad (2.1.6)$$

(2.1.5)式就是通常的平行四边形法则,如图2.1.2,有

$$u = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OB}| G_1 / |G_1| + |\overrightarrow{OA}| G_2 / |G_2| \quad (a)$$

由图2.1.2,可知

$$|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OD}| / \cos \alpha = u \cdot G^1 / |G^1| \cos \alpha$$

因为 $|G_1| |G^1| \cos \alpha = 1$, 所以有

$$|\overrightarrow{OB}| = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}^1 |\mathbf{G}_1| \quad (\text{b})$$

$$\text{同理有 } |\overrightarrow{OA}| = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}^2 |\mathbf{G}_2| \quad (\text{c})$$

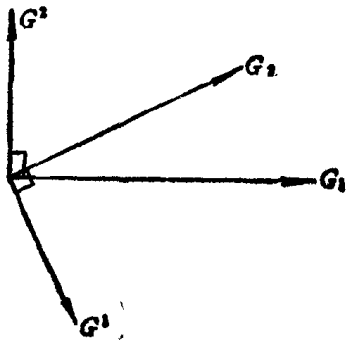


图 2.1.1 二维协变和逆变基向量

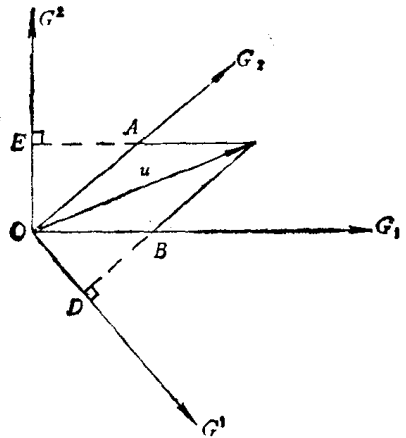


图 2.1.2 平行四边形法则

将 (b)、(c) 二式代入 (a) 式, 有二维情况的 (2.1.5) 式,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}^1 \mathbf{G}_1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}^2 \mathbf{G}_2 = u^1 \mathbf{G}_1 + u^2 \mathbf{G}_2$$

由 (2.1.5) 式, 有

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^1 u_1 + u^2 u_2 + u^3 u_3 \quad (2.1.7)$$

对于单位正交基向量, $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}^i$ ($i=1, 2, 3$), $u^i = u_i$, 于是有

$$\mathbf{u}^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (2.1.8)$$

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}_i \quad (2.1.9)$$

第二节 张 量

首先研究空间一向量, 例如描写一质点从空间一点 A 移动到另一点 B 的位移向量 $\mathbf{u}$, 无论从哪一个坐标系观察这个向量 $\mathbf{u}$, 它所反映的总是 A 点移动到 B 点的客观事实, 它不随观察者所在的坐标系而改变。当然要具体研究这个向量, 总要将它参照一定的坐标系, 在不同的坐标系里具有不同的分量, 但因为在不同的坐标系所描述的是同一个客观事实, 因此这个向量对于不同坐标系的分量之间必然存在某一种特殊关系, 这就是下面将要研究的。

令一坐标系为 $\{\xi^i\}$, 其基向量为 $\mathbf{G}_i$ 和 $\mathbf{G}^i$, $i=1, 2, 3$; 另一坐标系为 $\{\xi'^i\}$, 其基向量为 $\mathbf{G}_i'$ 和 $\mathbf{G}^i'$, $i'=1', 2', 3'$ 。将基向量 $\mathbf{G}_i$ 和 $\mathbf{G}^i$ 作为坐标系 $\{\xi^i\}$ 中的向量, 于是有

$$\mathbf{G}_i = \beta_{ij}^i \mathbf{G}_j, \quad \mathbf{G}^i = \beta_j^i \mathbf{G}^j \quad (2.2.1a)$$

根据协变基向量的定义, 有

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \xi'^j} \frac{\partial \xi'^j}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \xi'^j}{\partial \xi^i} \mathbf{G}_j$$

与 (2.2.1a) 式比较, 则有

$$\beta_j^i = \frac{\partial \xi'^j}{\partial \xi^i} \quad (2.2.1b)$$

同理, 如果将基向量 $\mathbf{G}_i$ 和 $\mathbf{G}^i$ 作为坐标系 $\{\xi'^i\}$ 中的向量, 则有

$$\mathbf{G}_i = \alpha_i^j \mathbf{G}_j, \quad \mathbf{G}^i = \alpha_j^i \mathbf{G}^j \quad (2.2.2a)$$

亦有

$$\alpha_i' = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^i} \quad (2.2.2b)$$

将 (2.2.1a) 式的第二式与 (2.2.2a) 式的第一式两边点乘, 则有

$$\alpha_i' \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \alpha_i' \delta_i^j = \alpha_i' = \beta_j' \mathbf{G}^j \cdot \mathbf{G}_i = \beta_j' \delta_j^i = \beta_j'$$

于是有

$$\beta_j' = \alpha_i' = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^j} \quad (2.2.3a)$$

同理有

$$\beta_i' = \alpha_j' \quad (2.2.3b)$$

于是有

$$\mathbf{G}_i = \beta_j' \mathbf{G}_j, \quad \mathbf{G}^j = \beta_i' \mathbf{G}^i \quad (2.2.2c)$$

显然有

$$\delta_i^j = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \beta_m' \mathbf{G}_m \cdot \beta_n' \mathbf{G}^n = \beta_m' \beta_n' \delta_m^n = \beta_m' \beta_m' \quad (2.2.4a)$$

同理亦有

$$\beta_i' \beta_m' = \delta_i^m \quad (2.2.4b)$$

有了不同坐标系基向量之间的变换关系 (2.2.1) 和 (2.2.2) 式, 现在讨论向量的分量在不同坐标系下的变换关系。向量 $\mathbf{u}$ 在坐标系 $\{\xi^i\}$ 和 $\{\xi'^i\}$ 中分别可表示为

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{G}_i = u_i \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{u} = u'^i \mathbf{G}_i' = u_i' \mathbf{G}^{i'} \quad (a, b)$$

将 (2.2.1) 式代入 (b) 式, 有

$$\mathbf{u} = u'^i \mathbf{G}_i' = u'^i \beta_j' \mathbf{G}_j \equiv u^j \mathbf{G}_j$$

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{G}^i = u_i \beta_j' \mathbf{G}^j \equiv u_j \mathbf{G}^j$$

由于基向量 $\mathbf{G}_i$ 和 $\mathbf{G}^j$ ($j=1, 2, 3$) 是非共面的向量, 即是线性无关的, 对此 $\mathbf{G}_i$ 和 $\mathbf{G}^j$ 的系数, 有通常的坐标变换关系

$$u^j = \beta_i' u^i, \quad u_i = \beta_i' u_i' \quad (2.2.5a)$$

同理有

$$u'^i = \beta_i' u^i, \quad u_i' = \beta_i' u_i \quad (2.2.5b)$$

不随坐标系改变的量, 除了向量, 还有标量, 如温度、能量、线段的长度等。现在讨论一标量, 线元素长度的平方在不同坐标系的表达式, 有

$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \xi^i} d\xi^i = \mathbf{G}_i d\xi^i = \mathbf{G}_i \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^j} d\xi'^j = \beta_j' \mathbf{G}_i d\xi'^j \quad (2.2.6a)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \xi'^j} d\xi'^j = \mathbf{G}_j' d\xi'^j \quad (2.2.6b)$$

$$dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = \mathbf{G}_i d\xi^i \cdot \mathbf{G}_j d\xi^j = G_{ij} d\xi^i d\xi^j = G_{ij} \beta_i' \beta_j' d\xi'^i d\xi'^j \quad (2.2.7)$$

$$= \mathbf{G}_i' d\xi'^i \cdot \mathbf{G}_j' d\xi'^j = G_{i'j'} d\xi'^i d\xi'^j \quad (2.2.8)$$

其中定义

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial x_m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_m}{\partial \xi^j} = G_{ji} \quad (2.2.9)$$

$$G_{i'j'} = \mathbf{G}_{i'} \cdot \mathbf{G}_{j'} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial x_m}{\partial \xi'^i} \frac{\partial x_m}{\partial \xi'^j} = G_{j'i'} \quad (2.2.10)$$

比较 (2.2.7~8) 式, 有

$$G_{i'j'} = G_{ij} \beta_i' \beta_j' \quad (2.2.11)$$

比较 (2.2.5) 和 (2.2.11) 式, 可以发现它们具有相同的变换关系。把这样的变换关系推广到一般情形, 如果某一组量, 在坐标系 $\{\xi^i\}$ 中的分量为 $T_{ijk\dots}$, $T^{ijk\dots}$, 而在坐标系 $\{\xi'^i\}$ 中为 $T_{i'j'k'\dots}$, $T^{i'j'k'\dots}$, 它们之间并存在类似于 (2.2.11) 式的关系,

$$T_{i'j'k'\dots} = \beta_i' \beta_j' \beta_k' \dots T_{ijk\dots} \quad (2.2.12)$$

$$T^{i'j'k'\dots} = \beta_i' \beta_j' \beta_k' \dots T^{ijk\dots} \quad (2.2.13)$$

其中 β_i^j 和 β_j^i 是由(2.2.1b)和(2.2.3a)式确定的变换系数。把满足变换关系(2.2.12)或(2.2.13)式的一组有序数的整体称为张量。每一个角标取具体数值时,相对应的数称为张量的分量。如果张量的分量具有一个角标时,如(2.2.5)式,称为一阶张量,也就是向量。由(2.2.11)式定义的具有两个角标的九个数称为二阶张量,又称仿射量。

上面从不随坐标系而改变的空间向量及标量,微线元素的平方,引入了张量的概念。因此如果一个量是张量,那么它就是不随坐标系改变的量,如第五章、第六章将要介绍的应变张量和应力张量,尽管在各不同的坐标系中具有不同的分量,但是它们所描述的却是一点的邻域的同一个应变和应力状态。正因为这样,人们常把力学的方程写成张量的形式,例如由一阶张量,即向量所描述的质点运动方程

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \right) = F(t)$$

它是不参考于任何特殊坐标系的张量方程。当然在解决具体问题时,必须参考某一特殊的坐标系,把张量方程化成分量的形式。

第三节 度量张量

上节讨论了由 G_{ij} 九个量所组成的整体称为张量,它是计算线元素长度的平方的核心,故把 G_{ij} 又称为度量张量。 G_{ij} 的每一个数称为度量张量的协变分量,它是由协变基向量 G_i 和 G_j 和(2.2.9)式确定。同样可由逆变基向量 G^i 和 G^j 定义度量张量的逆变分量

$$G^{ij} = G^i \cdot G^j = G^{ij} \quad (2.3.1)$$

G^{ij} 的张量性质不难证明。如,对于坐标系 $\{\xi^i\}$ 有

$$G^{i'j'} = G^{i'} \cdot G^{j'} = \beta_{i'}^{i'} G^i \cdot \beta_{j'}^{j'} G^j = \beta_{i'}^{i'} \beta_{j'}^{j'} G^i \cdot G^j = \beta_{i'}^{i'} \beta_{j'}^{j'} G^{ij} \quad (2.3.2)$$

与(2.2.13)式比较,这就是二阶张量的变换关系,故 G^{ij} 是张量。

有了度量张量的协变分量和逆变分量就可以得到协变基向量和逆变基向量之间的关系。如,将逆变基向量 G^i ,按协变基向量分解,有

$$G^i = \alpha^j G_j$$

上式两边点乘 G^m ,由(2.1.4)式,有

$$G^i \cdot G^m = G^{im} = \alpha^j G_j \cdot G^m = \alpha^j \delta_j^m = \alpha^m$$

于是有

$$G^i = G^{im} G_m \quad (2.3.3)$$

同理有

$$G_i = G_{im} G^m \quad (2.3.4)$$

由(2.1.4)式, $\delta_i^j = G_i \cdot G^j = G_{im} G^m \cdot G^{jn} G_n = G_{im} G^{jn} G^m \cdot G_n = G_{im} G^{jn} \delta_n^m = G_{im} G^{jm}$

于是有

$$G_{im} G^{jm} = \delta_i^j \quad (2.3.5)$$

将上式写成矩阵相乘的形式,

$$\begin{bmatrix} G^{11} & G^{12} & G^{13} \\ G^{21} & G^{22} & G^{23} \\ G^{31} & G^{32} & G^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

向量的协变分量和逆变分量之间也有(2.3.3~4)式的关系。如

$$u^j = u \cdot G^j = u_i G^i \cdot G^j = u_i G^{ij}, \quad u_j = u \cdot G_j = u^i G_i \cdot G_j = u^i G_{ij}$$

于是有

$$u^j = G^{ji} u_i, \quad u_j = G_{ji} u^i \quad (2.3.7)$$

由(2.3.3~4)和(2.3.7)式可以发现,度量张量 G^{ij} 和 G_{ij} 具有升降角标的功能,当要求降一角标时,要乘以因子 G_{ij} ,要求升一角标时,则需乘以因子 G^{ij} ,如