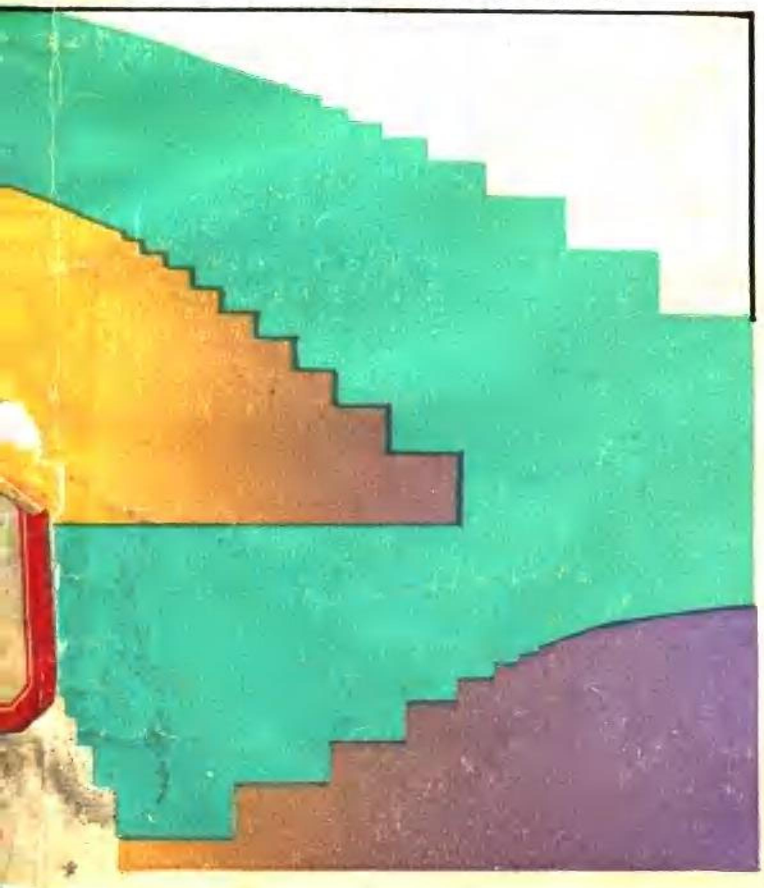
数值逼近

蔡耀志 编

浙江大学出版社



数值逼近

蔡耀志 编

浙江大学出版社

内 容 简 介

本书介绍实用函数论知识．主要内容有：数值运算误差分析、代数插值、样条函数、数值积分、数值求导、切比雪夫最佳逼近、最佳平方逼近、有限富氏分析和快速富氏变换，有理函数插值、二元函数分片光滑逼近等．

本书深入浅出，选材精炼，把函数逼近理论和数值分析方法紧密结合，并与计算机实际应用密切相关．本书包含了“数值逼近”学科的一些近代成果．

本书可作为计算数学专业的教材，也可供大学高年级学生、研究生、计算数学工作者及工程技术人员参考．

数 值 逼 近

蔡耀志　编

责任编辑　贾吉柱

*

浙江大学出版社出版

上虞科技外文印刷厂排印

浙江省新华书店发行

787×1092　32开本 7.25 印张 168 千字

1991年6月　第1版　1991年6月　第1次印刷

印数：0001—2000

ISBN7—308—00715—4

O·093　　定价：1.90元

前　　言

“数值逼近”是计算数学专业基础课，其内容实质是介绍实用函数论知识。主要谈及函数逼近、数值积分及数值求导等基本和日用知识。每一章的内容几乎都与计算机上实际应用密切相关。

本书在笔者从事本科计算数学教学“数值逼近”所使用十二年的讲义基础上几经改写而成，它是本人多年教学经验及某些方面研究成果的结晶。它的主干与李岳生、黄友谦二位老师所写“数值逼近”基本相同。因此，全书内容反映了高教教学大纲，难易适中，深入浅出。它适合于作为65个学时计算数学“数值逼近”的教材，也可作大学高年级学生及研究生、以及数学教师、计算数学工作者、工程技术人员参考用书。

限于本人水平，书中定有不足之处，敬请批评指正。

蔡　耀　志

1991年3月于浙大

目　　录

第一章　数值运算误差分析

对一个实际问题进行计算后，应该对其精度进行分析，这是必不可少的。许多人认为电子计算机位数很长，计算精度是不会有问题，本章的分析告诉你这种高枕无忧是错误的。

§1.1　误 差 分 类

人们在用数学来解决一个实际问题时，往往为使问题简化，总是抓住主要矛盾而抛开一些次要矛盾，从而抽象出数学模型，这样的误差称为“模型误差”。

在数学模型中往往包含了若干参数，这些参数一般是通过测量得到，因此使整个问题也引入误差。这种误差称为“测量误差”。

从实际问题中抽象所得的数学模型往往十分复杂，在数学上无法获得精确解，因此必须建立一套行之有效的近似方法，即数值方法。我们通常称数学模型准确解和数值方法准确解之差为“方法误差”或“截断误差”。

由于实际计算时总是按有限位进行，所以初始数据的截断和每一步计算都有可能引入误差。起始值的截断所引起的误差称为“始值误差”，运算舍入所引起的误差称为“舍入误差”。这两类误差统称为“计算误差”。

综上我们看到从一个实际问题的提出到解决常常包含了以

上五个方面的误差。模型误差和测量误差一般是工程技术人员的任务。作为计算方法这个学科来说，它的任务是研究“方法误差”、“始值误差”和“舍入误差”。当然必须注意到不是所有的问题都具有这五个方面的误差。

例 1.1 记某种金属棒在温度 t 时长度为 L_t，L_0 是在 0 度时的长度，我们从理论上假定计算长度的数学模型 $l_{1,t}$ 为

$$L_t \approx l_{1,t} = L_0(1+\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3+\cdots)$$

当然这种假设只能近似地描绘这种物理现象。(L_t-l_{1t}) 称为“模型误差”。

精确的 $\alpha,\beta,\gamma\cdots$ 一般是无法求得的，我们只能根据实验测得其近似值 $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0\cdots$，以下公式

$$L_{2,t} = L_0(1+\alpha_0 t+\beta_0 t^2+\gamma_0 t^3+\cdots)$$

称为与理论数学模型之差 $(l_{1,t}-l_{2,t})$ 即“测量误差”。

在实际使用时总是使用有限项

$$l_{3,t} = L_0(1+\alpha_0 t+\beta_0 t^2)$$

$(l_{2,t}-l_{3,t})$ 称为“截断误差”（或称方法误差）。

按以上公式计算时系数和 t 值常常会引入一个起始的截断误差，假定以后的计算是精确进行，这样的值记为 $l_{4,t}$ 则 $(l_{3,t}-l_{4,t})$ 就称为“始值误差”。

在按公式作实际运算时，每作一次运算就要作一次舍入，最后所得之数记为 $l_{5,t}$，则 $(l_{4,t}-l_{5,t})$ 称为舍入误差。

综上分析，总的误差为

$$\begin{aligned}|L_t-l_{5,t}| \leqslant\ & |L_t-l_{1,t}|+|l_{1,t}-l_{2,t}|+|l_{2,t}-l_{3,t}| \\ & +|l_{3,t}-l_{4,t}|+|l_{4,t}-l_{5,t}|\end{aligned}$$

§1.2 误差的表达方式

误差的表达通常有“绝对误差”,“相对误差”和“有效数字”三种方式,而且这三者之间是紧密相关的。

1.2.1 绝对误差

定义 1.1 设 x 为准确数,x^* 为近似数,记

$$E(x) = x - x^* \tag{1.1}$$

称 $E(x)$ 为近似数 x^* 的绝对误差。

如果我们得到估值 $|x - x^*| \leqslant \eta$,则称 η 为绝对误差限。常采用记法 $x = x^* \pm \eta$。

绝对误差是有量纲单位的,它只能用于对一个具体测量的量近似程度的比较。例如,甲穿100个孔穿错一个,而乙穿 100 个孔穿错三个,这个具体的量就是“穿 100 孔”。显然从绝对误差直接看出甲的准确度高于乙。但当甲穿 150 个错二个,乙穿 200 个错三个时,用绝对误差就难于表达谁准确度高。

1.2.2 相对误差

定义 1.2 记

$$E_r(x) = (x - x^*)/x \text{ 或 } E_r(x) = (x - x^*)/x^* \tag{1.2}$$

为近似数 x^* 的相对误差。

采用相对误差就能很清楚地衡量出以上甲乙的好坏。

甲穿孔的相对误差

$$|E_r| \leqslant 2/150 = 0.0133$$

乙穿孔的相对误差

$$|E_r| \leqslant 3/200 = 0.015$$

所以甲的准确度高。

注意相对误差是一个无量纲的量。绝对误差和相对误差表达一个数的近似程度，都是需要加以单独说明，这是一个缺点，有效数字的办法克服了这个缺点。

1.2.3 有 效 数 字

四舍五入成 r 位数的规则如下：

1. 若 $r+1$ 位数 $\leqslant 4$，则舍去。
2. 若 $r+1$ 位数 $\geqslant 6$，则 r 位增加一个 1。
3. 若 $r+1$ 位等于 5，则

   i）如果 r 位是偶数，则 $r+1$ 位舍去。

   ii）如果 r 位是奇数，则 r 位增加 1。

定义 1.3 将 x 的近似数 x^* 写成

$$x^* = 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^l, a_1 \neq 0 \tag{1.3}$$

其中 l 是整数，而且其误差满足

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2}10^{l-n} \tag{1.4}$$

则便说近似数 x^* 具有 n 位有效数字。

例 1.2 从定义直接可以看出 3.1416 是具有五位有效数字，这是因为

$$|\pi - 3.1416| < 0.8 \times 10^{-5} < 0.5 \times 10^{-4}, -4 = 1 - n, n = 5$$

3.1415926

注意 (1.3) ~~中，若~~ a_n 为零，则该零不能省略。

0.0000094

1.2.4 绝对误差、相对误差和有效数字之间的关系

结论 1 若有 n 位有效数字则其相对误差限为

$$|E_r(x)| \leqslant 10^{1-n}/2\,a_1 (a_1 \text{ 为 } x \text{ 的最高位数字}) \tag{1.5}$$

证明 $|E_r(x)| = |(x - x^*)/x^*| \leqslant 0.\overbrace{0\cdots 05}^{n} \times 10^l/|x^*|$

$\leqslant 0.5\times10^{-n}/0.a_1=10^{1-n}/2\,a_1$

推论 若具有 n 位有效数字则其相对误差一定有

$$|E_r(x)|\leqslant10^{1-n}/2 \tag{1.6}$$

$\frac{1}{2}$ 人 D

结论 2 若相对误差有

$$|E_r(x)|\leqslant10^{1-n}/2(a_1+1) \tag{1.7}$$

则至少有 n 位有效数字。

证明 $|E(x)|=|x^*||(E_r(x)|\leqslant0.a_1a_2\cdots a_n\times10^l\times10^{1-n}/2(a_1+1)\leqslant10^{l-n}/2$

推论 若相对误差有

$$|E_r(x)\leqslant10^{-n}/2 \tag{1.8}$$

则至少有n 位有效数字。

例 1.3 为了使$\sqrt{20}$的近似数的相对误差小于 0.1%，问要取几位有效数字。

解 $\sqrt{20}$ 的第一位数字为 4，所以 $a_1=4$，于是

$10^{1-n}/2\,a_1=10^{1-n}/8\leqslant0.1\%=10^{-3}$，显然 $n=4$ 时成立。

所以应当取四位有效数字。

§1.3 截断误差估值

对于某一问题提出一个近似计算方法，一般都必须给出其截断误差估值公式或估值方法，这是作为给出一种近似计算方法必要组成部分。例如各种插值，逼近，数值积分，数值微分和各种方程数值解，在各种手册中都能查到它们的截断误差估值公式或估值方法。求精确的截断误差问题一般往往涉及到求解超越方程。截断误差估值的前提是计算的字长有充分长并且参数和始值是精确的。

例 1.4 求出 $x-x^3/6$ 逼近 $\sin x$ 的截断误差，$x\in[0,\pi/4]$

解 要求其精确截断误差，就得求出误差函数

$$R(x)=\sin x-(x-x^3/6)$$

的最大和最小值。这只能通过求解 $R'(x)=0$ 的超越方程才能求得。但当要求不严格时，我们可以通过交错级数的截断或广义增量公式等获得。

$$|R(x)|=|\sin x-(x-x^3/6)|\leqslant|x|^5/5!\leqslant|\pi/4|^{-5}/5!$$
$$=0.00249$$

而实际精确误差上界是 0.002454。

§1.4 始值误差的估值

始值误差估值的前提是假定计算字长充分长，所以舍入误差可略去不计。

1.4.1 应用增量公式来求始值误差

始值误差严格地说为

$$E(f)=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad 0<\theta<1 \tag{1.9}$$

而实际计算时采用公式

$$E(x)\approx f'(x)\Delta x=f'(x)E(x) \tag{1.10}$$

$$E_r(f)\approx(xf'(x)/f(x))E_r(x) \tag{1.11}$$

显然以上公式可以推广到多变量情形。从公式中可以看到 $f'(x)$ 和 $xf'(x)/f(x)$ 分别称为绝对误差和相对误差条件数，它是函数的一种固有性质。使得 $|f'(x)|$ 很大的点 x 称为绝对误差坏条件点，使得 $|xf'(x)/f(x)|$ 很大的点称为相对误差坏条件点。从公式中可以看到，绝对误差坏条件点也常常是相对

误差坏条件点。函数等于零处常常是相对误差坏条件点。

例 1.5 $y=(x-2)^{1/2}$和 $y=\ln x$

前一函数 $x=2$ 是绝对误差和相对误差坏条件点，后一函数 $x=1$ 是相对误差坏条件点。

为了保证在坏条件处的计算精度，通常只能增加始值的精确度来克服。

1.4.2 应用相对误差的和、积、商公式来求始值误差

根据相对误差的定义，以下三公式极易证明：

$$E_r(x+y)=[xE_r(x)+yE_r(y)]/(x+y) \tag{1.12}$$

$$E_r(x\times y)=E_r(x)+E_r(y) \tag{1.13}$$

$$E_r(y/x)=E_r(y)-E_r(x) \tag{1.14}$$

以上三公式都可用以下一个公式统括起来

$$E_r(f(x))=d(\ln f(x))=\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\frac{xf'(x)}{f(x)}E_r(x)$$

从（1.12）中我们看到当 $x+y\approx 0$ 时会使计算精度大大降低，也即应尽量避免很相近的数相减。

例 1.6 分析 $y=r\cos\varphi$ 的相对误差。

解 $E_r(y)=E_r(r)+E_r(\cos\varphi)=E_r(r)-\varphi\operatorname{tg}\varphi E_r(\varphi)$

1.4.3 区间分析法

在实际问题中，初始数据常常是知道其误差范围，而计算字长足够长，估计舍入误差不会对其发生太大影响时，我们可采用如下的区间分析法来分析其始值误差。

若 $x\in[a_1,b_1]$、$y\in[a_2,b_2]$则有如下区间运算规则

1）$x+y\in[a_1+a_2,b_1+b_2]$，即

$$[a_1,b_1]+[a_2,b_2]=[a_1+a_2,b_1+b_2] \tag{1.15}$$