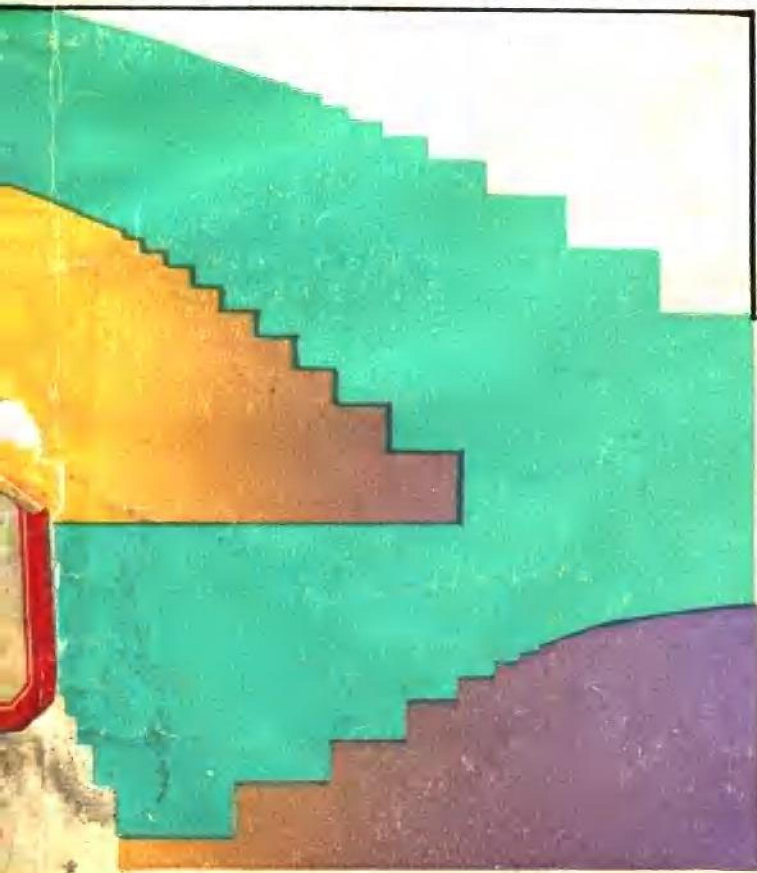


数值逼近



蔡耀志 编

浙江大学出版社



数值逼近

蔡耀志 编

浙江大学出版社

内 容 简 介

本书介绍实用函数论知识。主要内容有:数值运算误差分析、代数插值、样条函数、数值积分、数值求导、切比雪夫最佳逼近、最佳平方逼近、有限富氏分析和快速富氏变换,有理函数插值、二元函数分片光滑逼近等。

本书深入浅出,选材精炼,把函数逼近理论和数值分析方法紧密结合,并与计算机实际应用密切相关。本书包含了“数值逼近”学科的一些近代成果。

本书可作为计算数学专业的教材,也可供大学高年级学生、研究生、计算数学工作者及工程技术人员参考。

数 值 逼 近

蔡耀志 编

责任编辑 贾吉柱

*

浙江大学出版社出版

上虞科技外文印刷厂排印

浙江省新华书店发行

787×1092 32开本 7.25印张 168千字

1991年6月 第1版 1991年6月 第1次印刷

印数: 0001—2000

ISBN7—308—90715—4

O·093

定价:1.90元

前 言

“数值逼近”是计算数学专业基础课，其内容实质是介绍实用函数论知识。主要谈及函数逼近、数值积分及数值求导等基本和日用知识。每一章的内容几乎都与计算机上实际应用密切相关。

本书在笔者从事本科计算数学教学“数值逼近”所使用十二年的讲义基础上几经改写而成，它是本人多年教学经验及某些方面研究成果的结晶。它的主干与李岳生、黄友谦二位老师所写“数值逼近”基本相同。因此，全书内容反映了高教教学大纲，难易适中，深入浅出。它适合于作为65个学时计算数学“数值逼近”的教材，也可作大学高年级学生及研究生、以及数学教师、计算数学工作者、工程技术人员参考用书。

限于本人水平，书中定有不足之处，敬请批评指正。

蔡 耀 志

1991年3月于浙大

目 录

第一章 数值运算误差分析	1
§ 1.1 误差分类	1
§ 1.2 误差的表达方式	3
1.2.1 绝对误差	3
1.2.2 相对误差	3
1.2.3 有效数字	4
1.2.4 绝对误差、相对误差和有效数字之间的关系	4
§ 1.3 截断误差估值	5
§ 1.4 始值误差的估值	6
1.4.1 应用增量公式来求始值误差	6
1.4.2 应用相对误差的和、积、商公式来求始值误差	7
1.4.3 区间分析法	7
§ 1.5 舍入误差分析	8
§ 1.6 算法稳定性概念	10
习题一	12
第二章 代数插值	13
§ 2.1 拉格朗日 (Lagrange) 插值公式	14
§ 2.2 差分差商及其性质	19
2.2.1 微商的离散化	19
2.2.2 差分算子的形式运算	20

2.2.3	差分的主要性质	21
2.2.4	差商及其性质	24
§ 2.3	代数插值的牛顿公式	28
2.3.1	非等距节点的牛顿公式	28
2.3.2	等距节点的牛顿表初、表末和表中公式	30
§ 2.4	逐次线性插值(Aitken)	36
§ 2.5	关于高次插值的讨论	39
§ 2.6	多项式的 Hermite 插值	41
§ 2.7	多项式的 HB 插值	44
习题二		50

第三章 样条函数53

§ 3.1	半截函数及其性质	53
§ 3.2	样条函数的形成和定义	55
§ 3.3	三次样条插值	57
3.3.1	插值问题的提法	57
3.3.2	插值问题的存在唯一性	58
3.3.3	三次样条函数插值的极值性质	58
3.3.4	三弯矩插值法	60
3.3.5	插值余项	62
§ 3.4	分片三次埃尔米特插值	64
3.4.1	问题的提法及其解答	64
3.4.2	插值余项	65
§ 3.5	B 样条函数与磨光法	67
3.5.1	磨光定义	67
3.5.2	B 样条	68
3.5.3	阶梯函数的磨光	71
3.5.4	型值的盈亏修改	74
3.5.5	多值函数的磨光	75

习题三	77
第四章 数值积分	80
§ 4.1 等距节点的求积公式; 牛顿-柯特斯公式	80
4.1.1 公式的推导	80
4.1.2 误差分析	84
4.1.3 复化公式及其误差公式	88
4.1.4 运用欧拉-麦克劳林(Euler-Maclonrin)求和 公式研究复化求积公式的误差	91
§ 4.2 外推算法及其在数值积分中的应用	94
4.2.1 李查逊(Richardson)外推算法	94
4.2.2 龙贝格(Romberg)方法求数值积分	96
§ 4.3 自适应数值积分算法	98
§ 4.4 样条函数方法求数值积分简介	100
§ 4.5 振荡函数的积分	101
4.5.1 分部积分法	102
4.5.2 振荡函数数值积分一般原则	104
习题四	106
第五章 数值求导	108
§ 5.1 用差商代替导数	108
§ 5.2 用插值函数求微商	110
§ 5.3 利用数值积分公式来求数值微分	114
§ 5.4 用外推算法求数值微商	117
§ 5.5 用算子来表示求导公式	118
习题五	120
第六章 正交多项式和数值积分的进一步讨论	122
§ 6.1 正交多项式的一般性质	122

§ 6.2 常用的几个正交多项式	127
§ 6.3 高斯型求积公式	131
§ 6.4 奇异积分的数值方法	142
习题六	145

第七章 切比雪夫最佳逼近

§ 7.1 引言	148
§ 7.2 线性模空间的逼近问题	149
§ 7.3 切比雪夫最佳逼近的定义和性质	150
§ 7.4 切比雪夫多项式的导出	153
§ 7.5 切比雪夫最佳逼近的实现	155
7.5.1 用直线来最佳逼近 $f(x)$	155
7.5.2 k 次多项式用 n 次多项式来最佳逼近	156
7.5.3 用求解超越方程的方法来求最佳多项式	158
习题七	159

第八章 最佳平方逼近

§ 8.1 内积空间性质与最佳平方逼近概念	160
§ 8.2 最佳平方逼近的性质	161
§ 8.3 最佳逼近式的推求	162
§ 8.4 几个常用内积空间中的最佳平方逼近	163
8.4.1 R^n 空间中的最佳平方逼近	163
8.4.2 $C[a, b]$ 空间中的最佳平方逼近	164
8.4.3 离散函数的最佳平方逼近	166
习题八	169

第九章 有限富氏分析和快速富氏变换

§ 9.1 周期离散函数的富氏展开	171
-------------------------	-----

§ 9.2	离散富氏分析的误差	173
§ 9.3	离散富氏变换	175
9.3.1	富氏变换的离散化	175
9.3.2	离散富氏变换的形式	176
§ 9.4	离散富氏变换的快速算法	176
9.4.1	快速富氏变换的一般原理	176
9.4.2	以二为底的快速富氏变换	177
习题九		180
第十章	有理函数插值	182
§ 10.1	连分式	182
10.1.1	引言	182
10.1.2	连分式简介	183
§ 10.2	有理分式插值	185
10.2.1	通过解线代数方程获得有理分式插值公式	185
10.2.2	通过连分式获得有理分式插值公式(Thiele方法)	188
§ 10.3	巴脱(Pade)插值	192
§ 10.4	将有理分式函数化成连分式	196
习题十		198
第十一章	二元函数分片光滑逼近	201
§ 11.1	引言	201
§ 11.2	矩形域上分片插值问题	202
11.2.1	分片双一次插值	202
11.2.2	分片不完全双二次插值	204
11.2.3	矩形域上分片双三次埃尔米特插值	207
§ 11.3	三角形区域的插值	209

11.3.1	三角形区域上的线性插值	209
11.3.2	三角形区域上的二次插值	211
§ 11.4	康斯(Coons)插值	213
11.4.1	插值算子和布尔和	213
11.4.2	双一次康斯插值	214
11.4.3	双三次康斯插值	215
§ 11.5	矩形域上曲面磨光法	217
习题十一		219

第一章 数值运算误差分析

对一个实际问题进行计算后,应该对其精度进行分析,这是必不可少的。许多人认为电子计算机位数很长,计算精度是不会有问题的,本章的分析告诉你这种高枕无忧是错误的。

§ 1.1 误差分类

人们在用数学来解决一个实际问题时,往往为使问题简化,总是抓住主要矛盾而抛开一些次要矛盾,从而抽象出数学模型,这样的误差称为“模型误差”。

在数学模型中往往包含了若干参数,这些参数一般是通过测量得到,因此使整个问题也引入误差。这种误差称为“测量误差”。

从实际问题中抽象所得的数学模型往往十分复杂,在数学上无法获得精确解,因此必须建立一套行之有效的近似方法,即数值方法。我们通常称数学模型准确解和数值方法准确解之差为“方法误差”或“截断误差”。

由于实际计算时总是按有限位进行,所以初始数据的截断和每一步计算都有可能引入误差。起始值的截断所引起的误差称为“始值误差”,运算舍入所引起的误差称为“舍入误差”。这两类误差统称为“计算误差”。

综上所述我们看到从一个实际问题的提出到解决常常包含了以

上五个方面的误差。模型误差和测量误差一般是工程技术人员的任务。作为计算方法这个学科来说,它的任务是研究“方法误差”、“始值误差”和“舍入误差”。当然必须注意到不是所有的问题都具有这五个方面的误差。

例 1.1 记某种金属棒在温度 t 时长度为 L_t , L_0 是在 0 度时的长度,我们从理论上假定计算长度的数学模型 $l_{1,t}$ 为

$$L_t \approx l_{1,t} = L_0(1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \cdots)$$

当然这种假设只能近似地描绘这种物理现象。 $(L_t - l_{1,t})$ 称为“模型误差”。

精确的 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 一般是无法求得的,我们只能根据实验测得其近似值 $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \cdots$, 以下公式

$$l_{2,t} = L_0(1 + \alpha_0 t + \beta_0 t^2 + \gamma_0 t^3 + \cdots)$$

称为与理论数学模型之差 $(l_{1,t} - l_{2,t})$ 即“测量误差”。

在实际使用时总是使用有限项

$$l_{3,t} = L_0(1 + \alpha_0 t + \beta_0 t^2)$$

$(l_{2,t} - l_{3,t})$ 称为“截断误差”(或称方法误差)。

按以上公式计算时系数和 t 值常常会引入一个起始的截断误差,假定以后的计算是精确进行,这样的值记为 $l_{4,t}$ 则 $(l_{3,t} - l_{4,t})$ 就称为“始值误差”。

在按公式作实际运算时,每作一次运算就要作一次舍入,最后所得之数记为 $l_{5,t}$, 则 $(l_{4,t} - l_{5,t})$ 称为舍入误差。

综上所述,总的误差为

$$\begin{aligned} & |L_t - l_{5,t}| \leq \\ & |L_t - l_{1,t}| + |l_{1,t} - l_{2,t}| + |l_{2,t} - l_{3,t}| \\ & + |l_{3,t} - l_{4,t}| + |l_{4,t} - l_{5,t}| \end{aligned}$$

§ 1.2 误差的表达方式

误差的表达通常有“绝对误差”，“相对误差”和“有效数字”三种方式，而且这三者之间是紧密相关的。

1.2.1 绝对误差

定义 1.1 设 x 为准确数， x^* 为近似数，记

$$E(x) = x - x^* \quad (1.1)$$

称 $E(x)$ 为近似数 x^* 的绝对误差。

如果我们得到估值 $|x - x^*| \leq \eta$ ，则称 η 为绝对误差限。常采用记法 $x = x^* \pm \eta$ 。

绝对误差是有量纲单位的，它只能用于对一个具体测量的量近似程度的比较。例如，甲穿100个孔穿错一个，而乙穿100个孔穿错三个，这个具体的量就是“穿100孔”。显然从绝对误差直接看出甲的准确度高于乙。但当甲穿150个错二个，乙穿200个错三个时，用绝对误差就难于表达谁准确度高。

1.2.2 相对误差

定义 1.2 记

$$E_r(x) = (x - x^*)/x \text{ 或 } E_r(x) = (x - x^*)/x^* \quad (1.2)$$

为近似数 x^* 的相对误差。

采用相对误差就能很清楚地衡量出以上甲乙的好坏。

甲穿孔的相对误差

$$|E_r| \leq 2/150 = 0.0133$$

乙穿孔的相对误差

$$|E_r| \leq 3/200 = 0.015$$

所以甲的准确度高。

注意相对误差是一个无量纲的量。绝对误差和相对误差表达一个数的近似程度,都是需要加以单独说明,这是一个缺点,有效数字的办法克服了这个缺点。

1.2.3 有效数字

四舍五入成 r 位数的规则如下:

1. 若 $r+1$ 位数 ≤ 4 , 则舍去。
2. 若 $r+1$ 位数 ≥ 6 , 则 r 位增加一个 1。
3. 若 $r+1$ 位等于 5, 则
 - i) 如果 r 位是偶数, 则 $r+1$ 位舍去。
 - ii) 如果 r 位是奇数, 则 r 位增加 1。

定义 1.3 将 x 的近似数 x^* 写成

$$x^* = 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^l, a_1 \neq 0 \quad (1.3)$$

其中 l 是整数, 而且其误差满足

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} 10^{l-n} \quad (1.4)$$

则便说近似数 x^* 具有 n 位有效数字。

例 1.2 从定义直接可以看出 3.1416 是具有五位有效数字, 这是因为

$$|\pi - 3.1416| < 0.8 \times 10^{-5} < 0.5 \times 10^{-4}, -4 = 1 - n, n = 5$$

注意 (1.3) 中, 若 a_n 为零, 则该零不能省略。

0.0000004

1.2.4 绝对误差、相对误差和有效数字之间的关系

结论 1 若有 n 位有效数字则其相对误差限为

$$|E_r(x)| \leq 10^{1-n}/2 a_1 (a_1 \text{ 为 } x \text{ 的最高位数字}) \quad (1.5)$$

证明 $|E_r(x)| = |(x - x^*)/x^*| \leq 0.\overbrace{0\cdots 05}^n \times 10^l / |x^*|$

$$\leq 0.5 \times 10^{-n} / 0. a_1 = 10^{1-n} / 2 a_1$$

推论 若具有 n 位有效数字则其相对误差一定有

$$|E_r(x)| \leq 10^{1-n} / 2 \quad (1.6)$$

结论 2 若相对误差有

$$|E_r(x)| \leq 10^{1-n} / 2(a_1 + 1) \quad (1.7)$$

则至少有 n 位有效数字。

证明 $|E(x)| = |x^*| (|E_r(x)| \leq 0. a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^l \times 10^{1-n} / 2(a_1 + 1) \leq 10^{l-n} / 2$

推论 若相对误差有

$$|E_r(x)| \leq 10^{-n} / 2 \quad (1.8)$$

则至少有 n 位有效数字。

例 1.3 为了使 $\sqrt{20}$ 的近似数的相对误差小于 0.1% ，问要取几位有效数字。

解 $\sqrt{20}$ 的第一位数字为 4，所以 $a_1 = 4$ ，于是

$$10^{1-n} / 2 a_1 = 10^{1-n} / 8 \leq 0.1\% = 10^{-3}，显然 n = 4 时成立。$$

所以应当取四位有效数字。

§ 1.3 截断误差估值

对于某一问题提出一个近似计算方法，一般都必须给出其截断误差估值公式或估值方法，这是作为给出一种近似计算方法必要组成部分。例如各种插值，逼近，数值积分，数值微分和各种方程数值解，在各种手册中都能查到它们的截断误差估值公式或估值方法。求精确的截断误差问题一般往往涉及到求解超越方程。截断误差估值的前提是计算的字长有充分长并且参数和始值是精确的。

例 1.4 求出 $x - x^3/6$ 逼近 $\sin x$ 的截断误差, $x \in [0, \pi/4]$

解 要求其精确截断误差, 就得求出误差函数

$$R(x) = \sin x - (x - x^3/6)$$

的最大和最小值。这只能通过求解 $R'(x) = 0$ 的超越方程才能求得。但当要求不严格时, 我们可以通过交错级数的截断或广义增量公式等获得。

$$\begin{aligned}|R(x)| &= |\sin x - (x - x^3/6)| \leq |x|^5/5! \leq |\pi/4|^5/5! \\ &= 0.00249\end{aligned}$$

而实际精确误差上界是 0.002454。

§ 1.4 始值误差的估值

始值误差估值的前提是假定计算字长充分长, 所以舍入误差可略去不计。

1.4.1 应用增量公式来求始值误差

始值误差严格地说为

$$E(f) = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x \quad 0 < \theta < 1 \quad (1.9)$$

而实际计算时采用公式

$$E(x) \approx f'(x) \Delta x = f'(x) E(x) \quad (1.10)$$

$$E_r(f) \approx (xf'(x)/f(x)) E_r(x) \quad (1.11)$$

显然以上公式可以推广到多变量情形。从公式中可以看到 $f'(x)$ 和 $xf'(x)/f(x)$ 分别称为绝对误差和相对误差条件数, 它是函数的一种固有性质。使得 $|f'(x)|$ 很大的点 x 称为绝对误差坏条件点, 使得 $|xf'(x)/f(x)|$ 很大的点称为相对误差坏条件点。从公式中可以看到, 绝对误差坏条件点也常常是相对

误差坏条件点。函数等于零处常常是相对误差坏条件点。

例 1.5 $y = (x - 2)^{1/2}$ 和 $y = \ln x$

前一函数 $x = 2$ 是绝对误差和相对误差坏条件点, 后一函数 $x = 1$ 是相对误差坏条件点。

为了保证在坏条件处的计算精度, 通常只能增加始值的精确度来克服。

1.4.2 应用相对误差的和、积、商公式来求始值误差

根据相对误差的定义, 以下三公式极易证明:

$$E_r(x + y) = [xE_r(x) + yE_r(y)]/(x + y) \quad (1.12)$$

$$E_r(x \times y) = E_r(x) + E_r(y) \quad (1.13)$$

$$E_r(y/x) = E_r(y) - E_r(x) \quad (1.14)$$

以上三公式都可用以下一个公式统括起来

$$E_r(f(x)) = d(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{xf'(x)}{f(x)} E_r(x)$$

从 (1.12) 中我们看到当 $x + y \approx 0$ 时会使计算精度大大降低, 也即应尽量避免很相近的数相减。

例 1.6 分析 $y = r \cos \varphi$ 的相对误差。

解 $E_r(y) = E_r(r) + E_r(\cos \varphi) = E_r(r) - \varphi \operatorname{tg} \varphi E_r(\varphi)$

1.4.3 区间分析法

在实际问题中, 初始数据常常是知道其误差范围, 而计算字长足够长, 估计舍入误差不会对其发生太大影响时, 我们可采用如下的区间分析法来分析其始值误差。

若 $x \in [a_1, b_1]$, $y \in [a_2, b_2]$ 则有如下区间运算规则

1) $x + y \in [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$, 即

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] \quad (1.15)$$