经济数据分析预测学

李学伟 关忠良 陈景艳 著

中国铁道出版社

铁路科技图书出版基金资助出版

经济数据分析预测学

李学伟　关忠良　陈景艳　著

中　国　铁　道　出　版　社

1 9 9 8 年·北京

（京）新登字 063 号

内 容 简 介

经济分析预测是现代管理及决策的重要基础，在企事业单位中有着广泛的用途。经济预测往往是通过对各种各样的经济数据定量分析、处理进行的，定量化分析是当今经济预测主要内容。本书系统地论述了以经济数据特征应采用的各种预测技术，为经济管理和经济分析提供了系统的思路和方法。

本书适用于经济与管理专业的大学高年级学生、研究生作为教材，也适用于相应的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济数据分析预测学/李学伟等著．—北京：中国铁道出版社，1998.5
ISBN 7-113-03017-3

Ⅰ．经… Ⅱ．李… Ⅲ．①经济统计-数据-分析②经济预测 Ⅳ．F201

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 13756 号

书　　名：经济数据分析预测学
著作责任者：李学伟　关忠良　陈景艳
出版·发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
策划编辑：殷小燕
责任编辑：殷小燕
封面设计：李艳阳
印　　刷：北京市燕山联营印刷厂印
开　　本：787×1092　1/16　印张：16.75　字数：403 千
版　　本：1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：1—2000 册
书　　号：ISBN 7-113-03017-3/U·829
定　　价：34.70 元

前　　言

这是一本经济数据分析及其预测方面的书，是作者根据研究数据分析、经济预测的实践经验和成果，整理出的一种面向经济数据分析的系统预测方法思路，包括各类目前流行的预测方法等。其特点是思路简明、实用，许多预测分析都可以根据经济数据背景分析的结果，选择应用现有的预测技术和方法。

在预测领域，有许多的经济工作者每天都可能面对一系列的经济数据或信息，对未来经济发展变化的分析、估计和各种政策与决策的制定都需要通过对这些数据或信息分析来获得支持，这就是今天经济工作者面对经济数据分析的现代特征。目前，经济预测方面的著作有不少，我们这本书的主要目的是向广大的读者提供一套系统的经济预测方法思路——经济数据的背景分析预测法。在80年代中期，有许多人对预测分析不感兴趣，甚至失去信心。这主要是因为在预测时，对经济数据以及产生的背景原因缺少定性的或定量的分析和了解，而且简单地选取一种模型用于预测。有时，并不是复杂或者漂亮的数学模型就能得到好的预测效果，而是简单的方法，例如指数平滑法、趋势分析法等就能解决问题，关键是根据具体的背景情况选用相适应的模型方法。

经济分析及其预测在现代企事业单位、市场经营和经济计划中有着广泛的用途。经济预测往往是通过对各种各样的经济数据定量分析、处理进行的，定量化分析是当今经济预测主要的内容。本书系统地论述了以经济数据分析为基础的各种经济预测方法，包括经济数据的背景分析、稳健性预处理、智能化预测思路以及不同的经济数据特征应采用的各种相应预测技术。主要的应用技术涉及了回归分析、时间序列分析、混合模型技术、周期预测方法、趋势预测方法、马尔可夫预测方法、灰色模型方法、投入产出技术和神经网络预测方法等。本书适用于经济分析、市场分析和预测工作者作参考工具，适用于经济与工商管理专业、财务会计和金融证券专业的大学高年级学生、研究生，也适用于相应的各类工程技术人员参考。

本书由李学伟博士执笔和整理；陈景艳教授对书中的章节结构、内容安排和理论方法等全面把关；关忠良副教授参加并整理了投入产出分析一章。书后附了所有的参考文献，读者需要在某一方面深入了解和学习时可以参考，在这里，我们向参考文献的所有作者表示感谢。

作者还感谢清华大学侯炳辉教授、铁道部金毓铮高工、北方交大钱仲侯教授的审阅和意见，也向校稿的董河屏、黄磊、李彪、吴长才等人表示谢意。

由于时间方面的原因，有许多比较系统和好的例子没有来得及整理，加之水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

李学伟
1998年4月8日
于北京　北方交通大学

目　　录

第0章 有关预备知识

为了让读者对经济数据分析预测的方法和内容有一个系统的认识，本章回顾了线性代数的主要内容、随机序列的概念、数据模型的概念和参数估计方法等。这些内容和概念，有些是以后要反复用到的；有些对理解经济数据的分析预测方法有帮助。

在分析预测中，数据矩阵处理和计算起重要的作用，是分析的基本工具。尤其是矩阵的特征值，有时是非常有用的。尽管许多读者在经济数学中已经学过线性代数，但由于对这些内容的具体应用不熟悉。本章前两节介绍了有关的矩阵运算及结论，熟悉这些内容对应用很有帮助。这些内容不难，没有数学证明，有兴趣的读者可参阅本章后的文献。

随机序列、数据模型和参数估计方法等都是经济数据分析预测的原始概念，也是理论背景，需要有一个简单的了解。这些内容，只要我们能在实践中熟练运用即可。

§0.1 矩阵概念与运算

矩阵是数学中一个重要内容，也是经济研究和经济工作中处理线性经济模型的重要工具。本节只给出矩阵的定义及各种基本运算关系。

一、定义与基本运算

定义 0.1 由 n×p 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,p)$ 排成的一个矩形表，称为一个 n 行 p 列矩阵，并用 A 表示，

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

A 有时也简记为 $A=(a_{ij})_{n\times p}$，a_{ij}称为矩阵 A 的元素。当 $n=p$ 时，称为 n 阶方阵。若 $p=1$，矩阵的形式为：

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

我们称它为 n 维列向量。当 $n=1$ 时，矩阵的形式为$(a_1,a_2,\cdots,a_p)$，我们称它为 p 维行向量。若 A 的元素全为零，A 称为零矩阵，记作 $A=0$。若 A 为方阵，方阵中下标重复的元素 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn}称为主对角元素，其余元素称为非对角元素。若方阵中只有主对角元素不为零，而余之为零，则称 A 为对角阵，记作

$$A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$$

若对角元素全为 1，称 A 为单位矩阵，记为 $A=I$。

如果将矩阵 $A_{n\times p}$ 的行与列互换，则得到一个新的矩阵，记为 A^{τ}，我们称 A^{τ} 为 $A_{n\times p}$ 的转置矩阵，且 A^{τ} 是一个 p 行 n 列的矩阵。

$$A^{\tau}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

若 A 为方阵，且 $A^{\tau}=A$，则称 A 为对称阵；若 $A^{\tau}=-A$，则称 A 为斜对称阵。根据定义，斜对称阵的对角元素全为零。若方阵 A 中，当 $i>j$ 时所有元素全为零，则 A 称为上三角阵；当 $i<j$ 时所有元素均为零，则 A 称为下三角阵。

关于矩阵的基本运算，有如下的定义：

定义 0.2

(1)两个 $n\times p$ 的矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 的和为：

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

(2)实数 α 和矩阵 A 的乘积记为 αA，其阶数不变：

$$\alpha A=(\alpha a_{ij})$$

(3)$n\times p$ 阵 $A=(a_{ij})$ 和 $p\times r$ 阵 $B=(b_{jk})$ 的积记为 AB，是 $n\times r$ 矩阵，其第(i,k)个元素为 $\sum_{j=1}^{p}a_{ij}b_{jk}$，即 $AB=(\sum_{j=1}^{p}a_{ij}b_{jk})$。

关于矩阵的基本运算，容易证明下列的运算规律：

$(A+B)+C=A+(B+C)$

$A+B=B+A$

$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$，$(\alpha A)B=\alpha(AB)$

$(AB)C=A(BC)$

$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$，$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$，$A(B+C)=AB+AC$，$(B+C)A=BA+CA$

$(A+B)^{\tau}=A^{\tau}+B^{\tau}$，$(\alpha A)^{\tau}=\alpha A^{\tau}$，$(AB)^{\tau}=B^{\tau}A^{\tau}$

在矩阵运算中，往往先将矩阵“分块”，再进行运算，这样做特别对高阶矩阵会起到简化运算的作用。例如，将两个 $n\times p$ 的矩阵 A，B 分别分为四块，且各子块的划分相应满足加法和乘法的定义要求：

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$ 则有：

$$A^{\tau}=\begin{bmatrix} A_{11}^{\tau} & A_{21}^{\tau} \\ A_{12}^{\tau} & A_{22}^{\tau} \end{bmatrix},A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix},\alpha A=\begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

当然，还可以按以上原则将矩阵分成更多的块进行运算，行块和列块的数目也不必相同。

二、矩阵的逆和秩

方阵的行列式。由 n 阶方阵 A 的元素构成的行列式称为 A 的行列式，记为 $|A|$ 或 $\det A$。它有下列一些熟知的性质：

(1)若 A 的的某行或某列元素全为零，则 $|A|=0$；

(2) $|A^{\tau}|=|A|$;

(3) $|\alpha A|=\alpha^{n}|A|$;

(4)若 A 的两行或两列成比例,则 $|A|=0$;

(5)若 A 的两行或两列互换,所得矩阵的行列式等于 $-|A|$;

(6)若将 A 的某一行或列乘以一个常数加到另一行或列,所得矩阵行列式等于 $|A|$;

(7)若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 n 阶方阵,则 $|A_1A_2\cdots A_k|=|A_1||A_2||\cdots||A_k|$;

(8)若分块矩阵 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$ 中,$A_{12}=0$ 或 $A_{21}=0$,则 $|A|=|A_{11}||A_{22}|$;

(9)若 A 和 B 分别为 $m\times n$ 和 $n\times m$ 阵,则 $|I_m+AB|=|I_n+BA|$;

(10)若 A 为正交阵,则 $|A|=\pm 1$;

(11)若 A 为三角阵,则 $|A|=\prod\limits_i a_{ii}$。

关于逆矩阵,有以下的定义:

定义 0.3 设 A 为一 n 阶矩阵 B,如果存在 n 阶方阵 B,使得 $AB=BA=I$,则称 B 为 A 的逆矩阵,记为 A^{-1}。

逆矩阵有以下的基本性质:

(1) $AA^{-1}=A^{-1}A=I$;

(2) $(A^{\tau})^{-1}=(A^{-1})^{\tau}$;

(3)若方阵 A 和 B 的逆均存在,则 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

(4)设 A 为 n 阶可逆阵,b 和 a 为 n 维向量,则方程 $Ab=a$ 的解为 $b=A^{-1}a$;

(5) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$;

(6)若 A 是正交阵,则 $A^{-1}=A^{\tau}$;

(7)若 A 是对角阵,$A=\mathrm{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})$,且对角线上元素均不为零,则 $A^{-1}=\mathrm{diag}(a_{11}^{-1},\cdots,a_{nn}^{-1})$;

(8)设将可逆矩阵 A 分块为:$A_{12}=0$ 或 $A_{21}=0=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$,其中 A_{12}, A_{21} 为方阵,若 $|A_{11}|\neq 0$,则 $A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A^{-1}A_{12}\\ -I\end{bmatrix}B^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}, -I)$,其中 $B=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$;若 $|A_{22}|\neq 0$,则 $A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-I\\ A_{22}^{-1}A_{21}\end{bmatrix}D^{-1}(-I, A_{12}A_{22}^{-1})$,$D=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$;

(9)若 $|A|\neq 0$,$|B|\neq 0$,

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & 0\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{bmatrix},\begin{pmatrix}A & D\\ 0 & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}DB^{-1}\\ o & B^{-1}\end{bmatrix};$$

(10)设方阵 A 的行列式 $|A|$ 分块为:$|A|=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}$,

当 $|A_{11}\neq 0$ 时,则有 $|A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$;

当 $|A_{22}|\neq 0$ 时,则有 $|A|=|A_{22}|\cdot|A_{11}-A_{12}A_{22}A_{21}|$。

定义 0.4 设 A 为一 n 阶矩阵,称 A 的对角线上的元素之和为矩阵 A 的迹,记为 $\mathrm{tr}A$,即

$$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

关于方阵的迹，显然有以下的性质：

(1)$\mathrm{tr}A^{\tau}=\mathrm{tr}A$；

(2)$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$；

(3)$\mathrm{tr}(\alpha A)=\alpha\mathrm{tr}(A)$；

(4)$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$。

定义 0.5 设 A 为 $n\times p$ 矩阵，若存在 A 的一个 r 阶子方阵的行列式不等于零，而 A 的一切 $(r+1)$ 阶子方阵的行列式均为零，则称 A 的秩为 r，记作 $\mathrm{rk}A=r$。

矩阵的秩有如下的性质：

(1)$\mathrm{rk}A=0$，当且仅当 $A=0$；

(2)若 A 为 $n\times p$ 阵，$0\leqslant \mathrm{rk}A\leqslant \min(n,p)$；

(3)$\mathrm{rk}A=\mathrm{rk}A^{\tau}$；

(4)$\mathrm{rk}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=\mathrm{rk}\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}=\mathrm{rk}A+\mathrm{rk}B$；

(5)$\mathrm{rk}(AB)\leqslant\min(\mathrm{rk}A,\mathrm{rk}B)$；

(6)$\mathrm{rk}(A+B)\leqslant \mathrm{rk}A+\mathrm{rk}B$；

(7)若矩阵 A 和 C 为可逆阵，则 $\mathrm{rk}(ABC)=\mathrm{rk}B$。

§0.2 矩阵的特征根

特征根的计算在“投入产出”、主成分和其他经济分析预测中，有着十分广泛的用途。

一、特征根与特征向量

定义 0.6 设 A 为 n 阶方阵，λ 是一个数，如果方程 $Ax=\lambda x$ 存在非零解向量，则称 λ 为 A 的一个特征值；相应的非零解向量 x 称为与特征值 λ 相应的特征向量。

对于方程组 $Ax=\lambda x$ 或 $(\lambda I-A)x=0$，即 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda-{}_{11})x_1-a_{12}x_2-\cdots-a_{1n}x_n=0\\ -a_{21}x_1+(\lambda-a_{22})x_2-\cdots-a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-\cdots+(\lambda-a_{nn})x_n=0\end{cases}$$

此方程组存在非零解的充分必要条件为系数行列式等于零，即 $|\lambda I-A|=0$。

定义 0.7 设 A 为 n 阶方阵，含有未知量 λ 的矩阵 $\lambda I-A$ 称为 A 的特征矩阵，其行列式 $|\lambda I-A|$ 为 λ 的 n 次多项式，也称为 A 的特征多项式，$|\lambda I-A|=0$ 称为 A 的特征方程。

λ 是矩阵 A 的一个特征值，则一定是 $|\lambda I-A|=0$ 的根，因此又称为特征根。若 λ 是 $|\lambda I-A|=0$ 的 n_i 重根，则 λ 称为 A 的 n_i 重特征根。方程 $(\lambda I-A)x=0$ 的每一个非零解向量，都是相应于 λ 的特征向量。

特征根和特征向量有以下一些有用的性质：

(1)A 和 A^{τ} 有相同的特征根；

(2)若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 为 A 的特征根，则 $A-kI_p$ 的特征根为 $\lambda_1-k,\lambda_2-k,\cdots,\lambda_p-k$，而 kA 的特征根为 $k\lambda_1,k\lambda_2,\cdots,k\lambda_p$，这里的 k 为常数；

(3)若 $A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{pp})$，则 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{pp}$ 为 A 的 p 个特征根，相应的特征向量分别为 $e_1=(1,0,\cdots,0)^\tau, e_2=(0,1,0,\cdots,0)^\tau,\cdots,e_p=(0,0,\cdots,0,1)^\tau$；

(4)若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 为 A 的特征根，A 可逆，则 A^{-1} 的特征根为 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_p^{-1}$；

(5)若 A 为正交阵，则 $|\lambda_i(A)|=0, i=1,2,\cdots,p$；

(6)若乘积 AB 和 BA 有意义，则 AB 和 BA 有相同的非零特征根；

(7)若 A 为对称阵，则 A 的特征根全为实数。故可按大小次序排成 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p$；

(8)若 A 为对称阵，λ_i,λ_j 是它的两个不相同的特征根，则相应的特征向量 l_i,l_j 互相正交。若 λ_i,λ_j 相同，我们也可以选择使相应的 l_i,l_j 互相正交，这时 A 可表示为：

$$A=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i l_i l_i^\tau$$

此式称为 A 的谱分解；

(9)若 A 是三角阵，则 A 的特征根正好是其对角元素；

(10)$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i$，$|A|=\prod_{i=1}^{p}\lambda_i$；

(11)设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵，如果两式 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1(j=1,2,\cdots,n)$ 之一成立，则 $|\lambda_i|<1,(i=1,2,\cdots,n)$；

(12)设 n 阶矩阵 A 有 m 个互不相同的特征根，则它们对应的特征向量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性无关。特征根的极值性质在有些经济分析中是十分有用的，下面我们给出特征根的极值性质。

设 A 为 p 阶对称阵，将 A 的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$，依大小次序排列，设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p$，$l_1,l_2,\cdots,l_p$ 为标准化特征向量，从其谱分解式 $A=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i l_i l_i^\tau$，$I=\sum_{i=1}^{p}l_i l_i^\tau$ 可知，对任意给的 x，$x=\sum_{i=1}^{p}a_i l_i$，有

$$\frac{x^\tau Ax}{x^\tau x}=\frac{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i^2}{\sum_{i=1}^{p}a_i^2}$$

式中，$x^\tau x=\|x\|^2$。由于 $l_1,l_2,\cdots,l_p$ 组成 p 维空间中的一组标准正交基，$x^\tau Ax=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i^2$，从而利用上面的等式可得到

$$\sup_{x\neq 0}x^\tau Ax/x^\tau x=\sup_{a\neq 0}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i^2/a^\tau a=\lambda_1$$

$$\inf_{x\neq 0}\frac{x^\tau Ax}{x^\tau x}=\inf_{a\neq 0}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i^2/a^\tau a=\lambda_p$$

仿照上述方法，不难证明 $\sup\limits_{x^\tau l_i=0}x^\tau Ax/x^\tau x=\lambda_{k+1}$，$i=1,2,\cdots,k$，$x\neq 0$。若 $A^\tau=A$，$B>0$，$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_p$ 为 A 相对于 B 的特征值，类似可得

$$\sup_{x\neq 0}x^\tau Ax/x^\tau Bx=\mu_1$$

$$\inf_{x\neq 0}x^\tau Ax/x^\tau Bx=\mu_p$$

若 $l_1,l_2,\cdots,l_p$，为对应于 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p$ 的 $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$ 的特征向量，则

$$\sup_{x\neq 0}x^\tau Ax/x^\tau Bx=\mu_{k+1}$$

$$i=1,2,\cdots,k$$

$$x\neq 0$$

二、矩阵的正负定性

关于二次型的矩阵表示，设 p 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_p$，其实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_p)$，是指 $f(x_1,x_2,\cdots,x_p)=\sum\limits_i^p\sum\limits_j^p a_{ij}x_ix_j$，其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,p)$ 是给定的常数，称为二次型的系数。利用矩阵乘法二次型，可表示为矩阵形式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_p)=\sum_i^p\sum_j^p a_{ij}x_ix_j=x^{\tau}Ax$$

$$x^{\tau}=(x_1,x_2,\cdots,x)$$

其中，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}$ 为对称阵。

设有实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_p)=x^{\tau}Ax$，如果对于任何 $x\neq0$，都有 $f(x)>0$，则称 $f(x)$ 为正定二次型，并称矩阵 A 是正定的，记作 $A>0$；如果对于任何 $x\neq0$，都有 $f(x)<0$，则称 $f(x)$ 为负定二次型，并称矩阵 A 是负定的，记作 $A<0$；如果对于任何 x，有 $f(x)\geqslant0$，则称 A 为非负定阵，记作 $A\geqslant0$。下面是正定阵和非负定阵的一些有用性质：

(1)一个对称阵是正(非负)定的，当且仅当它的特征根为正(非负)；

(2)若矩阵 A 是正定的，则 A^{-1} 亦正定；

(3)设 A 为 p 阶正定阵，B 是 $p\times g$ 阶矩阵($g\geqslant p$)，且 rk(B)=g，则 $B^{\tau}AB$ 是正定的；

(4)若 A 为正定阵，则 CA 亦为正定阵，其中 C 为正数；

(5)若 $A>0,B>0,A-B>0$，则 $B^{-1}-A^{-1}>0,|A|>|B|$；

(6)若 $A>0$，将 A 分块为 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，其中 A_{11} 为方阵，则 $A_{11}>0,A_{22}>0$；$A_{11.2}=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}>0$，$A_{22.1}=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}>0$；

(7)若 $A\geqslant0$，因为它是对称阵，则必存在一个正交阵 T，使得 $T^{\tau}AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)=\Lambda$。其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 为 A 的特征根，T 的列向量为相应的特征向量，于是 $A=T\Lambda T^{\tau}$；

(8)有性质 1，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 均非负，即 $\Lambda\geqslant0$。记 $f(\Lambda)=\mathrm{daig}(f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_p))$，$f(A)=Tf(\Lambda)T^{\tau}$，特别，$\Lambda^{\frac{1}{2}}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{1/2},\cdots,\lambda_p^{1/2})$，$A^{\frac{1}{2}}=T\Lambda^{\frac{1}{2}}T^{\tau}$，$A^{\frac{1}{2}}$ 称为 A 的平方根，由于 $\Lambda^{\frac{1}{2}}\geqslant0$，利用性质 3，得 $A^{\frac{1}{2}}\geqslant0$。综合上述，可得性质 9；

(9)若 $A\geqslant0(>0)$，则存在 $A^{\frac{1}{2}}\geqslant0(>0)$，使得 $A=A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$。

矩阵的分解在多元经济分析中十分有用的。关于矩阵的分解计算，我们设 $A=(a_{ij})$ 为一 n 阶正定阵，则存在唯一的其对角元素为正的上三角阵 T 使得 $A=T^{\tau}T$，称这一分解为乔列斯基(*cholesky*)。由 $A=T^{\tau}T$ 可以求得 T，因为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

$t_{11}=\sqrt{a_{11}}$

$$t_{1j}=\frac{a_{1j}}{t_{11}}=\frac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}},j=2,3,\cdots,n$$

所以，$t_{22}=\sqrt{a_{22}-t_{12}^2}=\sqrt{a_{22}-\frac{a_{12}^2}{a_{11}}}$

$$t_{2j}=(a_{2j}-t_{12}t_{1j})/t_{22},j=3,4,\cdots,n$$

$$t_{33}=\sqrt{a_{33}-t_{13}^2-t_{23}^2}$$

……

依次下去，就求得矩阵 T 的全部元素。

三、矩阵的微商

定义 0.8 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\tau$ 为实向量，$Y=f(x)$ 为 x 的实函数，则 $f(x)$ 关于 x 的微商定义为：

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \cdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

例如，由定义可得：

(1)若 $Y=x^\tau x$，则因 $Y=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，$\frac{\partial Y}{\partial x_j}=2x_j$，$j=1,2,\cdots,n$，从而，$\frac{\partial(x^\tau x)}{\partial x}=2x$。

(2)若 $Y=x^\tau Ax$，因 $Y=\sum\limits_i^n\sum\limits_j^n a_{ij}x_ix_j$，则 $\partial Y/\partial x_j=\sum\limits_{j=1}^n(a_{ij}+a_{ji})x_j$，$i=1,2,\cdots,n$，从而，$\frac{\partial(x^\tau Ax)}{\partial x}=(A+A^\tau)x$。

当 A 为对称阵时，$A=A^\tau$，则有$\frac{\partial(x^\tau Ax)}{\partial x}=(2A)x$。

设 $X=(x_{ij})_{n\times m}$，$Y=f(X)$ 为矩阵 X 的实值矩阵，则有

$$\frac{\partial Y}{\partial X}=\begin{bmatrix}\frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \frac{\partial y}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{1m}}\\ \frac{\partial y}{\partial x_{21}} & \frac{\partial y}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{2m}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial y}{\partial x_{n2}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{nm}}\end{bmatrix}$$

如：若 $Y=tr(x^\tau Ax)$，式中 X^τ 为 $n\times m$ 阵，A 为 $m\times m$ 阵，则

$$\frac{\partial tr(x^\tau Ax)}{\partial x}=(A+A^\tau)x。$$

若 A 为对称阵，即得$\frac{\partial tr(x^\tau Ax)}{\partial x}=(2A)x$。

§0.3 随机序列概念

随机序列是一种状态可数的随机过程。随机过程的种类有很多，但目前还没有一种适用于

所有随机过程的分析方法，我们这里讨论的是平稳随机过程或平稳随机序列。平稳随机序列的特点是它的统计特性不随时间而变化，这种状态有时也称为“统计平衡”状态。在经济序列分析中，一般没有十分严格的平稳或非平稳的要求，所以通常认为经济序列是平稳的。

一、基本概念

经济分析预测是研究某种特定经济现象在未来某个时刻可能出现的数值，因此，时间是一个自变量，所研究经济现象的特征参数是因变量。对于某个未来的经济结果，我们说它有必然产生的规律，原因是它有自己的发展规律和因果关系，但我们又感到它难于准确预料，原因是事物的发展不是孤立的，受到许多人为和自然环境的影响，对于这些影响人们有时能感觉到，有时却感觉不到，带有明显的随机现象。在经济生产和日常生活过程中，有相当一类基本又重要的现象，就是具有平稳变化的特征。例如，某个工厂的产品质量和数量，在相当一个时期有其稳定的变化规律可寻，尽管产量在不断的变化，但在一定时期内差别不可能太大，总是围绕某一趋势或固定水平上下变化或波动。我们可以认为这是一种平稳的随机过程或随机序列。

在概率论和数理统计中仅仅涉及到一个随机变量 X 或一个随机向量 X。而在经济时间序列分析中所考察的对象，常常不是单个随机变量或单个随机向量，而是一组随机变量或一组随机向量。例如，X_t 表示具体时间 t 日或 t 星期的某个火车站货运装车数，显然是一个随机变量，当 t 在某一时间段 $[a,b]$ 内考察时，便得到一列随机变量 $\{X_t, t\in[a,b]\}$。又如 X_t 表示某一商店在 t 时刻的营业额，将 t 从某日某时开始至另一日某时止，则得到一列商店营业额的随机向量。所以，在描述一系列的经济变量时，常需要引入随机序列的概念和方法。

设 T 是某个集合，俗称足标集，对任意固定的 $t\in T$，X_t 是随机变量，当 t 在 T 中跑遍时，得到随机变量的全体 $\{X_t, t\in T\}$，记为 X_T 或 $\{X_t\}$，称 X_T 为 T 上的随机函数。T 通常有以下几种取值：

1. $T=(-\infty,+\infty)$，$T=(0,+\infty)$；

2. $T=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，$T=\{1,2,3,\cdots\}$。

如果 T 取 1 中的情形，称 X_T 为随机过程；T 取 2 的情形时，称 X_T 为随机序列，后者记为 $\{X_k\}$。许多经济现象常取的是固定间隔时间的对象值，因此，我们常提到的是经济随机序列。从概率论中知，若 X 为某一实验结果的随机变量，那么每做一次实验，就能获得 X 的一个取值 x，x 称为 X 的一个样本。对于随机序列而言，样本函数 $\{x_k\}$ 是一普通的实数列，称 $\{x_k\}$ 为随机序列 $\{X_k\}$ 的一个实现。

在实际的经济数据序列中，因为随时间 t 的流逝不能重复，所以我们往往仅能获得随机数据序列（或过程）的一个现实。长度为 N 的动态经济数据序列 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 常常是按一定的时间间隔统计而得的样本值，$x_1,x_2,\cdots,x_N$ 称为长度为 N 的经济样本或经济数据序列 $\{x_k\}$，有时也记为 $\{X_k\}$。有时 x_k 和 X_k 不分大小写，表示同一内容，可以根据上下文来区分。另外，$\{X_k\}$ 的时间变量 k 的变化范围和表示内容大不相同，可表示第 k 天、第 k 月、第 k 年等等，根据考察的经济现象不同而有不同的区别。

二、概率分布及其参数特征

设一个随机变量 x 的分布函数为 $F(x)$ 或概率密度函数为 $p(x)$，从概率论的角度看，一个随机变量的统计特性完全有它的分布函数 $F(x)$ 或概率密度函数 $f(x)$ 所确定。同样，一个随机

向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\tau}$ 的统计特性完全由它的联合分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 或联合分布密度 $p(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 所确定。对于随机序列来说，由于它是可列个随机变量构成的。因此，对于任意 $t\in T$，X_t 由分布函数 $F_t(x)$ 来描述；对于任意 $t_1,t_2\in T$，$(X_{t1},X_{t2})^{\tau}$ 由联合分布函数 $F_{t1,t2}(x_1,x_2)$ 来描述，对于任意正整数 n 和任意 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，$(X_{t1},X_{t2},\cdots,X_{tn})$ 由 n 维联合分布函数来描述，其中，$F_{t1,t2,\cdots,tn}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_{t1}<x_1,X_{t2}<x_2,\cdots,X_{tn}<x_n)$。我们称此为有穷维分布。

如果随机序列 $\{X_k\}$ 的任意有穷维分布满足 $F_{t1,t2,\cdots,tn}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{t1}(x_1)F_{t2}(x_2)\cdots F_{tn}(x_n)$，即序列中任意个随机变量 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 都相互独立，则称 $\{X_k\}$ 为独立随机序列，实际应用中，随机误差及白噪声就是典型的独立序列。

在随机序列的概念中，随机序列的有穷维分布函数族能完善地刻画随机序列的统计特性，但是在实际应用中想要确定一个随机序列的分布函数族却是十分困难的，对于许多的具体情况也是不可能的。此外，即使知道了这些分布函数族，由于其复杂和困难，也不便于实际的应用。因此，有必要象引入随机变量的数字特征那样，引入随机序列（或过程）的基本参数特征。当然，这些参数特征既要求能描述随机序列的特征，另一方面又要便于对经济数据计算。

随机序列最基本的参数特征有三个：均值函数、自协方差函数、自相关函数。

设 $\{X_t\}$ 为随机序列，称 $EX_t=\mu_t$ 为 X_t 的均值，称 $\{\mu_t\}$ 为 $\{X_t\}$ 的均值函数。若 X_t 的分布函数为 $F_t(x)$，概率分布密度为 $p_t(x)$，则均值函数为

$$\mu_t=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}F_t(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(t)\mathrm{d}x$$

为了分析随机序列 $\{X_t\}$ 中在不同时刻随机变量之间的统计关系，需要对任意不同的整数 t，s，考虑 X_t,X_s 的相互关系。令

$$\begin{aligned}\gamma_{ts}&=E(X_t-\mu_t)(X_s-\mu_s)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)\mathrm{d}F_{t,s}(x_1,x_2)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)p_{t,s}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\end{aligned}$$

称 $\{\gamma_{ts}\}$ 为随机序列 $\{X_t\}$ 的自协方差函数，并记为 $\gamma_{ts}=\mathrm{Cov}(X_t,X_s)$，显然 γ_{ts} 是二元对称函数。特别当 $t=s$ 时，$\gamma_{ts}=E(X_t-\mu_t)^2$，称 $\{\gamma_{ts}\}$ 为随机序列 $\{X_t\}$ 的方差函数，记为 $\gamma_{ts}=\mathrm{Var}X_t$。

设 $\{\gamma_{ts}\}$ 为随机序列 $\{X_t\}$ 的自协方差函数，令

$$\rho_{ts}=\frac{\gamma_{ts}}{\sqrt{\gamma_{tt}}\sqrt{\gamma_{ss}}}=\frac{\mathrm{Cov}(X_t,X_s)}{\sqrt{\mathrm{Var}X_t\cdot\mathrm{Var}X_s}}$$

称 $\{\rho_{ts}\}$ 为随机序列 $\{X_t\}$ 的自相关函数，这里 ρ_{ts} 是无量纲并依赖于 t,s 的，它同 γ_{ts} 一样刻画了 $\{X_t\}$ 中不同时刻 t,s 的随机变量 X_t,X_s 的统计相关程度。

在实际应用中，只能对经济样本数据序列进行分析计算，所以，上述三个基本参数的计算是理论公式，而实践中常用的是离散数据的近似计算公式。这就是平稳序列的状态稳定性的应用，即相当一段时间后各状态收敛到其稳定状态。

为了便于今后的理解，我们此处先叙述以下概率论中经常用到的几种收敛方式，即概率为 1 的收敛、依概率收敛和均方收敛。

概率为 1 的收敛：设 $\{X_t\}$ 为一随机序列，X 为随机变量，如果有 $P\{\lim\limits_{t\to\infty}X_t=X\}=1$，则称

$X_t\}$概率为 1 的收敛于 X，记作$\lim\limits_{t\to\infty}X_t=X(a.s.)$，或 $t\to\infty$时，$X_t\xrightarrow{a.s.}X$。

依概率收敛：设$\{X_t\}$为一随机序列，X 为随机变量，如果 $\lim\limits_{t\to\infty}P\{|X_t-X|>\varepsilon\}=0$，对于任意的 $\varepsilon>0$ 成立，则称$\{X_t\}$依概率收敛于 X，或称$\{X_t\}$随机地收敛于 X，记作$\lim\limits_{t\to\infty}X_t=X(p)$，或 $t\to\infty$时，$X_t\xrightarrow{p}X$。

一般地，可以证明：若 $t\to\infty$时，$X_t\xrightarrow{a.s.}X$，则可保证 $t\to\infty$时，$X_t\xrightarrow{p}X$。所以，在以后出现的 $(a.\ s.)$均为依概率收敛。

均方收敛：设$\{X_t\}$为一二阶有穷的随机序列，X 为二阶矩有穷的随机变量，如果$\lim\limits_{t\to\infty}E(X_t-X)^2=0$，则称$\{X_t\}$均方地收敛于 X，记为$\lim\limits_{t\to\infty}X_t=X$。

我们已经知道，均值和自协方差函数是平稳序列的主要参数特征。然而，对于一个平稳序列，实际上，我们只能获得一个现实中有限个数据，例如，$x_1,x_2,\cdots,x_N$ 个数据，即在每个固定时刻 t，只有 X_t 的一个具体取值，这样，就得不到均值 EX_t 的合理估计。同样，也得不到 γ_{ts}的合理估计。因此，我们需要利用平稳随机序列的一些性质，即具有各态历经性和谱函数的连续性。幸好，一般情况下，经济数据序列都满足或近似满足这些性质。这样，我们可以利用一个足够长度的样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 按时间平均来估计总体平均，即

$$\mu\approx\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}X_k$$

同样有

$$\gamma_\tau\approx\overline{\gamma}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-\tau}(x_k-\overline{x})(x_{k+\tau}-\overline{x}),(\tau\geqslant0)$$

$$\rho_t=\gamma_\tau/\gamma_0,(\tau\geqslant0)$$

这样，可通过随机序列的一个样本函数来估计均值和自协方差函数及其他必要的参数。

§0.4 经济数学模型概念

在经济分析和预测活动中，常会听到这种模型那种模型的应用，尤其是在定量分析预测要求越来越高的今天，各种各样的数学模型在经济分析计算中大显身手。不同的经济数据有不同的经济环境和内在的经济规律，也有其数据自身的结构特征，在分析计算中，就要采取相应的数学方法去描述它、分析、估计和预测它。这些方法就是经济数学模型。经济数学模型应用十分广泛，目前，也有许多经济模型可以选用。但作为具体某个模型的概念，有它的产生过程、应用环境和其他背景特点。为了在以后的应用中，更好地选择适用的经济模型、必要时设计和构造一个新的数学模型，就需要对经济数学模型的概念、分类、产生和应用等有一定的了解和认识。

一、模型的概念

模型可以分成形象模型和抽象模型两类。根据实物，设计图或设想，按比例、形态或其他特征制成的看起来和客观实体基本相似的模型叫做形象模型。例如，教学用的原子模型、化学分子构成的结构模型、人体模型、玩具飞机、汽车等模型，这些都是形象模型。借助于符号、图表等来描述客观事物的模型，叫做抽象模型，例如各种建筑图纸、电视机的线路图等。

在抽象模型中，利用变量、等式和不等式等数学符号来描述事物的模型叫数学模型；用来对经济数据、经济关系或经济事物进行分析计算的数学模型叫经济数学模型。有时，经济数学