随机过程

邓集贤　许刘俊

高等教育出版社

随 机 过 程

邓集贤　许刘俊

高等教育出版社

（京）112号

内容提要

本书介绍随机过程的理论和应用，内容包括随机过程基本概念及类型、Марков链、平稳过程、时间序列的基本概念、时间序列统计分析、离散鞅等六章，各章并配备习题，可供数学、应用数学、经济类等理工科专业作为“随机过程”课程的教材使用。

随机过程

邓集贤　许刘俊

·

高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
三河科教印刷厂印装

·

开本 850×1168　1/32　印张 14.25　字数 370 000
1992年 4 月第 1 版　1992年 4 月第 1 次印刷
印数0001— 1 283
ISBN7-04-003661-4/O·1089
定价 6.35 元

序　言

一般地说，初等概率论是研究随机现象静态性质的数学方法，而随机过程论则是研究随机现象的动态特性，研究随机现象发生、发展过程的一个数学分支．初等概率论是随机过程理论的基础，而随机过程论则是初等概率论的自然延伸．目前，随机过程理论已发展成为内容十分丰富，应用极为广泛的一门数学分支，成为广大自然科学工作者、工程技术人员和社会、经济学家乐于应用的数学工具之一，并显示出其越来越重要的作用．因此，有条件的学校（包括理科、工科和师范院校）都希望开设随机过程这一门课程，本书的编写就是为了适应这一需要．

本书内容适合于数学、应用数学以及其它理工科和经济类有关专业开设的必修或选修课“随机过程”作为教材使用，也可供有关应用工作者阅读．我们在内容选择时侧重于应用，但又尽可能保持理论的完整性和严谨性．

本书编写时试图在具有一般高等数学及初等概率论及数理统计（如[7]）的基础上，不用测度论等较深的数学知识而尽可能全面地系统介绍随机过程的初步理论和基本方法．但是，由于随机过程的理论和应用十分丰富，要想在这一本书中详细地作介绍，看来是十分困难的，非我们所能做到．因此，我们采取“兼顾各方，重点讲授”的办法，在介绍各种随机过程的同时，着重叙述弱平稳过程，特别是时间序列这一分支，其原因之一是这一分支在天文、气象、工程应用和社会、经济领域有其重要的实际应用，重点编写这一内容以突出本书的应用性．

虽然本书不可能全面、详尽地介绍随机过程论的一切方面，但是我们在编写时尽可能对主要的随机过程基本概念都涉及到，

对没有讲到的或展开不够的有关内容或有关定理的证明，我们一般都指出有关参考资料，供读者查阅或进一步学习。从这一点说，本书又是比较全面和详尽的。

本书共分六章：第一章介绍随机过程的基本概念和各类随机过程，使读者对随机过程论有较系统的最基本了解；第二章讲述Марков链，它是随机过程论的重要分支——Марков过程中最直观、最基础的类型，它对进一步学习Марков过程论打下一定的基础；第三章至第五章包括弱平稳过程和时间序列分析，它为进一步学习和研究这一分支打下较好的基础，同时能初步获得应用它们解决实际问题的基本方法，培养这方面的初步能力；最后的第六章，我们试图不用测度论的办法介绍离散鞅的基本知识，它为有关读者进一步学习现代概率论的重要内容——鞅论打下初步基础。鞅论在随机过程、过程统计理论等方面有重要应用，也为其它学科所重视(如[28])。

本书由邓集贤主持编写，其中第一、二、三、六章和附录一由邓集贤执笔；第四、五章及附录二由许刘俊执笔。范文宁、宋心远讲师分别仔细阅读了第一、二、三、六各章并编写了该四章的大部分习题；马肖娥讲师，石北源副教授，滕成业教授仔细阅读了第四、五章，他们提出了许多宝贵的修改意见。

本书的原稿曾在中山大学数学系作为必修课或选修课讲授过多次，并经多次修改。但由于我们水平和经验有限，对内容的取舍和教材的处理等方面，都可能存在许多不足之处，请读者不吝赐教。

1990年11月在天津南开大学召开本书审稿会，邀请吴荣教授、杨振明副教授、刘嘉焜副教授、罗首军博士和高尚华副编审参加，由吴荣教授主审。与会专家认真审阅了全书，对全书的材料选择以及细节提出了十分有益的修改意见，认为本书“可供数学、应用数学及其它许多理工科、经济类有关专业作为教材选用”，在此基础上我们又作了全面的修改。值此本书出版之际，

向上述各位教授、专家以及高尚华等同志表示衷心的感谢。

编　者

一九九一年春节

目　录

第一章 随机过程基本概念及类型

§1.1 随机过程的直观背景及定义

一、随机过程的直观背景及例

在初等概率论及数理统计的一般教科书中所讨论的随机现象，通常可由一个或有穷多个随机变数去描述，它所考虑的试验结果，一般地都可用一个或有穷多个数来表示。但我们看到，许多随机现象仅研究一个或有穷个随机变数，不能揭示这些随机现象的全部统计规律。因为在研究这些现象时，必须考虑其发展变化过程，它所考虑的试验结果要用一个函数或无穷多个数表示。随机过程的诞生和发展，就是适应这一客观需要的。

下面看几个例子。

例1.1.1 考虑某一电话站在正常工作条件下时刻t（小时）以前接到的呼叫次数，一般情况下它是一个随机变数，并且依赖时间t。因此当我们考虑它随时间t变化的时候，则必须研究依赖于时间t的随机变数$\xi(t)$，若考虑一天的情形，则t从0变化到24，即$t\in[0,\ 24]$。

例1.1.2 在商业活动中，需要研究某一商品的销售量。设某日的销售量为ξ，一般地说，它是一个随机变数，若研究它每天销售量变化情况，则需要研究依赖于时间t的随机变数$\xi(t)$，$t=1,2,\ \cdots$。

例1.1.3 在数字通讯中，若传输过程是用数0和1两个码元通过编码来传递消息，由于接收者事先并不知道传送什么消息，加上传送过程受干扰影响，因此，在某一时刻t，它传送的是0还是1，都不能事先预言，因而是一随机变数。若我们进行长时间

观察，每隔一秒观察一次，则这个随机变数（用ξ_n表示）依赖n（秒），其中$n=0,1,2,\cdots$。

例1.1.4 在地震勘探工作中，我们通过检波器把混有随机干扰的随时间变化的地层结构信号波记录下来。如图1.1.1所示：在O点放炮，在A点记录仪把接收到的混有干扰的地震信号波记录下来。我们在相同条件下做了n次记录，则得到n个彼此有差异的记录。在时间t_0观察它们的信号波的值ξ_{t_0}，则可发现它是不规则的，即ξ_{t_0}是一随机变数。也就是说，混有随机干扰的地震结构信号波是一个依赖于时间t的随机变数ξ_t，$t\in[0,+\infty)$。

例1.1.5 在机械加工中，即使在正常情况下，由于各种因素影响，工件的尺寸在加工过程中都可能会产生误差。若令$\xi(t)$表示时刻t加工工件尺寸的大小，因此它是一个随机变数，而且依赖时刻t，$t\in[0,+\infty)$。

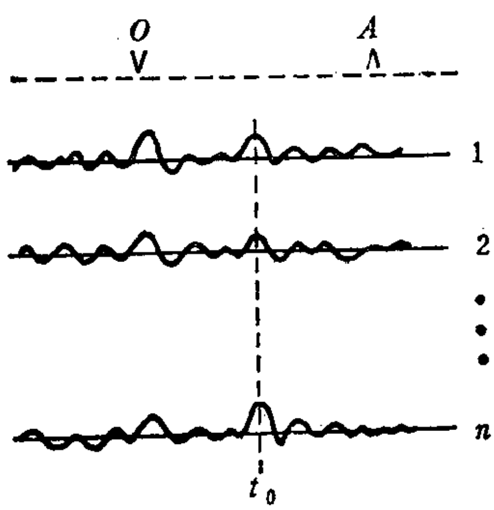

图 1.1.1

例1.1.6 在考虑一个国家经济活动中的国民收入(使用额)时，某一年的国民收入，即使在有计划的情况下，仍然随着各种随机因素的影响而随机变化，逐年研究它的变化，则需要研究依赖以时间t（年）的随机变数Y_t。如果考虑国民收入的合成，一般地有$Y_t=C_t+I_t$，其中C_t，I_t分别表示t年的消费和积累。这时，我们就必须研究多于一个依赖于时间t的随机变数Y_t，C_t和I_t，其中$t=1,2,\cdots$。

例1.1.7 考虑某一海域在固定的时间t，海域中某一指定点海水的温度，由于海水温度受许多随机因素影响，因此它是一随机变数。于是，这一海域内随时间变化的海水温度是一个依赖于四个参数的随机变数$\xi(x,y,z,t)$，其中(x,y,z)为空间座

标，t为时间。

总之，在研究自然界或社会经济现象时，有时不仅要考虑一个或有穷个随机变数，而且需要研究一族无穷多个随机变数。它就是本书要介绍的随机过程。

随机过程理论有着广泛的应用。例如：在统计物理学中的应用[32]；在气体动力学中的应用[43]；在湍流统计中的应用[63]；电路中的热噪声方面的应用[50]；通讯和控制理论中的应用[45]，[64]，[37]，[1]；群体增长与流行病学中的应用[55]，[51]；管理科学中的应用[48]，[58]；计量经济学中的应用[2]，[41]；天文学中的应用[46]等。

二、随机过程的定义及有穷维分布函数族

从前面叙述过程中得到，直观上，我们可以把"依赖于参数t的随机变数全体"或"一族无穷多个随机变数"称为随机过程。下面给出数学上严格定义。

定义1.1.1 给定概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$及指标集T，对任一$t \in T$，有定义在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上，取值于$\mathscr{X}$的随机变数$\xi(t, \omega)$，$\omega \in \Omega$与之对应，称依赖于t的一族随机变数$\{\xi(t,\omega): t\in T\}$为随机过程。如不产生混乱，随机过程$\{\xi(t,\omega): t\in T\}$可简写为$\{\xi(t)\}$或$\{\xi_t\}$，其中指标$t$又称为参数或时间，$T$又称为参数集。一般地，$T$为如下的指标集：$T=N^+=\{0, 1, \cdots\}$；$T=N=\{0, \pm 1, \cdots\}$；或$T=[a,b]$；$T=R_1^+=[0,\infty)$；$T=R_1=(-\infty,\infty)$。也可以是向量集。而将$\mathscr{X}$称为随机过程的相空间，它可以是以上所述的$N^+$，$N$，$\mathscr{X}=\{0, 1, \cdots, n\}$，$n$为任一固定的正整数，$R_1^+$，$R_1$，$[a, b]$，亦可以是向量空间或复数空间。

取复值的随机过程称为复随机过程，取向量值的随机过程称为向量过程或多维随机过程。

前面说及随机过程$\{\xi(t)\}$的参数t也称为时间，但它不一定就是我们通常指的时间，而可能是别的量，可能是一个量，也可

能是向量．例如例1.1.7，其参数是四维向量(x, y, z, t)，其中(x, y, z)是某海域的座标，t是时间．这一类随机过程称为随机场．

由上面叙述看到，随机过程$\{\xi(t, \omega): t\in T\}$是参数$t$和概率空间中点$\omega$的二元函数，对每一$t_0\in T$，$\xi(t_0, \omega)$是定义在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变数；对每一$\omega_0\in\Omega$，$\xi(t, \omega_0)$是定义在$T$上取值于$\mathscr{X}$的一个普通函数（实的或复的，也可以是一个向量），我们称它为随机过程对应于ω_0的一个样本函数，有时也称为轨道或现实．如图1.1.1，给出了n个样本函数，它是地层结构信号波的n个现实。

随机过程$\{\xi(t)\}$可以设想为一个质点M作随机运动的过程，以$\xi(t)$表示质点M在时刻t的位置，称它为质点M在时刻t的一个状态，其状态的全体称为状态空间。这样，“$\xi(t)=x$”就可形象地说成“在时刻t，质点M处于状态x”。这一形象的说法，在讨论有些问题时将给我们带来许多方便。

根据状态空间和参数集的不同情况，我们可以将随机过程进行分类：对于每一固定的时间$t(t\in T)$，若随机变数$\xi(t)$是离散型的，我们就说随机过程有一个离散状态空间，否则就说是非离散的．参数集可以是离散的(如$T=N$或N^+)，也可以是连续的（如$T=R$或R^+），这时，分别称相应的随机过程为离散参数随机过程或连续参数随机过程．具体列表如下

表1.1.1

状态空间 / 随机过程 / 参数集	离　散	非　离　散
离　散	离散参数链	离散参数随机过程
连　续	连续参数链	连续参数随机过程

一般地，我们把参数集为离散时的离散参数链和离散参数随机过程统称为随机序列。

如无特别声明，以下所述之随机过程均指单参数的实随机过程，T为前述的任一种参数集。

设 $\{\xi(t)\}$ 是一随机过程，对每一 $t\in T$，$\xi(t)$ 的分布函数为 $F_t(x)\triangleq P\{\xi(t)<x\}$；当任意给定$t_1$，$t_2\in T$时，随机变数 $\xi(t_1)$，$\xi(t_2)$的联合分布函数为 $F_{t_1,t_2}(x_1, x_2)\triangleq P\{\xi(t_1)<x_1, \xi(t_2)<x_2\}$；一般地，当给定 n，t_1，…，$t_n\in T$ 时，随机变数 $\xi(t_1)\cdots\xi(t_n)$ 的n维联合分布函数为

$$F_{t_1;\cdots;t_n}(x_1,\cdots, x_n)\triangleq P\{\xi(t_1)<x_1,\cdots,\xi(t_n)<x_n\} \tag{1.1.1}$$

定义1.1.2 一切形如式（1.1.1）的分布函数全体，即

$$\{F_{t_1;\cdots;t_n}(x_1, \cdots, x_n): \quad n>0, t_1,\cdots,t_n\in T\} \tag{1.1.2}$$

称为$\{\xi(t)\}$的有穷维分布函数族。

容易验证，有穷维分布函数族满足下列条件：

（i）对每一$x_i(i=1,\cdots,n)$，$F_{t_1;\cdots;t_n}(x_1, \cdots, x_n)$ 非负、单调不降且左连续。

(ii) $$\lim_{x_j\to-\infty} F_{t_1;\cdots;t_n}(x_1, \cdots, x_n)=0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

$$\lim_{\substack{x_1\to+\infty\\ \cdots\\ x_n\to+\infty}} F_{t_1;\cdots;t_n}(x_1, \cdots, x_n)=1$$

(iii) 若$x_i\leqslant y_i$ $\quad(i=1, \cdots, n)$，则

$$F_{t_1;\cdots;t_n}(y_1,\cdots,y_n)-\sum_{i=1}^{n}F_{t_1;\cdots;t_n}(y_1,\cdots,y_{i-1},x_i,y_{i+1},\cdots,y_n)$$

$$+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}F_{t_1;\cdots;t_n}(y_1,\cdots,y_{i-1},x_i,y_{i+1},\cdots,y_{j-1},x_j,y_{j+1},\cdots,y_n)$$

$-\cdots+(-1)^{n}F_{t_1;\cdots;t_n}(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0$

(iv)对于$(1,\cdots,n)$的任一排列$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，有

$$F_{t_1;\cdots;t_n}(x_1,\cdots,x_n)=F_{t_{\alpha_1};\cdots;t_{\alpha_n}}(x_{\alpha_1},\cdots,x_{\alpha_n})$$

(v)若$m<n$，则

$$F_{t_1,\cdots;t_m}(x_1,\cdots,x_m)=\lim_{\substack{x_{m+1}\to+\infty\\ \cdots\\ x_n\to+\infty}}F_{t_1;\cdots;t_n}(x_1,\cdots,x_n)$$

上述(iv)，(v)称为相容性条件。

例1.1.8 设$\{\xi_n,\ n=1,2,\cdots\}$是一随机序列，对任意n，$\xi_n\sim N(m,\sigma)$且$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$是独立随机向量，这时$\{\xi_n\}$的有穷维分布密度函数族为

$$\left\{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(x_{t_j}-m)^2\right\};\ n>0\right\}$$

由此还可得出$\{\xi_n\}$的有穷维分布函数族。

至于给出一般随机过程的有穷维分布函数族，亦如要具体给出一般随机变数的分布函数一样，一般是很困难的。

随机过程的有穷维分布函数族具有上述五个性质。其逆命题亦成立，即我们称之为随机过程的存在性定理，叙述如下：

定理1.1.1 （存在性定理） 设给定参数集T，对任意正整数n，T中的元素t_1，$\cdots$，t_n，有一n元函数$\widetilde{F}_{t_1;\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$与之对应，并且满足上述(i)，(ii)，(iii)，(iv)，(v)五个条件（我们亦称这族函数为满足相容性条件的有穷维分布函数族），则必存在一概率空间及其上的随机过程$\{\xi(t)\}$，使得它的有穷维分布函数族等于已给的函数族．即

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=P\{\xi(t_1)<x_1,\cdots,\xi(t_n)<x_n\}$$

$$=\widetilde{F}_{t_1;\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$$

证明 参见[3]，[25]．

对于复随机过程$\{\xi(t)\}$，$\xi(t)$可写为$\xi(t)=x(t)+jy(t)$，其

中$\{x(t)\}$，$\{y(t)\}$均为实随机过程。$\{x(t)\}$与$\{y(t)\}$的$2n$维分布函数族定义为

$$\{F_{t_1;\cdots;t_n;s_1;\cdots;s_n}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n) \triangleq P\{x(t_1)<x_1,\ \cdots,\ x(t_n)<x_n, y(s_1)<y_1,\cdots, y(s_n)<y_n\}: n>0\}$$

我们把$\{x(t)\}$与$\{y(t)\}$的$2n$维分布函数族称为复随机过程$\{\xi(t)\}$的有穷维分布函数族。像实随机过程一样，复随机过程的有穷维分布函数族满足上述五个条件，并且亦成立复随机过程的存在性定理(见[3]，[4])。

定义1.1.3 两个随机过程$\{\xi(t),\ t\in T\}$，$\{\eta(t),\ t\in T\}$称为相互独立的，如果对任意正整数n和m，$t_1,\cdots,t_n\in T, s_1,\ \cdots,\ s_m\in T$，所对应的随机变数$\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n),\eta(s_1),\cdots,\eta(s_m)$的联合分布函数等于$\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n)$的联合分布函数与$\eta(s_1)$，$\cdots$，$\eta(s_m)$的联合分布函数的乘积，即

$$P\{\xi(t_1)<x_1,\cdots,\xi(t_n)<x_n,\eta(s_1)<y_1,\cdots,\ \eta(s_m)<y_m\}$$
$$=P\{\xi(t_1)<x_1,\cdots,\xi(t_n)<x_n\}P\{\eta(s_1)<y_1,\cdots,\eta(s_m)<y_m\} \tag{1.1.3}$$

读者容易证明如下定理：

定理1.1.2 （1）若随机过程$\{\xi(t)\}$及$\{\eta(t)\}$都是离散型的，则$\{\xi(t)\}$与$\{\eta(t)\}$相互独立的充分必要条件为$\{\xi(t)\}$与$\{\eta(t)\}$的任意$n+m$维概率函数等于$\{\xi(t)\}$的n维概率函数与$\{\eta(t)\}$的m维概率函数的乘积，即对任意正整数n，m，有

$$P\{\xi(t_1)=x_1,\cdots,\xi(t_n)=x_n,\eta(s_1)=y_1,\cdots,\eta(s_m)=y_m\}$$
$$=P\{\xi(t_1)=x_1,\cdots,\xi(t_n)=x_n\}P\{\eta(s_1)=y_1,\cdots,\eta(s_m)=y_m\}$$
$$(t_1,\cdots,t_n,s_1,\cdots,s_m\in T, x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m\in \mathscr{X}) \tag{1.1.4}$$

（2）若随机过程$\{\xi(t)\}$及$\{\eta(t)\}$都是连续型的，则$\{\xi(t)\}$与$\{\eta(t)\}$相互独立的充分必要条件为$\{\xi(t)\}$与$\{\eta(t)\}$的任意$n+m$维分布密度函数等于$\{\xi(t)\}$的n维分布密度函数与$\{\eta(t)\}$的m维分布密度函数的乘积，即对任意正整数n及m，有

$$f_{\xi,\eta}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=f_\xi(x_1,\cdots,x_n)f_\eta(y_1,\cdots,y_m)$$
$$(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m\in\mathscr{X})\tag{1.1.5}$$

上式的左端为$\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n),\eta(s_1),\cdots,\eta(s_m)$的联合分布密度函数，而右端是$\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n)$和$\eta(s_1),\cdots,\eta(s_m)$的联合分布密度函数的乘积。

§1.2 随机过程的数字特征

在实际工作中，要确定随机过程的有穷维分布函数族往往是困难的，我们可以转而研究随机过程的某种数字特征，它在许多实际问题和理论研究中也能很好地满足研究的目的。常用的数字特征如下：

一、数学期望（均值）函数和方差函数

定义1.2.1 设随机过程$\{\xi(t)\}$的一维分布函数为$F_t(x)$，则随机过程$\{\xi(t)\}$的数学期望（也称均值）函数及方差函数分别定义为：

$$E\xi(t)\triangleq\int x\,dF_t(x)\tag{1.2.1}$$

$$D\xi(t)\triangleq E[\xi(t)-E\xi(t)]^2$$
$$=\int[x-E\xi(t)]^2dF_t(x)\tag{1.2.2}$$

对于复随机过程$\{\xi(t)\}$，其中$\xi(t)=x(t)+jy(t)$，则它们分别定义为

$$E\xi(t)\triangleq Ex(t)+jEy(t)\tag{1.2.3}$$

$$D\xi(t)\triangleq E|\xi(t)-E\xi(t)|^2=Dx(t)+Dy(t)\tag{1.2.4}$$

像初等概率论中一样，当上述(1.2.1)，(1.2.2)，(1.2.3)，