编者的话

自1978年我国实行研究生招考制度以来，招生名额和报考人数逐年增加。可以预料，这种形势还将持续发展。校内外广大报考人员都希望在复习迎考中得到有的放矢的指导。有鉴于此，我们接受了安徽科学技术出版社的委托，组织编写了《研究生入学考试复习指导丛书》。

我校在帮助先后五届报考研究生的同学复习迎考中，做了一些工作，取得了一定的成绩。这套《丛书》是我校有关课程任课教师在总结历年经验的基础上，根据部颁教学大纲和招考研究生的要求编写的。《丛书》包括政治、英语、数学、物理、化学五种；内容紧密联系教材，着重介绍基本原理和概念；各分册均注意精选有代表性的例题，分析解题思路，以期提高读者的应试能力。《丛书》将对报考研究生的同学和指导复习的教师提供帮助，并可引导本科生加深对有关课程的理解。

《丛书》编写委员会由尹鸿钧、孙显元、严镇军、张玉民、张懋森、陈克恒、朱滨、张安民等同志组成。《丛书》各分册由编者署名。

中国科学技术大学《研究生入学考试复习指导丛书》编写委员会
1985年8月于中国科学技术大学

责任编辑：杨家骝
封面设计：张远林

研究生入学考试复习指导丛书
数　学
（上）
严镇军　杨照华　苏　淳　钟立敏　编
•
安徽科学技术出版社出版发行
（合肥市跃进路1号）
新华书店经销　　安徽新华印刷厂印刷
•
开本：850×1168　1/32　印张：13.375　字数：387,000
1986年10月第1版　　1986年10月第1次印刷
印数：00,001—10,300
统一书号：13200·81　　定价：3.30元

前　言

本书是为报考理工科(不包括数学专业)硕士研究生的同志编写的。全书包括高等数学和工程数学两大部分、分为微积分、常微分方程、线性代数、复变函数、数理方程和概率论等六个单元。

本书在内容安排上不拘泥于教材的顺序。编者试图根据自身的教学经验，对各类问题及其解法进行分类，作一次总结。书中例题多选自近年来各院校研究生入学考试的试题；选取力求典型和多样化，讲解着重分析解题思路，突出运算技巧。本书对一般概念、定理、公式和法则只作了纲领性的介绍；但对重要的概念和结论则通过例题说明其在解题中的作用，进行正反两方面的分析，有的还列举出反例。有些例题只给出了解题思路，而把解题过程留给读者完成。

考虑到这几年研究生入学考试的试题难度普遍越来越大，书中安排了不少难度较大的例题和习题，有些问题还作了引申，并在第一单元中专辟一讲，探索证明微积分方面问题的方法。

本书第一单元一至六讲由杨照华编写，第一单元七至九讲及第六单元由苏淳编写，第一单元第十讲及第四、五单元由严镇军编写，第二、三单元由钟立敏编写，最后由严镇军定稿。

编者虽从事教学多年，但水平和经验甚感不足，故所选素材难免挂一漏万，且难免有不妥之处，恳请读者不吝赐教。本书若能对读者略有帮助，我们将感到欣慰。

目　录

第一单元　微　积　分

第一讲　求极限……………………………………1

1.1　关于极限的若干说明……………………………1

1.2　求极限的一般方法………………………………4

1.3　递归数列的极限…………………………………26

1.4　不定式的极限……………………………………28

1.5　多元函数的极限…………………………………38

第二讲　求导数……………………………………47

2.1　关于可微性的若干说明…………………………47

2.2　求导的基本方法…………………………………51

2.3　隐函数的求导……………………………………61

2.4　通过变量代换求导………………………………67

第三讲　微分学的应用……………………………76

3.1　在几何方面的应用………………………………76

3.2　求极值……………………………………………80

3.3　函数的描绘………………………………………88

3.4　近似计算与误差分析……………………………92

第四讲　单积分……………………………………96

4.1　求原函数…………………………………………96

4.2　定积分的计算……………………………………132

第五讲　广义积分…………………………………151

5.1　广义积分的定义…………………………………151

5.2　广义积分敛散性的判别…………………………155

5.3　广义积分的计算…………………………………162

第六讲　证明题选讲和证法简介 ……………………………………186
6.1　极限与连续……………………………………………………186
6.2　微分中值定理…………………………………………………202
6.3　单积分 …………………………………………………………226
6.4　微积分论证方法概述 …………………………………………231
第七讲　级数 ……………………………………………………………242
7.1　数项级数 ………………………………………………………242
7.2　函数项级数……………………………………………………255
7.3　幂级数与泰勒展开式 …………………………………………263
7.4　傅立叶级数……………………………………………………275
第八讲　多元函数积分学 ………………………………………………291
8.1　二重积分与三重积分 …………………………………………291
8.2　曲线积分………………………………………………………302
8.3　曲面积分………………………………………………………315
第九讲　积分学的应用 …………………………………………………333
9.1　几何应用………………………………………………………333
9.2　物理应用………………………………………………………343
第十讲　矢量分析和场论 ………………………………………………353
10.1　矢函数 ………………………………………………………353
10.2　关于矢函数的计算和证明 …………………………………354
10.3　场论三度 ……………………………………………………358
10.4　场论三度的计算和证明 ……………………………………363
10.5　几个重要的场及其计算 ……………………………………374

第二单元　常微分方程

第一讲　初等积分法 ……………………………………………………384
1.1　几种可积型方程 ………………………………………………384
1.2　例题 ……………………………………………………………386
1.3　积分因子………………………………………………………395

第二讲　高阶线性微分方程和方程组 ……………………………399
2.1　高阶线性微分方程 ……………………………………………399
2.2　常系数线性微分方程组 ………………………………………409
2.3　拉普拉斯变换 ……………………………………………………411

第一单元 微积分

第一讲 求极限

数学分析的特征就是以极限运算作为基本运算。可以毫不夸张地说，求极限是整个初等数学分析的基本内容。且不说函数连续性、可微性的定义需借助极限，即使积分，实质上也不过是一种较为复杂的极限罢了。本讲着重讨论求极限的方法。

1.1 关于极限的若干说明

1） 数列即整序变量，实质上是定义在自然数集上的函数。因此数列的极限可以看作，当连续自变量 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 极限的一种特殊情形。所以我们只要把函数极限的有关问题弄清楚了，那么数列极限的相应问题自然也就清楚了。有鉴于此，下面我们一般只讨论函数极限。

2） 极限定义有很多等效说法。例如，“当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 以 l 为极限”。这等效于说：设正数序列 $\{\varepsilon_k\}:\varepsilon_k\to 0\ (k\to+\infty)$，且对任意的正整数 k，存在 $\delta_k>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta_k$ 时有 $|f(x)-l|<\varepsilon_k$，则当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 以 l 为极限。

事实上，对任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$，故存在正整数 k，使得 $0<\varepsilon_k<\varepsilon$。又根据假设，对应于 ε_k，存在 $\delta_k>0$，使得当

$0<|x-a|<\delta_k$ 时必有 $|f(x)-l|<\varepsilon_k<\varepsilon$。当然，这就意味着当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 以 l 为极限。

不过要注意，极限定义中的条件："对任意给定的正数 ε" 不能代之以"对无穷多个正数 ε'"。例如狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数}\\0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

对所有的 $\varepsilon'>1$，都有 $|D(x)-0|<\varepsilon'$，但在任何一点都没有极限。

3） 判定极限存在与否的定理很多，以下介绍几个常用的定理。

定理1（柯西判别准则） 整序变量 $\{x_n\}$ 存在有穷极限的充分必要条件是：$\{x_n\}$ 为柯西序列（即基本序列）。也就是说，对任意正数 ε，存在正数 N，使得当 m，$n>N$ 时，必有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon$$

定理2（柯西判别准则） 极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在的充分必要条件是：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x_1-a|<\delta$，$0<|x_2-a|<\delta$ 时，必有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

定理3 当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{X_n\}$ 以 l 为极限的充分必要条件是，对自然数的任一无穷子序列 $\{n_k\}$，都有 $\lim\limits_{k\to\infty}X_{n_k}=l$。

4）为了加深对极限定义的理解，我们不妨试用 ε–δ 语言来描述："$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq l$" 和 "极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在"。

"$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq l$" 的内蕴是：当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 无极限，或虽然有极限，但不等于 l。根据极限的定义，"$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$" 要求：对任意的正数 ε，都能找到正数 δ，使得对所有满足 $0<|x-a|<\delta$ 的 x，必须有 $|f(x)-l|<\varepsilon$。而 "$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq l$" 则是它的否定。因此必定至少对某个正数 ε_0，找不到一个正数 δ，使得对所有满足 $0<|x-a|<\delta$ 的 x，都有 $|f(x)-l|<\varepsilon_0$。换句话说，对该正数 ε_0，以及任意的正数 δ，在满足 $0<|x-a|<\delta$ 的 x 中，至少有一个 x' 使得不等

式 $|f(x')-l|<\varepsilon$ 被破坏。从上面的分析可知，“$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq l$”可以这样来描述：存在某个 $\varepsilon_0>0$，对任意 $\delta>0$，都存在满足 $0<|x-a|<\delta$ 的 x'，使 $|f(x')-l|\geq\varepsilon_0$。

根据柯西判别准则，“极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在”可以这样描述：对某个正数 ε_0，不管 δ 是怎样的正数，总可以找到 x_1 和 x_2：$0<|x_1-a|<\delta$，$0<|x_2-a|<\delta$，使得 $|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon_0$。

5） 复合函数的极限存在与否，可用下述定理判断。

定理4 设 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$，$\lim\limits_{u\to A}f(u)=l$。又设 $f(u)$ 在 $u=A$ 连续或在 $x=a$ 的某个邻域内，当 $x\neq a$ 时，$\varphi(x)\neq A$。则

$$\lim_{x\to a}f(\varphi(x))=l$$

这里要特别强调的是，只从条件“$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ 和 $\lim\limits_{u\to A}f(u)=l$”，绝对不能推出 $\lim\limits_{x\to a}f(\varphi(x))=l$。例如，设

$$f(x)=\varphi(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

易知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$。但复合函数

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}\sin(1/x\sin\dfrac{1}{x}), & x\neq 0,\ 1/k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)\\ \sin 1, & x=0\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\varphi\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)\right)=1$。说明复合函数 $f(\varphi(x))$ 当 $x\to 0$ 时无极限。但函数

$$f_1(x)=\varphi_1(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的情况就不同了。此时 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以

$$\lim_{x\to 0}f_1(\varphi_1(x))=0$$

6） 有极限的变量必有界，但有界变量未必有极限。同样，无穷大量一定是无界变量，但无界变量未必是无穷大量。

例如，$x_n=(-1)^n$ 是有界的，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在。同样，$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时无界。这是因为

$$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}(2n+\frac{1}{2})\pi=+\infty$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=0$，因此，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大。

1.2 求极限的一般方法

本节介绍定性或定量地确定极限的常用方法。为了突出每种方法的特点，将分六个专题加以论述。

1.2.1 从定义出发求极限

这种方法常用来论证理论问题。当对极限只作定性讨论，而不涉及极限的具体数值时，有时也采用这种方法。

例1 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是递增序列，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，且对 $\{a_n\}$ 的每一固定项，总有 $\{b_n\}$ 的项不小于它，而对 $\{b_n\}$ 的每一固定项，也有 $\{a_n\}$ 的项不小于它。试证 $A=B$。

证 对任意 $\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，故存在 $N_1>0$，$N_2>0$，使得

$$n>N_1\text{ 时，}\quad A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$$
$$n>N_2\text{ 时，}\quad B-\varepsilon<b_n<B+\varepsilon$$

取定 $n_1>N_1$。由题设知，存在 $b_{n'_1}$，$b_{n'_1}\geqslant a_{n_1}$。再由 b_n 的递增性知，当 $n>\max(n'_1,\ N_2)$ 时，

$$A-\varepsilon<a_{n_1}\leqslant b_n<B+\varepsilon\Rightarrow A-B<2\varepsilon$$

类似可证 $$A-B>-2\varepsilon$$

于是 $-2\varepsilon<A-B<2\varepsilon$，即 $|A-B|<2\varepsilon$ 由于 $|A-B|$ 是一个确定的非

负数，故 $A=B$。

例2 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 严格单调；$\{x_n\}$ 是 $[a,b]$ 中的点列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(c)$，$a\leqslant c\leqslant b$。试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$。

证 不失一般性，可设 $f(x)$ 严格增（若 $f(x)$ 严格减，则 $-f(x)$ 便严格增）。

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq c$，则存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $|x_{n_k}-c|\geqslant\varepsilon_0$，即

$$x_{n_k}\geqslant c+\varepsilon_0 \qquad \text{或} \qquad x_{n_k}\leqslant c-\varepsilon_0.$$

显然可以从 $\{x_{n_k}\}$ 中再挑出均满足 $x_{m_l}\geqslant c+\varepsilon_0$ 或均满足 $x_{m_l}\leqslant c-\varepsilon_0$ 的子序列 $\{x_{m_l}\}$。不失一般性，可设均满足：$x_{m_l}\geqslant c+\varepsilon_0$。又因 $f(x)$ 是严格增的，所以 $f(x_{m_l})\geqslant f(c+\varepsilon_0)>f(c)$。由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(c)$ 知，必有 $\lim\limits_{l\to\infty}f(x_{m_l})=f(c)$。但从 $f(x_{m_l})\geqslant f(c+\varepsilon_0)>f(c)$ 推得 $\lim\limits_{l\to\infty}f(x_{m_l})\geqslant f(c+\varepsilon_0)>f(c)$。矛盾，说明必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$。

1.2.2 通过变形代换求极限

几乎所有求极限的问题都需要用到这种方法。它的目的不外乎是将问题化简，归结为已知其极限的情形。例如归结为下述极限：

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}a^{\frac{1}{x}}=1\ (a>0)$；$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$

或利用下述公式将问题化简：

4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

5) 若 $a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

6) 若 $a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$

7) 司特林公式：设 n 是自然数。则

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{\theta_n}{12n}\right\}$$

其中 $\exp\{a\} = e^a$（下同），$0<\theta_n<1$。

例1 设 $P_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$，求 $\lim_{n\to\infty}P_n$。

解 显然 $$P_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} \equiv p_{n1}p_{n2}$$

又 $$p_{n1} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$p_{n2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{n^2+n+1}{3}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}P_n = \lim_{n\to\infty}p_{n1}p_{n2}$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = \frac{2}{3}$$

例2 求 a，b，使得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_kx^2+b_kx+c_k} - ax - b\right) = 0$$

其中诸 $a_k>0$，b_k，c_k 均为已知常数。

解 由于 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_kx^2+b_kx+c_k} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{x} = a \quad\Rightarrow\quad a = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$$

又 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{a_kx^2+b_kx+c_k} - \sqrt{a_k}\,x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{b_kx+c_k}{\sqrt{a_kx^2+b_kx+c_k}+\sqrt{a_k}\,x} = \frac{b_k}{2\sqrt{a_k}}$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{a_kx^2+b_kx+c_k} - \sqrt{a_k}\,x\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\sqrt{a_k}}$$

由此推得 $$b = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\sqrt{a_k}}$$

例3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ 。

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，故由公式5)知：

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$。

例4 设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{n^b-(n-1)^b}=l$，其中 l 为给定常数。试求a和b的值。

$\dfrac{1}{n^{b-a+1}} \Big/ \dfrac{1-(1-\frac{1}{n})^b}{n}$

解 易知 $b\neq 0$。又

$$\frac{n^a}{n^b-(n-1)^b}=\frac{1}{n^{b-a+1}}\Big/\frac{1-(1-\frac{1}{n})^b}{1/n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^b-(1-\frac{1}{n})^b}{1/n}=(x^b)'\Big|_{x=1}=b$$

故若$l=0$，则当且仅当 $b>a+1$ (a 可以是任意常数)时，才有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{n^b-(n-1)^b}=0$$

若 $l\neq 0$，则当且仅当$b=\dfrac{1}{l}$，$b-a+1=0$，即 $a=\dfrac{l+1}{l}$时才有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{n^b-(n-1)^b}=l$$

例5 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中诸 $a_i>0$。

解 题中函数的形式易使人想到利用公式2)。为此，我们将函数作如下变形：

$$\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$$

$$=\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}\cdot\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x-n}{x}}$$

于是由复合函数求极限法则可知：

原式=

$$\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^x+\cdots+a_n^x-n}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x-n}{x}}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x}\right\}$$

又 $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=(a^x)'\Big|_{x=0}=\ln a$$

故 $$原式=\exp\{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n\}=a_1a_2\cdots a_n$$

例6 设 a, b 为正的常数，求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]$，其中 $[y]$ 表示 y 的整数部分，即不超过 y 的最大整数。

解 记 $\{y\}=y-[y]$，即 $\{y\}$ 是 y 的小数部分。显然，$0\leqslant\{y\}<1$。于是，

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{a}\left(\frac{b}{x}-\left\{\frac{b}{x}\right\}\right)$$

$$=\frac{b}{a}-\frac{1}{a}\lim_{x\to 0^+}x\left\{\frac{b}{x}\right\}=\frac{b}{a}$$

例7 求 $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty}[\cos(m!\pi x)]^n)$。

解 若 x 为无理数，则 $m!\pi x\neq k\pi$，故

$$-1<\cos(m!\pi x)<1$$

$$\lim_{n\to\infty}[\cos(m!\pi x)]^n=0,\ 原式=0$$

若 $x=\frac{q}{p}$ 为有理数，则当 m 充分大时

$$m!\pi x=2k\pi,\ \lim_{n\to\infty}[\cos(m!\pi x)]^n=1,\ 原式=1.$$

1.2.8 夹中定理

定理 设$f(x)$，$g(x)$和$h(x)$在$x=a$的某一邻域内(a可以例外)有定义，且$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$。则

$$\lim_{x\to a}h(x)=l$$

对于数列也有类似的定理。

夹中定理无论在理论上，或在求极限的时候，都起着重要作用。

应用夹中定理的关键是找到与函数的具有相同极限的上、下估计函数。为此，常常需要利用一些不等式。例如：

1) 正数的几何平均值不大于算术平均值，即

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

等号成立的充分必要条件是：$x_1=x_2=\cdots=x_n$。

2) 柯西不等式：对任意实数 a_i，b_i，

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

等号成立的充要条件是：$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$。

3) 伯努利不等式：设诸$x_i>-1$，则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant1+x_1+x_2+\cdots+x_n$$

4) 当$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{2}{\pi}x\leqslant\sin x\leqslant x$。

例1 设诸$a_i>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$。

解 记 $a=\max(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，则

$$a<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant a\sqrt[n]{m}$$

又因

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max(a_1,a_2,\cdots,a_m)$$

例2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\right]$。

解 因 $$\frac{1}{n+1}=[(n+1)^k]^{-\frac{1}{k}}<\frac{1}{\sqrt[k]{n^k+1}}<\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n-1}=[(n-1)^k]^{-\frac{1}{k}}>\frac{1}{\sqrt[k]{n^k-1}}>\frac{1}{n}$$

故 $$\frac{n}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}<1$$

$$1<\sum_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}<\frac{n}{n-1}$$

于是由夹中定理即得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\right]=2$$

例3 设 $\{x_n\}$ 是正数序列，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。求证：

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}=0$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant 0}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i+k}\right)^{\frac{1}{n}}=0$$

其中 $\sup(a_1, a_2, \cdots, a_m, \cdots)$表示诸 a_i 的上确界。

证 1) 由于正数的几何平均值不大于算术平均值，所以

$$0<\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}=0$$

2) 由题设知，存在$M>1$，使$0<x_n\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，同时对任意$\varepsilon$：$0<\varepsilon<1$，存在$n_0$，使得当$n>n_0$时，$x_n<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$。于是当 $n>n_0$ 时，对任意的 k，

$$\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i+k}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left[M^{n_0}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2(n-n_0)}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\leqslant \left(M^{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2(1-n_0/n)}$$

又 $$\lim_{n\to\infty} (M^{n_0})^{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{n_0}{n}\right)$$

故存在$N>n_0$，使得当$n>N$时$(M^{n_0})^{\frac{1}{n}} < 2$，$\left(1-\frac{n_0}{n}\right)>\frac{1}{2}$，进而

$$(M^{n_0})^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2(1-n_0/n)} < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

换句话说，当 $n>N$ 时，对所有的k均有

$$0 < \left(\prod_{i=1}^{n} x_{i+k}\right)^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

既然上确界是最小上界，所以

$$0 < \sup_{k\geqslant 0}\left(\prod_{i=1}^{n} x_{i+k}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \varepsilon$$

这就完全证明了$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant 0}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_{i+k}\right)^{\frac{1}{n}} = 0$。

例4 已知数列$a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{(n-1)^2}(n^2-k)^{-\frac{1}{2}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$。

解 因为当$k\leqslant x\leqslant k+1$时，

$$(n^2-k)^{-\frac{1}{2}} \leqslant (n^2-x)^{-\frac{1}{2}} \leqslant [n^2-(k+1)]^{-\frac{1}{2}}$$

故 $$a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{(n-1)^2}\int_k^{k+1}(n^2-k)^{-\frac{1}{2}}\,dx \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{(n-1)^2}\int_k^{k+1}(n^2-x)^{-1/2}dx$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\int_1^{(n-1)^2+1}(n^2-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\left[\sqrt{1-n^{-2}}-\sqrt{\frac{2(n-1)}{n^2}}\right]$$

$$a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{(n-1)^2-1}[n^2-(k+1)]^{-\frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{(n-1)^2-1}\int_k^{k+1}(n^2-x)^{-1/2}dx$$

$$\geqslant \frac{1}{n}\int_0^{(n-1)^2}(n^2-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\left[1-\sqrt{\frac{2n-1}{n^2}}\right]$$