矩陣、集合與群

譯者：吳英格

徐氏基金會出版

矩陣、集合與群

譯 者 吳 英 格

徐氏基金會出版

內政部登記證內版台業字第 1347 號

矩陣、集合與群

中華民國五十九年三月二十日初版

出版者　徐氏基金會出版部
台北郵政信箱 3261 號
香港郵政信箱 1284 號

發行人　林　碧　鏗
台北郵政信箱 3261 號

譯　者　吳　英　格
國立台灣大學理學院數學研究所研究生

印刷者　新高美印製有限公司
三重市長興街九十三號

定　價　新台幣　三十五元
港　幣　~~五元五角~~
180

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會爲促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

原序

這本書原爲理工學生而寫的，提供近代代數中主要部門的基本導論——如矩陣、集合、及群。在此三項目中，矩陣對大學部學生來說最重要，因此本書講的也要比其他二項多些。儘管如此，各題材間還是互相關連着，我們希望這本書能給學生在不同的數學觀念中認識一些基本關連的地方，並能教給學生如何去運用。

儘管矩陣與群常在第二學年及第三學年作爲輔助性的教學課程來傳授給學生，但是，在第一學年就教授這些題材也不致於會使學生覺得難以應付。作者的觀點認爲，與其花很多的時間在微積分上的細節問題，倒不如早些在大學部課程裡介紹代數結構的重要性。職此之故，本書儘量把內容所包含的預備知識介紹到，俾不假外求，僅需要一些進大學時的數學知識就足夠。因此，本書對學物理、學化學、及學工程的人，不論是什麽學位，都是合適的。

不同的例子分別在各章中介紹，讀者練習的問題列在各章之末，解答則在書末，另外在書末也列有進修的讀物，以便學生進一步去探討有關題材。

作者在此願對 I.N.Baker 博士及 D.Dunn 先生致謝意，兩位曾看過原稿並作過許多批評與建議，使本書實質上改進不少。另外，得感謝 A.N.Gordon 看過本書中的證明並作了一些評語。

目　録

4. 線性代數方程組

5. 特徵值與特徵向量

6. 矩陣的對角線化

7. 矩陣函數

8. 群論

第一章　集合、映射、及變換

1.1 引言

集合的觀念是數學中最基本的，集合論跟數學邏輯可以合適的說是數學最最根本的地方，本書的目的雖不在探求數學的基本結構，但是集合的概念（對應於我們直感的團體概念）却值得我們去深究，因集合的概念一方面可以自然地導致映射及變換的觀念，從中可以推得矩陣的概念，另一方面，可以導致群論，此在物理科學中已漸廣被應用。進一步來說，集合與數學邏輯是今天很多計算機電路設計以及概率論公設化討論的基本，本章我們首先將發展足夠的初等集合論以及其記號俾可瞭解映射及變換，（尤其是線性）。然後利用線性變換來引進矩陣，至於更正式討論矩陣代數及矩陣微積分便依次分布在各章裡。

此章的後半諸節裡，我們將再回頭研究集合論，對集合代數給予簡短的討論，並舉例說明許多應用到集合的典型問題，然而，這些概念並不因而研究得過多，讀者若對集合論想進一步學習，儘可在本書末所列的進修讀物中找幾本來看看。

1.2 集合

首先須辨清元素之集合是什麼，任何事物，量或運算子 (operators) 的團體均形成一集合，各個事物，量或運算子便稱為該集合的元素（或份子）。譬如，我們可以考慮學生的集合，介於0與1間的

所有實數集合，原子內電子的集合，運算子$\partial/\partial x_1$，$\partial/\partial x_2$，……，$\partial/\partial x_n$的集合，若集合含有有限數之元素，則稱此集合爲有限集合。否則，稱爲無限集合(如所有正整數之集合)。

集合都以大寫字母A，B，C，……表之，而集合的元素都以小寫字母a，b，……，x，y，z 表之，有時以數1，2，3，等等表之。

不含任何元素的集合稱爲空集合，以ϕ表之，譬如，所有在$1<x<1$內的整數x爲空集合，蓋無整數滿足該條件。(在此附註：若集合定爲必有元素存在，則ϕ無法稱之爲集合而不發生矛盾。此在我們的觀點雖不致於發生嚴重的困難，但表明在形成如此基本的事情如集合上是需要特別小心的)。

記號$\in$用以表一集合與份子間或屬於的關係：例如，$x\in A$ 讀成"元素x屬於集合A"，類似地$x\notin A$ 讀成"x不屬於A"或"x不是A的元素"。

若表明一集合以舉例其元素時，則常以曲括號將元素圍起來，如

$$A=\{2, 4, 6, 8, 10\} \tag{1}$$

爲五元素之集合——數2，4，6，8及10。括號內元素之次序不太要緊，我們也可記成$A=\{4, 8, 6, 2, 10\}$，然而在許多情況裡，當元素的數目很大(或不有限)時，用舉例的方法便失效了，爲補救這種情況，我們以給予"定性"E(令)來表明一集合，使A爲具性質E的所有元素所成的集合，其中E爲某些事物所具有的明確性質，以記號表之，則成

$$A=\{x\,;\,x\text{ 具性質}E\} \tag{2}$$

例如，若A爲所有奇數之集合，則可記成

$$A=\{x\,;\,x\text{ 爲奇數}\}$$

此顯然爲一無限集合，同樣的

$$B=\{x\,;\,x\text{ 爲英文字母}\}$$

爲二十六個元素的有限集合——卽，字母 a，b，c ……y，z。利用這個記號，空集合可以定爲

$$\phi=\{x\ ;\ x\neq x\}.$$

今談到子集合的概念，若集合 A 的每一元素亦爲集合 B 之元素，則稱 A 爲 B 之子集合，而以 $A\subseteq B$ 表之。讀成"A 包含於 B"同一敍述可以記成 $B\supseteq A$，此時讀成"B 包含 A"譬如，若

$$A=\{x\ ;\ x\text{ 爲整數}\}$$

且

$$B=\{y\ ;\ y\text{ 爲實數}\}$$

則 $A\subseteq B$ 且 $B\supseteq A$。若且唯若兩集合有相同的元素，則稱此兩集合相等（或同一）；常以等號表相等關係。

今證明兩基本定理

定理 1.　若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，則 $A\subseteq C$。

蓋假設 x 爲 A 之元素，則 $x\in A$，但 $x\in B$，蓋 $A\subseteq B$。因此 $x\in C$，蓋 $B\subseteq C$。可見 A 之每一元素都在 C 中，卽，$A\subseteq C$。

定理 2.　若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，則 $A=B$

令 $x\in A$（x 爲 A 之元素），則 $x\in B$ 蓋 $A\subseteq B$，但若 $x\in B$ 則 $x\in A$，蓋 $B\subseteq A$，可見 A 與 B 有相同的元素，因之，必爲同一集合，卽 $A=B$。

若集合 A 爲集合 B 之子集合，且至少有一元素不在 A 中，則 A 稱爲 B 之眞子集，以 $A\subset B$ 表之，譬如，若 B 爲數 $\{1,2,3\}$ 之集合，則集合 $\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{3,1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$ 均爲 B 之眞子集合。空集合亦認爲 B 之眞子集，至於集合 $\{1,2,3\}$ 雖爲 B 之子集但非眞子集。將眞子集及子集算在內，B 共有八個子集，今可證 n 元素之集合有 2^n 個子集，爲此，我們只須將 n 元素中一次取 r 元素之取法

數相加起來就好了，此和等於

$$\sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r = {}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + \cdots\cdots {}^{n}C_n = 2^n \qquad (4)$$

（利用二項定理）。此數包含空集合（即 ${}^{n}C_0$ 項）及集合本身（即 ${}^{n}C_n$ 項）。

1.3　范恩圖解

幫助瞭解集合論的簡易設計便是范恩圖解。這些圖形的充分利用則在 1.7，那時集合的運算將考慮得相當的詳細。然而，此時引入范恩圖解的主要圖形對我們即將要在下節說明的映射概念給予很大的便利。

范恩圖解的方法是藉一簡單平面區域——常以圓區域表明——代表一集合。（注意，圓區域的邊界形狀無關緊要），集合之元素以圓內之點（或即區域）代表。例如，設 A 為 B 之眞子集（即 $A \subset B$），則可以用圖 1.1 所示之任意圖解表之。

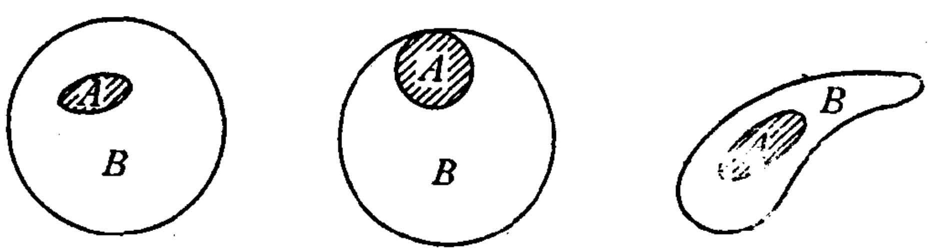

圖　1.1

若 A 與 B 為無共同元素之集合——即 A 無一元素在 B 中，B 無一元素在 A 中——則稱此兩集合相離 (disjoint)。例如，若

$$A = \{x\ ;\ x\text{爲一馬}\}$$

$$B = \{y\ ;\ y\text{爲一牛}\}$$

則A與B爲相離集合．范恩圖解對於這種情況可用無共同點的兩有界區域表示（見圖 1.2）．

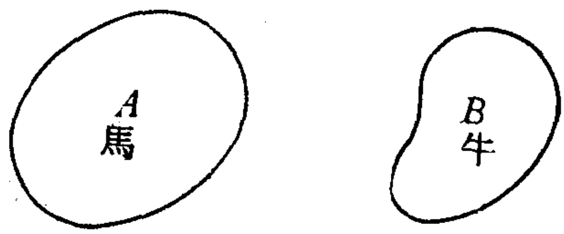

圖　1．2

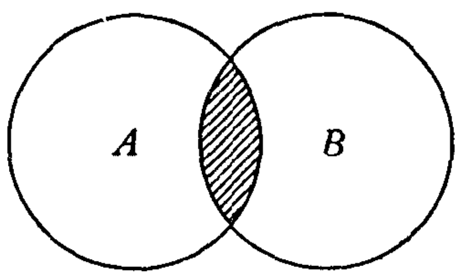

圖　1.3

兩集合也可以有某些元素共有．這可以用圖 1.3 所成之范恩圖形表明，其中陰影區域便是兩集合的共同部分．其他的情況請看 1.7．

1.4　映射

數學裡基本概念之一爲映射的概念．從集合A映成集合B之映射定爲一規則或運算使A之每一元素對應於B之固定元素（A, B不必爲

相異的集合，理由見後），有時候映射也稱爲變換或函數，從A映成B的映射表之以

$$f: A \to B, \quad 或 \quad A \to B. \tag{5}$$

若x爲集合A的元素，則x在映射f所對應在B的元素以$f(x)$表示，稱之爲x的像，此可以利用圖解來表明（見圖 1.4）.

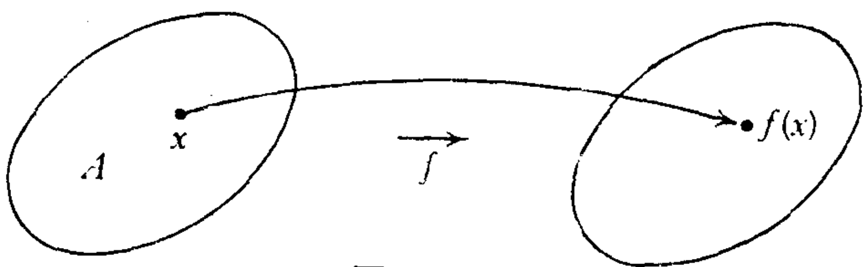

圖 1.4

特別映射爲恆等映射．此可以用$f: A \to A$表之，而將A之每一元素送至其本身．換言之，$f(x) = x$ (卽x爲其本身之像）．一般更特別都以I表恆等映射．

今給兩簡單映射之例如下：

(a)若A爲實數x之集合，且f爲將每數指予其指數，則$f(x) = e^x$爲B之元素，而B爲正實數集合．

(b)令A爲英文字母 26 個所成之集合．若f表一映射，將首字母指予數 1，b 指予 2，等等類推至z指予 26，則可記成

$$f \equiv \left\{ \begin{array}{l} a \to 1 \\ b \to 2 \\ c \to 3 \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ z \to 26 \end{array} \right\}.$$

B之元素爲整數1，2，3……26．此兩種映射（變換、函數）稱爲一對一，意爲B之每一元素y都有A之元素x使$f(x)=y$，且若x與x'爲A之相異元素，則此兩元素在B中有相異的像（卽$f(x)\neq f(x')$），已予一對一映射f則反映射f^{-1}恆可求得，把f之工作抵掉．蓋f送x至y使$y=f(x)$，而f^{-1}送y至x使$x=f^{-1}(y)$，那麽

$$y=f[f^{-1}(y)]=ff^{-1}(y) \tag{6}$$

且

$$x=f^{-1}[f(x)]=f^{-1}f(x) \tag{7}$$

可見

$$ff^{-1}=f^{-1}f=I \tag{8}$$

其中I爲恆等映射，將每一元素映成本身，例(a)中反映射f^{-1}顯然爲將每一元素指予其對數（底爲e）的映射，蓋

$$\log_e e^x=x \quad 且 \quad e^{\log_e x}=x\ .$$

兩種或更多的映射或變換之積的反映射可以容易求得．蓋設f送x至y且g送y至z使

$$y=f(x) \quad 且 \quad z=g(y) \tag{9}$$

那麽

$$z=g[f(x)] \tag{10}$$

由定義，此意爲首施f於x；然後施g於$f(x)$．因此

$$x=(gf)^{-1}(z) \tag{11}$$

但由(9)可得

$$x=f^{-1}(y) \quad 且 \quad y=g^{-1}(z) \tag{12}$$

因此

$$x = f^{-1}[g^{-1}(z)] = (f^{-1}g^{-1})(z). \tag{13}$$

比較(11)與(13)可得

$$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}. \tag{14}$$

由此可見，兩一對一變換之積的反變換可由依次反序施行反變換而得。

一對一映射常用來建立電碼。譬如，英文字母映成其本身惟向左移動四位置的映射可表明如下。

$$\begin{array}{cccccccccccccc} a & b & c & d & e \cdots\cdots & s & t & u & v & w & x & y & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ e & f & g & h & i \cdots\cdots & w & x & y & z & a & b & c & d \end{array}$$

此映射變換 “ set theory ” 成 “ wix xlisrc” .

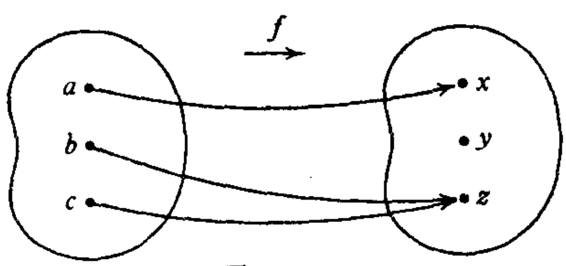

圖 1·5

並非所有映射爲一對一。譬如，映射 f 以圖 1.5 定義之，其中 x 爲 a 之像，z 同爲 b 與 c 之像；此映射沒有反映射，儘管各個元素的反元素存在；這些是：$f^{-1}(x) = a$，$f^{-1}(z) = \{b, c\}$，(即包有二元素 b 與 c 的集合，$f^{-1}(y) = \phi$ (空集合) 蓋 a，b 與 c 均不映至 y。顯然若 f，g 與 h 爲任意三映射，則

$$f\{g[h(x)]\} = (fg)[h(x)] = fgh(x) = f(gh)(x) \tag{15}$$

一即，結合律成立之意。然而，兩映射必可交換則不成立一即積與映射實施之先後次序有關。蓋設

$$f = \begin{Bmatrix} a \to b \\ b \to c \\ c \to a \end{Bmatrix} \quad 且 \quad g = \begin{Bmatrix} a \to b \\ b \to b \\ c \to a \end{Bmatrix} \tag{16}$$

若首先施行映射 g 再施行 f 則可得

$$fg=\left\{\begin{array}{l}a\to c\\ b\to c\\ c\to b\end{array}\right\} \tag{17}$$

反之，先施行 f 再施行 g 則可得

$$gf=\left\{\begin{array}{l}a\to b\\ b\to a\\ c\to b\end{array}\right\} \tag{18}$$

顯然 $fg\neq gf$。此示明 f 與 g 不可交換。也許讀者會產生懷疑只不過在此特殊情況內才發生不可交換，蓋其中 f 爲一對一映射，而 g 却不是。然而，就是兩一對一映射也未必可交換。然而，常可交換的兩映射爲一對一映射 f 及其反映射 f^{-1}（見(8)）。

1.5 線性變換及矩陣

今考慮直角卡氏軸 $x_1 0 x_2$ 經角 θ 至 $y_1 0 y_2$ 之旋轉在二維上的問題（見圖 1.6）。

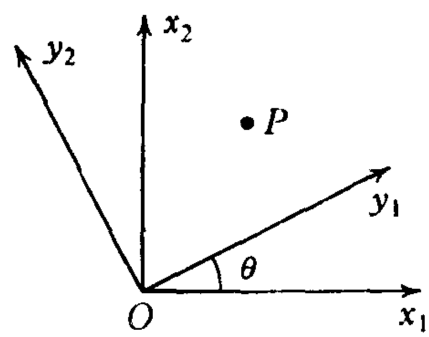

圖 1.6

若 P 爲軸平面上的一標準點，則其關於 $y_1 0 y_2$ 系的坐標 (y_1, y_2) 容易求得跟其對於 $x_1 0 x_2$ 系的坐標 (x_1, x_2) 有關，爲

$$\left.\begin{array}{l}y_1=x_1\cos\theta+x_2\sin\theta\\ y_2=-x_1\sin\theta+x_2\cos\theta\end{array}\right\} \tag{19}$$